

## 楕円ファイバー空間の構造

京都大学数理解析研究所

中山 昇 (Noboru Nakayama)

楕円曲線を一般ファイバーとする複素解析的多様体の中の固有全射  $f: X \rightarrow S$  を楕円ファイバー空間 (elliptic fibration) と呼ぶ. 与えられた底空間  $S$  に対して, その上の楕円ファイバー空間はいかなるデータによって構成されるのか?これがこの話のテーマである.  $S$  が曲線の場合は楕円曲面論によって答えがわかっている (cf. [1], [2]). そのデータは周期写像 (解析的不変量), モノドロミー表現 (位相的不変量), コホモロジー群  $H^1(S, \mathcal{G}_{H/S})$  の元, およびいくつかの対数変換である. ただし  $\mathcal{G}_{H/S}$  は, 周期写像とモノドロミー表現から決まる極小基本楕円曲面 (minimal basic elliptic surface) の正則切断 (holomorphic section) の芽 (germ) のなす層である. 周期写像とモノドロミー表現のデータを与えることはある種のホッジ構造の変動 (variation of Hodge structure) を与えることに等しい. このホッジ構造から基本楕円ファイバー空間 (basic elliptic fibration) を構成することは  $S$  が一般次元でもできるが, 一般に極小ではない.  $S$  上の双有理同値類 (bimeromorphic equivalence class) として唯ひとつ定まるのみである. しかし, 層  $\mathcal{G}_{H/S}$  は基本楕円ファイバー空間の有理切断 (meromorphic section) の芽のなす層として定義されるのだが, 対数変換に関わる重複ファイバーの振る舞いなどがとらえられないので,  $H^1(S, \mathcal{G}_{H/S})$  がそれほど意味を持たなくなる. 論文 [6] は,  $S$  が単位多重円盤で  $X$  が座標超平面のいくつかの和  $D$  の外側で滑らか (smooth) かつ  $X$  が  $S$  上射影的 (projective) なものについての構造を解明した:  $S$  上のある有限ガロア被覆空間  $S'$  で  $D$  の外側で不分岐なものに  $X$  を引き戻すと,  $S'$  上の基本楕円ファイバー空間と双有理同値になる.  $X$  の構造はガロア群の有理作用, いいかえればある種のガロアコホモロジーの元で記述できる. 今回の話は, それを  $S$  が単に非特異で  $D$  が正規交差因子な場合に拡張するのが目的である. なお, この話自体は4年前のプレプリント [7] に書かれていることとほぼ同じだが, その改訂版をつくる作業の中でいくつかの議論が簡略化されたり一般化されている.

### 1. $\partial$ エタール位相

複素解析空間  $X$  とその中の疎 (nowhere dense) な解析的閉部分集合  $B$  の対  $[X, B]$  を対象とし, 射  $f: [X, B] \rightarrow [Y, D]$  は  $f^{-1}D \subset B$  なる正則写像  $X \rightarrow Y$  として定義される圏 (category) に  $\partial$ エタール (étale) 射が引き起こすグロタンディーク位相を入れようと

考えた. ただし  $f$  が  $\partial$ エタールというのは  $f^{-1}D = B$ ,  $f$  は離散ファイバーしか持たず,  $X \setminus B \rightarrow Y \setminus D$  がエタール射ということである. ところがこれは良い定義ではなく, この圏を  $\partial$ 同型射で割って得られる商圏を考えることにした. ここで  $f$  が  $\partial$ 同型射とは,  $\partial$ エタール射であって,  $X \setminus B \rightarrow Y \setminus D$  が同型なことである. このとき  $[X, B]$  の定める対象を  $(X, B)$  と書き, これを (複素解析的)  $\partial$ 空間と呼んだ. この  $\partial$ 空間の圏に  $\partial$ エタール位相を入れて考えるのである. ただし,  $X$  自身が正規空間の場合は  $[X, B]$  を考えるのと本質的に差はない. 与えられた  $X, B$  に対し,  $\partial$ 空間  $\underline{X} = (X, B)$  から  $(X, \emptyset)$  への自然な射を  $\varepsilon_X$  と書く. また  $(X, \emptyset)$  は  $X$  と同一視できることに注意する.  $\partial$ エタール位相のもとでの層係数コホモロジー論は通常のものと同じように議論できる. 特にチェックのコホモロジーと右導来関手としてのコホモロジーは一致する. このコホモロジーは大ざっぱにいうと, 通常解析空間の場合のコホモロジーに局所的にテイトのガロアコホモロジーを合わせたようなものである.

