数理解析研究所講究録
1182巻 2001年 21-24

Hyperplane section principle of Lefschetz about P^1-bundle and blowing-down

九大・数理学　　佐藤栄一
Eiichi Sato

ここでは定義体は標数0の代数的閉体とする。

(#) N_1 を $n>3$ 次元非特異射影多様体、A を $n-1$ 次元非特異既約なアンプル因子とする。更に A は $n-1$ 次元非特異射影多様体 B の r 次元非特異射影多様体 C を中心とする blowing-up とする。

問い　条件 (#) のもとで、いつ " n 次元非特異多様体 N_2 があって、B は自然に N_2 の因子で、N_1 は N_2 の C を中心とする blowing-up である " か。

動機　　複素数体上の射影多様体とそのアンプル因子の間には位相的に（ホモロジー群、コホモロジー群)、複素解析的（正則微分形式）に、またピカール群等の間に非常に似通った関係がある。(Lefschetz Principle) 上の問いも同種の関係があり、アンプル因子の性質が全体の多様体の性質に遺伝する。ここでは束写像（定理B)、blowing-down（定理A）の性質に関して考察する。(たとえば80Fu参照)

この報告でのべる定理は以下の通り。$r=dimB-dimC>1$ とおく。

定理A (#) の条件のもとで $r=2$ とする。さらに $\kappa(N_1)\geq 0$ と仮定する。そのとき以下の条件 i), ii) のいずれかが充たされるとき、問いの結論（=問いの "　　"）が成立。

i) $dimN_1=5$。
ii) $H^0(C,K_C)\neq 0$

特に ii) では、$dimN_1\leq 5$

すでに知られた事実は以下のとおりである。
以下のそれぞれの場合、問いの結論が成立

1) (Fujita(80Fu)) $r>2$ かつ B が射影的。
2) (Fania, 86Fa) $r=2, dimN_1=4$ さらに $\kappa(N_1)\geq 0$。

予想　#の下で、$\kappa(N_1)\geq 0$ と仮定する。そのとき、問いの結論が成立。さらに $dimN_1\leq 5$。

注意　$\kappa(N_1)\geq 0$ は必要。ないとき、反例あり。84Fa 参照

2．定理Aを示すため以下が必要。

定理B M を高々孤立特異点を持つ局所完全交差射影多様体、A を非特異既約なアンプル因子で M の非特異部分に含まれているとする。さらに $\pi: A\to S$ を $\mathbf{P}^1$-bundle とする。そのとき以下の i),ii) のひとつが成り立てば、π は正則射 $\phi: M\to S$ に拡張され、$\mathbf{P}^2$-bundle, A は tauotological 直線束となる。ただし $S=\mathbf{P}^2$ かつ $A=\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^1$ は省く。

i) $dimM\leq 4$
ii) $H^0(S,K_S)\neq 0$

特に ii) では、$dimM\leq 4$ である。結局 M はスムーズになる。

注意 2.0 1) $H^0(S,K_S)\neq 0$ なら $H^0(M',\wedge^{dimM-2}\Omega_{M'})\neq 0$ である。(Lefschetz Theorem)
M' は M の特異点解消。
2) 上記 $dimM\leq 4$ について。定理 B の結論は次に用に言える。S 上の完全列
$0\to\mathcal{O}\to E\to F\to\quad 0$
ここで E,F は S 上階数 3，2 のベクトル束。$P(E)\cong M, P(F)\cong A$ であり、E はアンプル束。ここで Le Potier の定理に注意：V を n 次元非特異多様体上の階数 r のアンプル束 W に対し、もし $n>r$ なら、$H^1(S,W^v)=0$ である。

定理 B の証明の概略。
定理 B の内容は [00SaZh] の一般化にあたり、" 非特異 " を緩めた " 孤立特異点の存在 " の仮定の下で考えている。今回の証明は [00SaZh] と同じスタイルで行う。即ち
" あ）有理正規ゴーレンスタインな高々孤立特異点をもつ射影多様体のアジョイント束の理論 " [87Fu]　と
" い）ある正則微分形式（実は必ずしも M 全体の必要なし）が存在　＋　ある条件　$\Rightarrow$
多様体を覆う指定された有理曲線族から自然な（有理）写像が存在 "

を核とし、[00SaZh] の一部を変更、追加して証明を完成する。詳しくは準備中の論文 [Sa?] 参照。実際以下のように証明が進行する。

(2.1) M は高々有限個特異点を持つので、2 つの場合に分ける。
(B.1)　M は有理特異点を持つ。($dimM\leq 4$ で考えるので $\Rightarrow$ case 1))。
(B.2)　M' を M の特異点解消とすると、ある正整数 i に対し $H^i(M',\mathcal{O}_{M'})\neq 0$
（$dimM\leq 4$ なら、$i=1,2$ と取れる。何故なら M,A は uniruled, 及び $A\subset M_{reg}$ より $H^i(M',\mathcal{O}_{M'})=0(i=3,4)$）をえるので。($\Rightarrow$ case ii))

