

# A realization of generalized Verma modules on spaces of polynomial functions

WACHI Akihito (和地輝仁)

Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University,  
Sapporo 060-0810, Japan

## 1 Introduction

一般バーマ加群 (generalized Verma module) はリー代数の加群であって、放物型部分代数の有限次元既約加群から誘導されたものである。特にボレル部分代数の指標から誘導されたものはバーマ加群であるが、その既約条件や2つのバーマ加群間の準同型の存在条件などの基本的な性質はよく知られている。しかし一般バーマ加群ではそういった性質がよく知られていない場合も多く、それを解明するために一般バーマ加群の簡明な実現を構成しようというのがこの論説の目的である。この実現は多項式関数の空間に構成され、作用は具体的に書き下すことが出来て多項式係数微分作用素で与えられるため簡明であるといえ、その構成は標語的には、群の誘導表現を微分してフーリエ変換あるいは双対をとると自然なものである。実際エルミート対称型 (つまり放物型部分代数が可換な巾零根基を持つ) の場合には、この実現により得られる作用の具体的な形を用いて既約性やユニタリ化可能性などの性質を  $\mathfrak{h}$  関数と直接結び付けることができている ([5])。この論説ではエルミート対称型ではないある場合について、実現を用いて既約条件を導く例を与える。

さて、これまでに知られている一般バーマ加群の実現についても少し触れる。まずエルミート対称型の場合は良く知られている (e.g. [2])。この論説の実現はこの実現を一般の場合に一般化したものである。また、これの双対加群 (この論説の記号では  $\psi_\pi$ ) もよく扱われている (e.g. [6], [4])。また、これらとは別のタイプの実現として  $G/P$  上の  $B$ -軌道の局所コホモロジーを用いたものがあり、例えば [1] で扱われている。

## 2 Main result

この節では、まず諸々の記号の定義の後一般バーマ加群の定義を与え、主定理 (Theorem 2.7) を述べる。

$G$  を複素リー群、 $\mathfrak{g}$  をそのリー代数、 $\mathfrak{h}$  をカルタン部分代数、 $\Delta$  をルートシステム、 $\Delta^+$  を正ルートの集合とする。  $\mathfrak{p}$  を  $\mathfrak{g}$  の放物型部分代数で  $\mathfrak{h}$  とすべての正ルート空間を含むもの、 $\mathfrak{l}$ ,  $\mathfrak{n}^+$  をそれぞれ  $\mathfrak{p}$  のレビ部分代数、巾零根基とする。  $\Delta_L, \Delta_N^+$  をそれぞれ  $\mathfrak{l}, \mathfrak{n}^+$  に現われるルートの集合とし、  $\Delta_N^- = -\Delta_N^+$ ,  $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Delta_N^-} \mathfrak{g}^\alpha$  と定める ( $\mathfrak{g}^\alpha$  はルート空間)。最後に  $\mathfrak{g}$  の不変双1次形式  $(\cdot, \cdot)$  を固定する。これはキリング形式の定数倍となる。

## 2.1 Generalized Verma module

**Definition 2.1**  $\mathfrak{p}$  の有限次元既約表現  $(\mathfrak{p}, \pi, V_\pi)$  に対して,

$$M(\pi) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} V_\pi,$$

と定める. ここで  $U(\mathfrak{g})$  は  $\mathfrak{g}$  の普遍包絡環を表す.

$M(\pi)$  は一般バーマ加群 (*generalized Verma module*) と呼ばれる. ベクトル空間として  $M(\pi)$  と  $U(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$  が同型なのは明らかである.

特に  $\pi$  が 1 次元表現であるとき  $M(\pi)$  は  $U(\mathfrak{n}^-)$  に線形同型であり,  $M(\pi)$  はスカラー型一般バーマ加群 (*scalar generalized Verma module*) と呼ばれる.  $\square$

## 2.2 Differentiation of induced representations

ここでは  $U(\mathfrak{g})$  の表現  $\psi_\pi$  を  $V_\pi$ -値多項式関数の空間  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$  上に定義する. これは  $P$  の表現  $\pi$  を  $G$  に誘導して得られる表現を微分したものに相当する.

多項式関数  $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$  に対して,  $G$  の単位元の近傍上の  $V_\pi$ -値関数  $\tilde{f}$  を次で定める.

$$\tilde{f}(\exp B \exp C) = \exp \pi(-C) \cdot f(B) \quad (B \in \mathfrak{n}^-, C \in \mathfrak{p}).$$

ここで,  $\exp \pi(-C) \in \text{Aut}(V_\pi)$  は  $\dim V_\pi < \infty$  だから well-defined である.

