数理解析研究所講究録
1182巻 2001年 9-20



# 超曲面の関数体の体論と幾何

新潟大理　吉原久夫
(Hisao Yoshihara)

## §1. 超越拡大に対する体論

$k$ : 基礎体

$K/k$ : 有限生成拡大体

これが超越的のとき少し詳しく調べたい。

$K_m$ : 極大有理的中間体

$\mathrm{tr.deg}_k K = n$ とおく。

$n \leqq 2$, $\mathrm{ch}\, k = 0$ なら $K_m$ の部分体は有理的である。

次の問題を考察する。

(1) いつ $K/K_m$ はガロワ拡大か？

(2) $L$ を $K/K_m$ のガロワ閉包とするとき，$L$ はいかなる体か？

(3) $\mathrm{Gal}(L/K_m)$ を求めよ。

(4) 同値を法として埋めこみ $K_m \hookrightarrow K$ はどの

くらいあるか？

幾何学的考察をする。以下 $\mathrm{ch}\, k = 0$, $k = \bar{k}$ と仮定する。

$$dr(K) = \min\left\{ [K : K_m] \;\middle|\; K_m : \text{極大有理的中間体} \right\}$$

とおき，$K$ の非有理次数という。$K$ をモデルとする代数多様体にも定義して，双有理不変量となる。

<u>定理 0.</u>

(1) $n = 1$（難波 [6]）．$K$ は smooth model $C$ を $\mathbb{P}^2$ にもつとする。$d = \deg C$ $(\geqq 3)$ とすると，$dr(K) = d-1$．しかもこのときの $K/K_m$ は，$^\exists p \in C$ projection $\pi_p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ で与えられる。

(2) $n = 2$（— [8], Cortini [1]）．$K$ は smooth model $S$ を $\mathbb{P}^3$ にもつとする．$d = \deg S$ $(\geqq 3)$ とすると，$dr(K) = d-1$ 又は $d-2$.

この結果をふまえて次の考察をする．

$V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の $d$ $(\geqq 4)$ 次 smooth hypersurface とし，$P \in \mathbb{P}^{n+1}$ から hyperplane $H$ への射影

$\pi_P : V \dashrightarrow H$ を考える。これによって体の拡大 $\pi_P^* : k(H) \hookrightarrow k(V)$ が得られる。この拡大は $H$ の選び方によらないで、$P$のみに依存するので、次の定義ができる。

$K_P := k(H) \cong k(\mathbb{P}^n)$

$L_P$ : $K/K_P$ のガロワ閉包

$G_P := \mathrm{Gal}(L_P/K_P)$

これを点 $P$ でのガロワ群という。

$g(P)$ : $L_P$ の smooth model の genus.

<u>注意 1</u>. 定理0より, $n=1$ 又は $2$ のとき $K_P$ は極大有理的中間体である（但し, $d=4$, $n=2$, $P \notin V$ は除いて）

<u>定義 1.</u> $K/K_P$ がガロワ拡大のとき $P$ を Galois point という。この個数を $\delta(V)$ [resp. $\delta(V^c)$] for $P \in V$ [resp. $P \notin V$] と表わす。

| 問題（続き） |
| --- |
| (5) $\mathbb{P}^{n+1}$ 上のガロワ点の分布と $\delta(V)$, $\delta(V^c)$ を求めよ。 |

## §2. 1次元のとき

$d^* = d(d-2)(d^2-3)/2$ とおく.

$C^*$ を $C$ の multitangent line の和とおく. このとき

$\deg C^* \leqq d^*$ である。

<u>定理 2.1</u> $P \in C \setminus C^*$ のとき,

(i) $G_P \cong \mathfrak{S}_{d-1}$ ($d-1$ 次対称群)

(ii) $g(P) = (d-1)!\,(d+2)(d-3)/4 + 1$

(iii) $K_P$ と $K$ の中間体はない.

<u>定理 2.2</u> $P \in \mathbb{P}^2 \setminus (C \cup C^*)$ のとき,

(i) $G_P \cong \mathfrak{S}_d$

(ii) $g(P) = (d-1)!\,(d^2-d-4)/4 + 1$

(iii) $K_P$ と $K$ の中間体はない.