## 2. 基本楕円ファイバー空間

以下, 非特異連結複素解析空間  $S$  とその上の正規交差因子  $D$  を固定する. また  $S^* = S \setminus D$  と書く. 楕円ファイバー空間  $f: X \rightarrow S^*$  が滑らかならば, 局所系  $H := R^1 f_* \mathbb{Z}_X$  は自然に重み 1 のホッジ構造の変動の構造を持ち, カップ積が導く  $\mathbb{Z}$  係数の偏極も持つ. 逆に  $S^*$  上に与えられた  $\mathbb{Z}$  係数偏極の付いた階数 2 重み 1 のホッジ構造の変動  $H$  に対して, 周期写像とモノドロミー表現が得られるのと同時に, 滑らかな楕円ファイバー空間  $p^*: B(H)^* \rightarrow S^*$  で正則な切断  $S^* \rightarrow B(H)^*$  を持ち  $H$  と同型なホッジ構造の変動を誘導するものが,  $S^*$  上の同型を除き唯一つつ存在する. この  $p^*$  を  $H$  に付随する「滑らかな基本楕円ファイバー空間」という. この  $p^*$  を  $S$  に延長することができる (cf. [5]).

**定理.** 楕円ファイバー空間  $p: B \rightarrow S$  とその有理切断  $S \cdots \rightarrow B$  で以下の条件を持たすものが  $S$  上の双有理同値関係を除き唯一つつ存在する:  $p$  の  $S^*$  への制限は  $p^*$  とそれぞれの切断も込めて  $S^*$  上同型.

この  $p: B \rightarrow S$  を  $H$  に付随する「基本楕円ファイバー空間」と呼び,  $B = B(H)$  と書いたりする. この定理から, 楕円ファイバー空間  $f: X \rightarrow S$  が以下の二条件を満たせば  $f$  は基本楕円ファイバー空間と双有理同値になることがわかる:

- (1) ある滑らかな楕円ファイバー空間  $Y \rightarrow S^*$  があって,  $f$  の  $S^*$  への制限はそれと  $S^*$  上双有理同値;
- (2)  $f$  は  $S$  上に有理切断を持つ.

$D$  が非特異のときは,  $B(H)$  として非特異かつ  $S$  上極小モデルとなるものが存在し,  $S$  上の同型を除き唯一とつに定まる. このとき  $B(H)$  は  $S$  上平坦 (flat) である. また, 構造射  $B(H) \rightarrow S$  がそこで滑らかになる点全体のなす開集合  $B(H)^\sharp$  は, 与えられた切断を  $0$  とする  $S$  上の群多様体の構造を持つ. 代数的な場合,  $B(H)^\sharp$  はその生成ファイバーのネロンモデルに他ならない. 基本ファイバー空間  $B(H) \rightarrow S$  の有理切断の芽のなす層  $\mathfrak{G}_{H/S}$  は自然にアーベル群の層になる.

### 3. 分類問題

底空間  $S$  正規交差因子  $D$  と同様に  $S^*$  上の  $\mathbb{Z}$  係数偏極の付いた階数  $2$  重み  $1$  のホッジ構造の変動  $H$  も固定する. 「印付き楕円ファイバー空間」とは, 楕円ファイバー空間  $f: X \rightarrow S$  で  $f$  の  $S^*$  への制限が, ある  $S^*$  上定義された滑らかな楕円ファイバー空間と  $S^*$  上双有理同値になるものと, 引き起こされたホッジ構造の変動  $H(f) = R^1 f_* \mathbb{Z}_X|_{S^*}$  と  $H$  の間の同型射  $\phi: H(f) \simeq H$  の対  $(f: X \rightarrow S, \phi: H(f) \simeq H)$  のことである. 楕円ファイバー空間  $f: X \rightarrow S$  が BP とは,  $f$  が射影的楕円ファイバー空間と  $S$  上双有理同値なことをいう. また, それを LBP とは  $f$  が  $S$  上局所的に BP なことをいう. 印付き楕円ファイバー空間の双有理同値類で LBP なもの全体を  $\mathcal{E}(S, D, H)$  と書き, BP なもの全体を  $\mathcal{E}^{\text{proj}}(S, D, H)$  と書く. また  $\mathcal{E}(S, D, H)$  の部分集合として  $\mathcal{E}_0(S, D, H)$  を,  $f$  が  $S$  上局所的に有理切断をもつ印付き楕円ファイバー空間  $(f, \phi)$  全体と定義する. 基本ファイバー空間  $p: B(H) \rightarrow S$  は印付けに依らずある特別な元として, これらの集合に含まれている. 前節の議論から次の結果を得る.