**Definition 2.2**  $\mathfrak{p}$  の有限次元既約表現  $\pi$  に対して表現  $(U(\mathfrak{g}), \psi_\pi, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi)$  を

$$\psi_\pi(X) \cdot f(A) = \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(-tX) \exp A) \right|_{t=0} \quad (X \in \mathfrak{g}, A \in \mathfrak{n}^-, f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi),$$

によって定める. もちろんこれは  $G$  の  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$  上の作用を微分しているので表現になっている.  $\square$

ここで,  $\mathfrak{p}$  の表現  $\pi$  が  $P$  に持ちあがるときは (同じ  $\pi$  で表す), 表現  $(U(\mathfrak{g}), \psi_\pi, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi)$  は  $P$  の表現  $\pi$  を  $G$  に誘導して得られる表現を微分したものに相当することを説明する. この誘導表現  $\text{Ind}_P^G \pi$  は

$$\begin{aligned} \text{Ind}_P^G \pi &= \Gamma(G \times_P V_\pi), \\ G \times_P V_\pi &= G \times V_\pi / \sim, \\ (g, v) &\sim (h, w) \Leftrightarrow g^{-1}h \in P, v = \pi(g^{-1}h)w, \end{aligned}$$

と,  $G/P$  上の  $G$ -同変ベクトル束  $G \times_P V_\pi$  の切断として定義されるが,

$$C^\infty(G, V_\pi)^P = \{f : G \rightarrow V_\pi; C^\infty \mid f(gp) = \pi(p^{-1})f(g) \quad (g \in G, p \in P)\},$$

に  $(h \cdot f)(g) = f(h^{-1}g)$  ( $h, g \in G, f \in C^\infty(G, V_\pi)^P$ ) で作用を入れた  $G$  の表現と同型である. Definition 2.2 は  $\mathfrak{n}^-$  上の多項式関数  $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$  を,  $C^\infty(N^-P, V_\pi)^P$  に入るように  $N^-P$  上へ拡張して  $\tilde{f}$  とし群  $G$  の作用を微分しているので,  $\pi$  が  $P$  に持ちあがるときは  $\psi_\pi$  は  $\text{Ind}_P^G \pi$  を微分した表現である.  $\mathfrak{p}$  の表現  $\pi$  が  $P$  に持ちあがるかどうかによらず, Definition 2.2 によって  $\psi_\pi$  は定義できていることに注意する.

### 2.3 The Fourier transform and dual modules

ここでは、表現  $(U(\mathfrak{g}), \psi_\pi, \mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  の双対加群や、その作用  $\psi_\pi(X) \in D_{n^-} \otimes_{\mathbf{C}} \text{End } V_\pi$  のフーリエ変換を構成する。ここで  $D_{n^-}$  は  $n^-$  上の多項式係数微分作用素環を表し、したがって  $D_{n^-} \otimes_{\mathbf{C}} \text{End } V_\pi$  は  $\mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi$  に作用する多項式係数微分作用素環である。

はじめに、対称代数  $S(n^-)$  と  $n^-$  上の定数係数微分作用素を以下のように同一視する。 $P \in S(n^-)$  に対して、 $P(\partial) \in D_{n^-}$  を次を満たす作用素として定める。

$$P(\partial) \exp\langle y, x \rangle = P(x) \exp\langle y, x \rangle \quad (x \in n^+, y \in n^-).$$

ここで右辺の  $P(x)$  は、固定している不変双1次形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  による同一視  $S(n^-) \simeq \mathbf{C}[n^+]$  により  $n^+$  上の多項式関数とみている。特に  $G \in n^+, F \in n^-$  に対しては  $F(\partial)(G) = \langle F, G \rangle$  である。

次に  $D_{n^-}$  と  $\text{End } V_\pi$  を次のように自然に  $\text{End}(\mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  の中に埋め込む。関数  $f \otimes v \in \mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi$  ( $(f \otimes v)(A) = f(A)v$ ) をとるとき、 $D_{n^-}$  と  $\text{End } V_\pi$  の  $f \otimes v$  への作用を

$$\begin{aligned} P.(f \otimes v) &= P(f) \otimes v \quad (P \in D_{n^-}) \\ \varphi.(f \otimes v) &= f \otimes \varphi(v) \quad (\varphi \in \text{End } V_\pi), \end{aligned}$$

で与える。明らかに  $\text{End}(\mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  の中で  $D_{n^-}$  と  $\text{End } V_\pi$  は可換である。以上でフーリエ変換  $\mathcal{F}: D_{n^-} \otimes_{\mathbf{C}} \text{End } V_\pi \rightarrow D_{n^+} \otimes_{\mathbf{C}} \text{End } V_\pi$  を定義する準備が整った。