とくに $C$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されているとき, $P = (a, b) \in C$

に対して $\deg P = \max\{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}], [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}]\}$

とおく. このとき

<u>定理 2.3</u> $P \in C$ が $\deg P > d d^*$ ならば

定理 2.1 の (i)〜(iii) が成立する。

次に $P \in C^*$ のうちでも一番特別な場合，ガロワ点のときの考察をする。

<u>定理 2.4</u>

(i) $d=4$, $P \in C \implies \delta(C) = 0, 1$ or $4$

(ii) $d \geqq 5$, $P \in C \implies \delta(C) = 0$ or $1$

$P$ がガロワ点なら $G_P$ は位数 $d-1$ の巡回群

(iii) $d \geqq 4$, $P \notin C \implies \delta(C^c) = 0, 1$ or $3$

$P$ がガロワ点なら $G_P$ は位数 $d$ の巡回群

さらに最大値を与える curve は次の通り unique である．（射影同値になる）

(i)′ $\delta(C) = 4 \iff C : y + x^4 + y^4 = 0$

(iii)′ $\delta(C^c) = 3 \iff C : x^d + y^d = 1$

<u>注意 2.1</u>（三浦） $C$ が特異点をもつと上の定理は成立しない。例えば $y(x^2+y^2)^m + x^{m+1} + y^{m+1} + y = 0$ に対して $P=(0,0)$ はガロワ点であって，$G_P \cong D_{2m}$（位数 $2m$ の二面体群）。実際，生成元は

$$\begin{cases} (x, y) \longmapsto (e_m x, e_m y), & e_m = e^{\frac{2\pi i}{m}} \\ (x, y) \longmapsto \left( \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right) \end{cases}$$

特異点が無いときは $G_P$ の元は射影変換から惹きおこされたものであるが，特異点があるとこの例のように，そうはならない。§1の問題 (1)〜(5) を $V$ に特異点を許すとき考察することは興味深いことである。

上記では $P$ が $\mathfrak{S}_{d-1}$ と cyclic のときのみ調べたのであるが，その間の群について調べるのも面白いと思う。

例 2.2　(1) $F(d)$ ; $x^d+y^d=1$ に対して，$d-1$ が素数なら $\forall P \in F(d)$ に対して $G_P \cong \mathfrak{S}_{d-1}$.
しかし $F(5)$ については，$P$ が flex なら $G_P \cong D_8$ かつ $g(P)=16$. 更に $K/K_P$ の中間体 $K'$ で，$g(K')=2$，$t^2=1-4s^5$，$K'=k(t,s)$，となるものが存在する。$P$ が flex でなければ $G_P \cong \mathfrak{S}_4$，中間体はない。

(2) $d=4$ のとき [4] に詳細な結果がある。例えば $F(4)$ について，

(i) $P \in F(4)$ のとき，$G_P \cong \mathfrak{S}_3$ で

(イ) $P$ が flex なら $g(P)=9$　（12個の flex がある）

(ロ) $P$ が flex でなければ $g(P)=10$.

(ii) $P \notin F(4)$ のとき

(イ) ガロワ点は (100), (010), (001).

(ロ) 12個の点で $G_p \cong D_8$

(ハ) 上の15個以外の点で $G_p \cong \mathfrak{S}_4$

## §3. 曲面のとき.

まだ概略しか分っていない。$d=4$のときのみ詳しく分っている.