補題.  $D$  が非特異な場合,  $1$  対  $1$  対応  $\mathcal{E}_0(S, D, H) \leftrightarrow H^1(S, \mathfrak{G}_{H/S})$  がある. ここで基本ファイバー空間は  $0$  に対応し, 部分集合  $\mathcal{E}_0(S, D, H) \cap \mathcal{E}^{\text{proj}}(S, D, H)$  は捩れ部分 (torsion part)  $H^1(S, \mathfrak{G}_{H/S})_{\text{tor}}$  に一致する.

重複ファイバーを持つ場合は, 局所的にも有理切断を持たない. このような楕円ファイバー空間を扱うために,  $\partial$  空間  $\underline{S} = (S, D)$  とその上の  $\partial$  エタールコホモロジーを考えるのである. 開集合  $S^\circ$  を  $S \setminus \text{Sing } D$  として定義し,  $\partial$  開集合  $\underline{S}^\circ := (S^\circ, D \cap S^\circ)$ ,  $S^* = (S^*, \emptyset)$  などの開埋入をそれぞれ,

$$\begin{aligned} j^*: S^* &\hookrightarrow S^\circ, & j^\circ: S^\circ &\hookrightarrow S, & j = j^\circ \circ j^*: S^* &\hookrightarrow S, \\ \underline{j}^*: S^* &\hookrightarrow \underline{S}^\circ, & \underline{j}^\circ: \underline{S}^\circ &\hookrightarrow \underline{S}, & \underline{j} = \underline{j}^\circ \circ \underline{j}^*: S^* &\hookrightarrow \underline{S}, \end{aligned}$$

と書く. ホッジ構造の変動  $H$  は局所モノドロミーがすべて冪単 (unipotent) ならば,  $H \otimes \mathcal{O}_{S^*}$  の  $S$  への標準延長 (canonical extension) が定義される. 局所モノドロミーは何乗かすると冪単なので,  $\partial$  空間  $\underline{S}$  上にも標準延長  $\mathcal{H}_{\underline{S}}$  が  $\partial$  エタール位相の意味で局所自由  $\mathcal{O}_{\underline{S}}$  加群として定義でき, ホッジフィルター  $F^1(H \otimes \mathcal{O}_{S^*})$  も  $\mathcal{H}_{\underline{S}}$  の部分ベクトル束  $F^1(\mathcal{H}_{\underline{S}})$  に延びる. 局所自由  $\mathcal{O}_{\underline{S}}$  加群  $\mathcal{H}_{\underline{S}} := \varepsilon_{S^*} \mathcal{H}_{\underline{S}}$  は下標準延長 (lower canonical extension) である. 可逆層  $\mathcal{L}_{H/\underline{S}}$  を  $\mathcal{H}_{\underline{S}}$  の  $\text{Gr}_F^0$  として定義する. 層  $\mathcal{L}_{H/S} := \varepsilon_{S^*} \mathcal{L}_{H/\underline{S}}$  は  $\mathcal{H}_S$  の  $\text{Gr}_F^0$  と同型な可逆層である. また基本楕円ファイバー空間  $p: B \rightarrow S$  に対しても,  $\underline{B} := (B, p^{-1}D)$  とおき,  $p: \underline{B} \rightarrow \underline{S}$  をその  $\partial$  空間の射とする. また  $B$  は非特異で,  $p^{-1}D$  は正規交差因子と仮定する. すると, 同型射  $R^1 p_* \mathcal{Z}_{\underline{B}} \simeq j_* H$  と  $R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}} \simeq \mathcal{L}_{H/\underline{S}}$  で, 標準的埋め込み射  $j_* H \rightarrow \mathcal{L}_{H/\underline{S}}$  と標準射  $R^1 p_* \mathcal{Z}_{\underline{B}} \rightarrow R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}}$  に両立するものがある.  $\underline{B}$  の可逆正則関数の芽のなす層を  $\mathcal{O}_{\underline{B}}^*$  と書くと  $R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}}^*$  は  $\underline{S}$  上相対的な  $\partial$  エタール位相におけるピカル群の層である. この部分層  $\mathcal{V}_{\underline{B}}$  として,  $\text{Supp } E \subset p^{-1}D$  となる  $\mathbb{Q}$  因子  $E$  から定まる可逆層  $\mathcal{O}_{\underline{B}}(E)$  の芽全体からなるものを考える. すると  $R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}}^*/\mathcal{V}_{\underline{B}}$  は  $B \rightarrow S$  の双有理モデルの取り方によらない. また  $p$  の有理切断の芽のなす層を  $\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$  と書く.  $\varepsilon_{S^*} \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} \simeq \mathfrak{S}_{H/S}$  である. 有理切断  $s: S \dashrightarrow B$  と 0 切断  $0: S \rightarrow B$  に対してそれぞれの像を  $\Sigma_s, \Sigma_0$  とおき可逆層  $\mathcal{O}_{\underline{B}}(\Sigma_s - \Sigma_0)$  を対応させる. これから層の間の単射