**Definition 2.3** 有限次元既約表現  $(\mathfrak{p}, \pi, V_\pi)$  に対して、フーリエ変換  $\mathcal{F}$  を次で定める。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & D_{n^-} \otimes_{\mathbf{C}} \text{End } V_\pi & \longrightarrow & D_{n^+} \otimes_{\mathbf{C}} \text{End } V_\pi \\ & \varphi & \mapsto & \varphi \\ & G & \mapsto & G(\partial) \\ & F(\partial) & \mapsto & -F \end{array} \quad (\varphi \in \text{End } V_\pi, G \in n^+, F \in n^-).$$

ここで  $G$  は、固定している双1次形式  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  によって  $n^-$  上の線形関数と思い、したがってそれは  $D_{n^-}$  に属する掛け算作用素とみなせる。 $F$  についても同様である。

$\mathcal{F}$  は線形同型であり、関係式を保つことは容易にわかるから  $\mathcal{F}$  は代数同型である。  $\square$

次に  $(U(\mathfrak{g}), \psi_\pi, \mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  の双対加群を定める。まず、 $\mathbf{C}[n^+]$  と  $\mathbf{C}[n^-]$  の間には

$$\langle p, f \rangle = p(\partial)f(0) \quad (p \in \mathbf{C}[n^+], f \in \mathbf{C}[n^-]),$$

によって perfect pairing が入る。ここでは  $\mathbf{C}[n^+] \simeq S(n^-)$  を用いて、定数係数微分作用素  $p(\partial)$  を構成している。さらに、 $(\mathfrak{p}, \pi, V_\pi)$  の双対加群を  $(\mathfrak{p}, \tilde{\pi}, V_{\tilde{\pi}})$  とすると、 $V_\pi$  と  $V_{\tilde{\pi}}$  の間には自然なペアリングがあるから、 $\mathbf{C}[n^+] \otimes_{\mathbf{C}} V_{\tilde{\pi}}$  と  $\mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi$  の間に

$$\langle p \otimes w, f \otimes v \rangle = \langle p, f \rangle \langle w, v \rangle \quad (p \otimes w \in \mathbf{C}[n^+] \otimes_{\mathbf{C}} V_{\tilde{\pi}}, f \otimes v \in \mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi),$$

により perfect pairing が定まる。これを用いて  $(U(\mathfrak{g}), \psi_\pi, \mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  の双対加群  $(U(\mathfrak{g}), (\psi_\pi), \mathbf{C}[n^+] \otimes_{\mathbf{C}} V_{\tilde{\pi}})$  が定義される。具体的には

$$\begin{aligned} \langle p \otimes w, \psi_\pi(X)f \otimes v \rangle + \langle (\psi_\pi)(X)p \otimes w, \psi_\pi(X)f \otimes v \rangle &= 0, \\ (p \otimes w \in \mathbf{C}[n^+] \otimes_{\mathbf{C}} V_{\tilde{\pi}}, f \otimes v \in \mathbf{C}[n^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi, X \in \mathfrak{g}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

である。

## 2.4 Main theorem

**Definition 2.4** 有限次元既約表現  $(\mathfrak{p}, \pi, V_\pi)$  に対して, 表現  $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\pi, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  を

$$\Psi_\pi(X) = \mathcal{F}(\psi_{\pi+2\rho}(X)),$$

で定める. ここで  $\rho \in \text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$  は

$$\rho(X) = \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathfrak{n}^+} \text{ad}(X) \quad (X \in \mathfrak{p}),$$

であり, これは  $\Delta_N^+$  のルートの half sum を  $\mathfrak{p}$  に自明に拡張したものである.  $\square$

$\alpha \in \Delta_N^+$  のうち,  $\alpha$  を単純ルートの和で書き表わしたとき  $\Delta_N^+$  に含まれる単純ルートの個数が  $k$  個 ( $k \in \mathbf{Z}_{>0}$ ) であるものたちのルート空間を足し合わせたものを  $\mathfrak{n}^{+k}$  と書くことにする.  $\mathfrak{n}^{-k}$  も同様に定義する. このとき  $[\mathfrak{n}^{+1}, \mathfrak{n}^{+k}] = \mathfrak{n}^{+(k+1)}$  となる. またこの論説では,  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$  に対して,  $[X_1, \dots, X_k] = \text{ad}(X_1) \circ \dots \circ \text{ad}(X_{k_1})(X_k) = [X_1, [X_2, \dots, [X_{k-1}, X_k] \dots]]$  と約束する.