<u>定理 3.1</u>

(1) $d=4 \Longrightarrow \delta(S) = 0, 1, 2, 4$ or $8$

(2) $d \geqslant 5 \Longrightarrow \delta(S) = 0, 1,$ or $2$

(3) $d \geqslant 4 \Longrightarrow \delta(S^c) \leqq 4$

等号 $\Longleftrightarrow S : x^d + y^d + z^d = 1$

しかもガロワ点での群はすべて巡回群である。

さて, $d=4$のときについて:

$p \in S$がガロワ点なら $T_p \cap S$ ($T_p$は$p$での接平面)は4本の異なる直線 $l_i$ ($i=1,\cdots,4$) からなる。このとき $D = l_1 + l_2 + l_3$ とおくと, $D^2 = 0$, $(D, l_4) = 3$, $h^0(D) = 2$ となり $|D|$ により

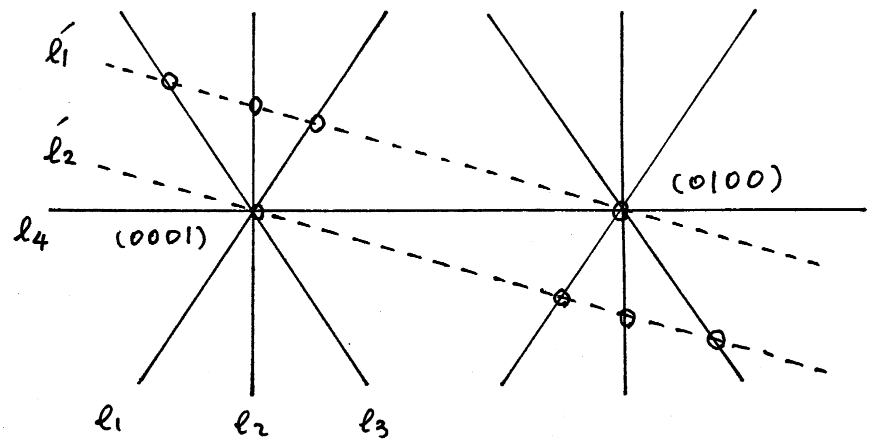
$$f = f_{|D|} : S \longrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{elliptic surface}$$

が得られる。$e(S) = 24$ と singular fiber を調べ

て $\delta(S) \leqq 8$ が得られる。

<u>定理 3.2</u>　$\delta(S) = 8$ となる必要十分条件は $S$ が次の曲面 $S_8$ に射影同値となることである：

$$S_8 : XY^3 + ZW^3 + X^4 + Z^4 = 0$$

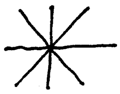



実線は $S_8$ 上の直線を表わし，○（マル）はガロワ点を表わす。破線は $S_8$ 上にはない直線を表わしている。

$S_8$ は Picard 数 20 の singular K3 surface で，この上に 64 本の直線がのっている（これは 4 次曲面の上に存在しうる最大数である）。

<u>注意 3.3</u>　(1) $C_4$ と $S_8$ の関係．

曲線と曲面の各々で $\delta$ の最大値を与えるものを $C_4$ と $S_8$ とする．$C_4 : y + x^4 + y^4 = 0$ である。

前頁の図の直線 $\ell_2'$ を含む平面で $S_8$ を切って得られる linear system を考える。4個のガロワ点が base point になり，それらを1回ずつ blow-up して fiber space $\tilde{f} : \tilde{S}_8 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が得られる。4個の singular fiber は $\mathbb{P}^1$ が  という形に交わっているもので，それ以外の fiber はすべて $C_4$ である。genus 3 のファイブレーション

(2) $\mathcal{L}(S_8)$ : 射影変換から惹き起された $S_8$ の自己同型群， $G(S_8)$ : 8個のガロワ点でのガロワ群の元の惹き起す自己同型により生成された群，とすると，

$$\#\mathcal{L}(S_8) = 2^7 \cdot 3^2, \quad \#G(S_8) = 2^5 \cdot 3^2$$

しかも $G(S_8)$ は $\mathcal{L}(S_8)$ の正規部分群（[2]）．

(3) （高橋 [7]），$d = 4$ のとき，$\forall P \in S$ に対して $\kappa(L_P) = 2$ （小平次元）である。

(4) $d \geqq 4, \ \delta \geqq 2 \Longrightarrow dr(S) = d - 2$ が成立する。

## §4. 高次元のとき.

§1 の情況の下に，次の座標系をとる.

(i) $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$

(ii) $X_1 = 0$ は $V$ に接しない.