$$\mathfrak{S}_{H/\underline{S}} \rightarrow R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}}^*/\mathcal{V}_{\underline{B}}$$

が定まりこの余核 (cokernel) は  $\mathcal{Z}_{\underline{S}}$  に同型となる. 余核への射は本質的に可逆層に対して, それを一般ファイバーに制限したときの次数を与えることに他ならない. こうして完

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & \mathcal{Z}_{\underline{S}} & = & \mathcal{Z}_{\underline{S}} & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \longrightarrow & R^1 p_* \mathcal{Z}_{\underline{B}} & \longrightarrow & R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}} & \longrightarrow & R^1 p_* \mathcal{O}_{\underline{B}}^*/\mathcal{V}_{\underline{B}} & \longrightarrow & R^2 p_* \mathcal{Z}_{\underline{B}}/\mathcal{V}_{\underline{B}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & j_* H & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{T}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

図 1

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & \mathbb{Z}_S & \equiv & \mathbb{Z}_S & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \longrightarrow & R^1 \underline{f}_* \mathbb{Z}_X & \longrightarrow & R^1 \underline{f}_* \mathcal{O}_X & \longrightarrow & R^1 \underline{f}_* \mathcal{O}_X^* / \mathcal{V}_X & \longrightarrow & R^2 \underline{f}_* \mathbb{Z}_X / \mathcal{V}_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \underline{j}_* H & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

図 2

全系列の可換図式 図 1 を得る. ここで  $\mathfrak{X}_{H/\underline{S}}$  は

$$R^1 \underline{j}_* H \rightarrow \underline{j}^\circ \left( R^1 \underline{j}_* H / (R^1 \underline{j}_* H)_{\text{tor}} \right)$$

の核 (kernel) と同型である. ただし,  $(R^1 \underline{j}_* H)_{\text{tor}}$  はアーベル群としての捩れ部分を表す.

次に印付き楕円ファイバー空間  $(f: X \rightarrow S, \phi)$  で LBP なものを考える. また  $X$  は非特異,  $f^{-1}D$  は正規交差因子となるようにブローアップによってモデルを取り換えておく.  $\partial$ 空間  $\underline{X} := (X, f^{-1}D)$  とその射  $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{S}$  に対して同様の考察をする.  $\underline{f}$  は LBP なので  $\partial$ エタール位相の意味で局所的に有理切断を持つことは [6] で示されている. (それを使わなくても  $\partial$ エタール層の議論を組み合わせても導くことも可能) したがって, 図 1 の類似は  $\underline{S}$  上局所的に存在する. 特に印付け  $\phi$  から定まる標準射  $R^1 \underline{f}_* \mathbb{Z}_X \rightarrow \underline{j}_* H$  と  $R^1 \underline{f}_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}_{H/\underline{S}}$  は同型になる. また  $\mathfrak{G}_{H/\underline{S}} \rightarrow R^1 \underline{f}_* \mathcal{O}_X^* / \mathcal{V}_X$  がうまく定義される. (楕円曲線の次数 0 の可逆層は平行移動で不変という性質に基づく) したがって, 短完全系列

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{G}_{H/\underline{S}} \rightarrow R^1 \underline{f}_* \mathcal{O}_X^* / \mathcal{V}_X \rightarrow \mathbb{Z}_S \rightarrow 0$$

を含む, 完全系列の可換図式 図 2 を得る. そこで  $(f, \phi)$  に完全系列 (1) による拡大類を対応させることで写像

$$\mathcal{E}(S, D, H) \rightarrow H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})$$

が定義される.