(B.1) は藤田 (87Fu) を一部一般化したものを使って結論を得る。定理 B の仮定の下 M は有理特異点のみを持つ事を直接は示す事ができないが、非有理特異点 (B.2) をもつとしても、やはり S 上 $\mathbf{P}^2$-bundle（かくして M は非特異）をしめす。結果として矛盾をえる。つまり (B.2) は起こらぬ。

(B,2) を先に扱う。次が成立。

命題 2.2（87Sa の定理 3.4 を参照）X を $n+r$ 次元非特異射影多様体とし次を仮定する。
1）X に有理曲線 C があり、正規化写像 $f:\mathbf{P}^1\to C$ に対し、$f^*T_X\cong\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus r}\oplus_{i=1}^n\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)(a_i>0)$。
2）1）の C を含む X の開集合 U と、ある自然数 m に対し $H^0(U,S^m(\wedge^n\Omega_U))\neq 0$。
そのとき, 支配的有理写像 $\phi:X--->Y$ があり、$dimX-dimY=r$. ϕ が定義されている X のザリスキー開集合を $V(\subset U)$ とするとき、支配的制限射 $\phi|_V:V\to Y$ に対し、$(v\in V)$ の一般点に対し $(\phi|_V)^{-1}(\phi|_V)(v)(v\in V)$ の閉包は次の X_v に一致する。X_v とは C の X 内での変位から構成されるパラメータ空間 T(X を張る）を 1 つ固定し v を通る T 内の軌跡である。

これより
命題 2.3　M を n 次元局所完全交差射影多様体、A を $n-1$ 次元非特異既約なアンプル因子とする。次を仮定する。

1）$\pi : A \to S$ を $\mathbf{P}^1$-bundle とする

2）1）のある π のファイバーを含む M のザリスキー開集合 U と、ある自然数 m に対し $H^0(U, S^m(\bigwedge^{n-2}\Omega_U)) \neq 0$。

3）$A \subset M_{reg}$。

そのとき, 定理 B の結論成立。

かくして case ii の結論得る。（注意 2.0）

次に (B.1) を考える。($dimM \leq 4 \Rightarrow$ case i)

S がファイバー構造を持つときは [FaSaSo87] [SaSp86] で示されているので、$\kappa(M) \geq 0$ と仮定できる。証明は [00SaZh] とほぼ同じだが、変更点は以下の通り。記号は同じ。

[00SaZh] の イ）case3,b2), ロ） case4),a1) ハ）case4) b4) の場合は変更の必要あり。それ以外はＯ K. ニ）ただし X は孤立特異点故、収縮写像で small contraction が (B.1) では新たにあらわれる可能性がある。

イ）[00SaZh] の case3,b2) は [87Fu] の Th3'b2) が使えぬ。Th3 b2) より、$M \to S$ が $\mathbf{P}^2$ を一般ファイバーとするファイバー空間である。さらに仮定より [FaSaSo87] の section.1 の定理の証明とほぼ同様な方法で $\mathbf{P}^2$ 束を示せる。

ロ）case4),a1)（[00SaZh] と同一記号使用）M は局所完全交差故 Weil 因子=Cartier 因子に注意。Step3 (317p) と同様 $A \cap E$ は $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ がわかる。E はコーエンマコーレー、及び特異点高々有限個より、正規多様体、更に E の Neron-Severi 群の階数 2 以上より、E は $\mathbf{P}^2$ 束（step4）。かくして $SingM \cap E = \emptyset$。M はこの場合考えている双有理型収縮写像 $f : M \to W$ が E の自然な blowing-down を与えている。かつ $SingW \cap f(A) = \emptyset$ となることに注意。

かくして W は局所完全交差 $f(A)$ は非特異アンプル因子で $f(A) \subset W_{reg}$ 更に $f(A)$ は $\mathbf{P}^1$-bundle $\pi : A \to S$ と可換な $\mathbf{P}^1$-bundle $\pi' : f(A) \to S'$ を持つ。Neron-Severi 数に関し $\rho(S) = \rho(S') + 1$ になる。

ハ）case4,b4) は仮定より $\kappa(S) \geq 0$、つまりある自然数 m に対し $H^0(S, K_S^{\otimes m}) \neq 0$。それ故 $H^0(A, S^m(\bigwedge^2 \Omega_A)) \neq 0$. 一方 $\mathbf{P}^1$-ファイバー空間 $M \to W$ は双有理正則写像 $A \to W$ を導く。故に $H^0(M, S^m(\bigwedge^2 \Omega_M)) \neq 0$。命題 2.3 より $\mathbf{P}^2$-束 $M \to S$ をえる。