(iii) $\{X_0 = 0\} \cap V$ の各既約成分に対して，$\exists Q \in W$, PQ を通る line は Q で V に接しない。

このとき $x_i = X_i / X_0$ $(i = 1, \cdots, n+1)$

$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = F(X_0, X_1, \cdots, X_{n+1}) / X_0^d$ とおき,

さらに, $x = x_1$, $x_i = t_{i-1} x$, とおく。

$$f^*(t_1, \cdots, t_n, x) = \begin{cases} f(x, xt_1, \cdots, xt_n)/x & \text{if } P \in V \\ f(x, xt_1, \cdots, xt_n) & \text{if } P \notin V \end{cases}$$

として, $\Delta(\pi_p)$ を $f^*$ の $x$ に関する判別式とする。

<u>定理 4.1</u> $\Delta(\pi_p)$ の各成分が既約なら $G_p \cong \mathfrak{S}_{d-1}$ [resp. $\mathfrak{S}_d$] if $P \in V$ [resp. $P \notin V$] である。

これの応用として次が得られる.

<u>定理 4.2</u> 次の条件をみたす因子 $D \subset \mathbb{P}^{n+1}$ が存在する.

(1) $P \in V \setminus D$ なら $G_p \cong \mathfrak{S}_{d-1}$.

(2) $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus (V \cup D)$ なら $G_p \cong \mathfrak{S}_d$

さて $P \in D$ のうちで一番特別なガロワ点のとき, $\sigma \in Gal(K/K_p)$ とする。$\sigma$ は $V$ の $H$ 上の双有理変

換 $\sigma^*$ を惹き起すが，実は，これは射影変換の制限であることがわかり，$V$ の自己同型になる。

1，2 次元のときと同じく次が成立する。

定理 4.3　$P$ がガロワ点なら，$G_P$ は巡回群である。

次にガロワ点の個数を調べる。

定理 4.4　$d \geqq 5$ のとき，$\delta(V) \leqq [\frac{n}{2}]+1$.
但し［ ］はガウス記号．等号は $V$ が次で定義される多様体と射影同値のときが必要十分．

$$X_{m+1} X_0^{d-1} + \cdots + X_{2m+1} X_m^{d-1} + G(X_{m+1}, \cdots, X_{n+1})$$

ここで，$G$ は $d$ 次の斉次式である。

定理 4.5　$d \geqq 4$ のとき　$\delta(V^c) \leqq n+2$.
等号は $V$ が Fermat variety

$$X_0^d + X_1^d + \cdots + X_{n+1}^d = 0$$

と射影同値のときが必要十分。

これによって Fermat variety の特長付けが得ろ

れた。すなわち，“超曲面が Fermat variety と射影同値である必要十分条件は，外(そと)のガロワ点の個数が最大値となることである”

終りに問いをあげておく．

(I) $P \in D$ でのガロワ群を求めよ。

(II) $V$ が特異点をもつとき，§1 の問題 (1) 〜 (5) を考察せよ。

## References


1. R. Cortini, Degree of irrationality of smooth surface of $\mathbb{P}^3$, to appear.
2. M. Kanazawa, T. Takahashi and H. Yoshihara, The group generated by automorphisms belonging to Galois points of the quartic surface, to appear.
3. K. Miura, Field theory for function fields of singular plane quartic curves, to appear in *Bull. Austral. Math. Soc.*
4. K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, *J. Algebra*, **226** (2000), 283–294.
5. ———, Field theory for the function field of the quintic Fermat curve, *Comm. Algebra*,**28** (2000), 1979–1988.
6. M. Namba, "Geometry of projective algebraic curves," Marcel Dekker, New York, Basel, 1984.
7. T. Takahashi, Minimal splitting surface determined by a projection of a smooth quartic surface. to appear.
8. H. Yoshihara, Degree of irrationality of an algebraic surface, *J. Algerara*, **167** (1994), 634–640.
9. ———, Field theory for function fields of plane curves, to appear.
10. ———, Galois points on quartic surfaces, to appear.