定理. この射は単射. 部分集合  $\mathcal{E}^{\text{proj}}(S, D, H)$  の像は捩れ部分  $H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}})_{\text{tor}}$  に一致する.  $H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}})$  の元で  $H^1(\underline{S}, \mathcal{F}_{H/\underline{S}})$  の捩れ部分  $H^1(\underline{S}, \mathcal{F}_{H/\underline{S}})_{\text{tor}}$  に移されるものは  $\mathcal{E}(S, D, H)$  の像に含まれる.

したがって, コホモロジー群  $H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}})$  の計算方法が問題になる. 埋め込み射  $\mathcal{F}_{H/\underline{S}} \hookrightarrow R^1 j_* H$  の余核を  $\Omega_{H/\underline{S}}$  と書く. いいかえれば,

$$R^1 j_* H \rightarrow j_*^\circ(R^1 j_*^\star H) \otimes \mathbb{Q}$$

の像である. そして, これは  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間の層になる. 同様に  $\Omega_{H/S}$  を

$$R^1 j_* H \rightarrow j_*^\circ(R^1 j_*^\star H) \otimes \mathbb{Q}$$

の像と定義すれば,  $\Omega_{H/S}$  の各茎 (stalk) は捩れない有限生成アーベル群であって, 同型  $\varepsilon_{S*} \Omega_{H/\underline{S}} \simeq \Omega_{H/S} \otimes \mathbb{Q}$  がある.

補題. 図 1 から次の三角図式 (distinguished triangle) が導かれる.

$$(2) \quad \cdots \xrightarrow{+1} \tau_{\leq 1} R j_* H \rightarrow \mathcal{L}_{H/\underline{S}} \oplus \Omega_{H/\underline{S}}[-1] \rightarrow \mathcal{G}_{H/\underline{S}} \xrightarrow{+1} \tau_{\leq 1} R j_* H[1] \rightarrow \cdots$$

ここで,  $R\varepsilon_{S*}$  を施せば, 短完全系列

$$0 \rightarrow \Omega_{H/S} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow R^1 \varepsilon_{S*} \mathcal{G}_{H/\underline{S}} \rightarrow (R^2 j_* H)_{\text{tor}} \rightarrow 0$$

が導かれ, 点  $s \in S$  での茎を考えることで, 同型

$$(R^1 \varepsilon_{S*} \mathcal{G}_{H/\underline{S}})_s \simeq ((\Omega_{H/S})_s \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus ((R^2 j_* H)_s)_{\text{tor}}$$

を得る. また,  $(R^1 \varepsilon_{S*} \mathcal{G}_{H/\underline{S}})_s$  は  $S$  の近傍上定義される印付き射影的楕円ファイバー空間の双有理同値類全体のなす集合と同一視できるが, この計算結果は [6] と一致している.  $\Omega_{H/S} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  は重複ファイバーの記述に関わる層である. 三角図式 (2) の大域切断を考えると完全系列

$$\begin{aligned} H^0(S, \mathcal{G}_{H/S}) &\rightarrow H^1(S^*, H) \rightarrow H^1(S, \mathcal{L}_{H/S}) \oplus H^0(S, \Omega_{H/S} \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}}) \rightarrow H^2(S^*, H) \rightarrow H^0(S, R^2 j_* H \otimes \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

が得られる.  $H^0(S, \mathcal{G}_{H/S}) \rightarrow H^1(S^*, H)$  の余核を  $C$  とすれば

$$0 \rightarrow C \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}})_{\text{tor}} \rightarrow H^2(S^*, H)_{\text{tor}} \rightarrow 0$$

という短完全系列を得る. また  $R^1 j_* \mathcal{G}_{H/S^\circ}$  が  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間の層になることから,

$$H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}})_{\text{tor}} \simeq H^1(S^\circ, \mathcal{G}_{H/S^\circ})_{\text{tor}}$$

という同型もある.