ニ）small contraction の場合は端曲線の定義に戻り、ニ）はおこらぬことが示せる。

(B.1) は値 $\rho(S)$ に関する帰納法より（ロ）をそれにからませて）イ）ハ）より示せる。

3．定理 A の証明の概略。

(3.1) E を B の C を中心とする blowing-up での例外集合（C 上 $\mathbf{P}^1$- bundle), E_c をそのファイバー（$= \mathbf{P}^1$）とする。いま E_c の多様体 N_1 での変位を調べる。

$0 \to N_{E_c/E} \to N_{E_c/A} \to N_{E/A|E_c} \to 0$ と、$N_{E_c/E} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus a}$ $N_{E/A|E_c} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ ($a = dimC$) より $N_{E_c/A} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus a} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$ をえる。一方

$0 \to N_{E_c/A} \to N_{E_c/N_1} \to N_{A/N_1|E_c} \to 0$ と、仮定 $\kappa(N_1) \geq 0$ より、$b = E_c.A (> 0)$ とすると $N_{E_c/M} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}^{\oplus a} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b)$。

かくして E_c の M での変位は余次元１のスキームで、次の性質をもつ N_1 内の既約部分多様体 D が取れる。(この議論はほぼ 84Fa でなされている)

(3.2) $D \cap A = E$ で、A はアンプル因子故、E は D 内でアンプル因子になる。かくして、D は特異点は高々有限個。

よって E は C 上 $\mathbf{P}^1$- bundle に注意すると、この束写像が D に拡張されるかが、次の問題になる。(80Fu の５章を見よ。) 結果として定理Ｂより定理Ａをえる。

注意　定理Ａの結果で $dimM \leq 4$ なる制限が出るのは　$\pi : A \to S$ が $\mathbf{P}^1$-bundle なる故でこれを一般ファイバーが $\mathbf{P}^1$ のファイバー空間とすれば、制限 $dimM \leq 4$ はなくなる。さらに blowing-up や $\mathbf{P}^1$-bundle は extramal 収縮写像より次の問いに行き着く。

問い　　M を非特異射影多様体、A を非特異既約なアンプル因子とする。

1．A と M のそれぞれの例外端曲線のあいだの関係は何か。

2．A の例外端曲線はいつ M のそれになるか。(予想のある意味での一般化)

Reference

[Ba80] L.Badescu, On ample divisor II, Proceedings of the "Week of Algebraic Geometry", Bucarest 1980, Teubner, Leipnig (1981),12-32.

[Fa84] L.Fania, Extension of modifications of ample divisors on fourfolds, J. Math. Soc. Japan 36(1984), 107-119.

[Fa86] L.Fania, Extension of modifications of ample divisors on fourfolds II, J. Math. Soc. Japan 38(1986), 285-294.

[FaSaSo87] L.Fania, E.Sato, A.Sommese On the structure of 4 folds with a hyperplane section which is a P^1-bundle over a surface that fibers over a curve, Nagoya. Math J., Vol. 108 (1987), 1-14.

[FaSo87] L.Fania, A.Sommese, Varieties whose hyperplane sections are $P^k_{\mathbf{C}}$-bundles, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Ser. (4) 15 (1988), 193-218.

[Fu80] T.Fujita. On the hyperplane section principle of Lefschetz, J. Math. Soc. Japan 32(1980), 153-169.

[Fu87] T.Fujita, On Polariezed Manifolds whose adjoint bundles are not semipositve, in Algebraic Geometry, Sendai 1985, Adv. Stud.Pure Math. 10(1987), 167-178.

[SaSp86] E.Sato, H.Spindler, On the structure of 4 folds with a hyperplane section which is a P^1-bundle over a ruled surface, Springer Lecture Note, 1194(1986), 145-149.

[SaSp90] E.Sato, H.Spindler, The existence of varieties whose hyperplane section is P^r-bundle, J.Math. Kyoto Univ. 30-3(1990), 543-557,

[Sa87] E.Sato, A variety which contains a P^1-fiber space as an ample divisor, Algebraic Geometry and Commutative algebra in honor of Masayoshi Nagata. (1987), 665-691.

[SaZh00] E.Sato Zhao Yicai,Smooth 4-folds which contain a $\mathbf{P}^1$-bundle as an ample divisor, manuscripta math. 101,313-323(2000)

[Sa?] E.Sato, Hyperplane section principle of Lefschetz about $\mathbf{P}^1$-bundle and blowing-down, (in preparation)