#### 4. 応用

上野健爾氏がセミナー中に出されたという次の問題を考える.

問題. 2次元単位円板

$$\Delta^2 = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |t_1| < 1, |t_2| < 1\}$$

から原点  $0 = (0, 0)$  を抜いた集合  $\Delta^2 \setminus \{0\}$  上で定義された, 滑らかな楕円ファイバー空間で大域切断を持たないものが,  $\Delta^2$  上の楕円ファイバー空間に延長できるか?

$\Delta^2 \setminus \{0\}$  上の滑らかな印付き楕円ファイバー空間全体は,  $\Delta^2$  上で定義される周期写像を固定すれば,  $H^1(\Delta^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O})$  に一致する. これは無限次元の  $\mathbb{C}$  ベクトル空間なので, 特に捩れ元はない. つまり  $\Delta^2$  に延長できてもそれは射影的ファイバー空間にはならない. 延長が存在したとしよう. それをブローアップ  $\mu: S \rightarrow \Delta^2$  によって平坦化してえられる楕円ファイバー空間は,  $S$  上 LBP なので,  $\mathcal{E}(S, D, H)$  の元を定める. ここで  $D = \mu^{-1}\{0\}$  は正規因子と仮定する. 計算すると制限写像  $H^1(\underline{S}, \mathcal{G}_{H/\underline{S}}) \rightarrow H^1(S^*, \mathcal{G}_{H/S^*})$  がゼロになることがわかる. つまり, この問題の答えは NO である. この議論を一般化して次の定理を得る.

定理.  $d$ 次元単位円板  $\Delta^d$  の座標  $t_1, t_2, \dots, t_d$  に対し,  $D_i = \{t_i = 0\}$  と超平面を書き, 最初の  $l$  個の和  $D_1 + D_2 + \dots + D_l$  を  $D$  とする. 余次元 2 以上の解析的閉部分集合  $Z \subset \Delta^d$  で  $D$  に含まれるものを考える. このとき  $U := \Delta^d \setminus Z$  上で定義された LBP 楕円ファイバー空間  $X \rightarrow U$  で  $D$  の外で滑らかなものに対し, 以下の二条件は互いに同値:

- (1)  $X \rightarrow U$  は  $\Delta^d$  上の楕円ファイバー空間に延びる;
- (2)  $X \rightarrow U$  は BP.

ただし BP な  $X \rightarrow U$  の  $\Delta^d$  への延長は必ずしも BP ではない.

これまでは射影的もしくは局所射影的なファイバー空間を中心に調べたのだが, ケーラー射について調べることもできる. 詳細は略すが, 以下の定理が得られる.

定理. 楕円ファイバー空間  $f: X \rightarrow S$  で  $X$  がコンパクト複素多様体,  $S$  が  $d$  次元コンパクトケーラー多様体なものを考える. このとき  $X$  がコンパクトケーラー多様体と双有理同値になる為の必要十分条件は, 引き戻し写像

$$\mathbb{C} \simeq H^{2d}(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^{2d}(X, \mathbb{C})$$

が単射ということである.

これは, 「コンパクト楕円曲面がケーラーであるための必要十分条件は第一ベッチ数  $b_1$  が偶数ということである」という宮岡氏の結果 [3], [4] の一般化になっている.

#### 文献

- [1] K. Kodaira, On complex analytic surfaces II, III, *Annals of Math.* **77** (1963), 563–626, *ibid.* **78** (1963), 1–40.
- [2] ———, On the structure of compact complex analytic surfaces, I, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 751–798.
- [3] Y. Miyaoka, Extension theorem for Kähler metrics, *Proc. Japan Acad.* **50** (1974), 407–410.
- [4] ———, Kähler metrics on elliptic surfaces, *Proc. Japan Acad.* **50** (1974), 533–536.
- [5] N. Nakayama, On Weierstrass models, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata*, Kinokuniya (1987), pp. 405–431.
- [6] ———, Local structure of an elliptic fibration, preprint, (1991) Univ. Tokyo; Revised version, preprint (1999), RIMS Kyoto Univ.
- [7] ———, Global structure of an elliptic fibration, preprint RIMS-1072 (1996).

京都大学数理解析研究所, 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町

*E-mail address:* nakayama@kurims.kyoto-u.ac.jp