**Proposition 2.5** 表現  $(U(\mathfrak{g}), \psi_\pi, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  と表現  $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\pi, \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes_{\mathbf{C}} V_\pi)$  (Definition 2.2 と Definition 2.4 を見よ) の作用の具体的な形は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \psi_\pi(X) &= \text{ad}(X) + \pi(X) \\ &= \sum_k [X, G_k] \frac{\partial}{\partial G_k} + \pi(X) \quad (X \in \mathfrak{l}), \end{aligned}$$

$$\psi_\pi(X) = -a_1 \partial_X - a_2 \sum_{j_1} G_{j_1} \partial_{[F_{j_1}, X]} - a_3 \sum_{j_1, j_2} G_{j_1} G_{j_2} \partial_{[F_{j_1}, F_{j_2}, X]} - \dots \quad (X \in \mathfrak{n}^-),$$

$$\begin{aligned} \psi_\pi(X) &= \sum_{k \in K_{>1}} G_k \partial_{[F_k, X]} - \sum_{k \in K_1} \pi([F_k, X]) G_k \\ &\quad + a_2 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K} G_{l_1} G_k \partial_{[F_{l_1}, F_k, X]} \\ &\quad - a_3 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K, l_2 \in K} G_{l_1} G_{l_2} G_k \partial_{[F_{l_1}, F_{l_2}, F_k, X]} + \dots \quad (X \in \mathfrak{n}^{+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_\pi(X) &= \text{ad}(X) + \pi(X) \\ &= \sum_k [X, F_k] \frac{\partial}{\partial F_k} + \pi(X) \quad (X \in \mathfrak{l}), \end{aligned}$$

$$\Psi_\pi(X) = a_1 X + a_2 \sum_{j_1} [F_{j_1}, X] \frac{\partial}{\partial F_{j_1}} + a_3 \sum_{j_1, j_2} [F_{j_1}, F_{j_2}, X] \frac{\partial}{\partial F_{j_1}} \frac{\partial}{\partial F_{j_2}} + \dots \quad (X \in \mathfrak{n}^-),$$

$$\begin{aligned} \Psi_\pi(X) &= - \sum_{k \in K_{>1}} [F_k, X] \frac{\partial}{\partial F_k} - \sum_{k \in K_1} \pi([F_k, X]) \frac{\partial}{\partial F_k} \\ &\quad - a_2 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K} [F_{l_1}, F_k, X] \frac{\partial}{\partial F_{l_1}} \frac{\partial}{\partial F_k} \\ &\quad + a_3 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K, l_2 \in K} [F_{l_1}, F_{l_2}, F_k, X] \frac{\partial}{\partial F_{l_1}} \frac{\partial}{\partial F_{l_2}} \frac{\partial}{\partial F_k} - \dots \quad (X \in \mathfrak{n}^{+1}). \end{aligned}$$

ここで  $\{a_i\}$  は有理数からなる数列であり, その定義は Lemma 5.5 を見よ. また,  $\{G_k\}$  と  $\{F_k\}$  はそれぞれ  $\mathfrak{n}^+$  と  $\mathfrak{n}^-$  の基底で, 固定している不変双 1 次形式で双対なものとし, さらにその添字集合を  $K$  とし  $K = K_1 \amalg K_{>1}$  と分解すると,  $\{G_k | k \in K_1\}$  は  $\mathfrak{n}^+$  の基底,  $\{G_k | k \in K_{>1}\}$  は  $\mathfrak{n}^+ + \mathfrak{n}^+ + \dots$  の基底, となっているものとする.  $\square$

この Proposition 2.5 は次の Proposition 2.6 や主定理 Theorem 2.7 の証明に用いられる. 証明は §3 で行う.

**Proposition 2.6** Definition 2.4 で定めた表現  $\Psi_\pi$  と (2.1) を用いて定まる双対加群に対して,  $\Psi_\pi = (\psi_{\tilde{\pi}})$  である.

*Proof.* まず,  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi$  と  $\mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_{\tilde{\pi}}$  のペアリングは

$$\langle \varphi \otimes v, f \otimes w \rangle = \langle \varphi, f \rangle \langle v, w \rangle \quad (\varphi \otimes v \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi, f \otimes w \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-] \otimes_{\mathbb{C}} V_{\tilde{\pi}}),$$

と定義されていた. ここで,  $f \in S(\mathfrak{n}^+)$  とみなせるので  $\mathfrak{n}^+$  上の定数係数微分作用素  $f(\partial)$  も構成できるが,  $\langle \varphi, f \rangle$  の定義から明らかに,  $\langle \varphi, f \rangle = \varphi(\partial)f(0) = f(\partial)\varphi(0)$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \langle \nu\varphi \otimes v, f \otimes w \rangle &= \langle \varphi \otimes v, \nu(\partial)f \otimes w \rangle, \\ \langle \varphi \otimes v, gf \otimes w \rangle &= \langle g(\partial)\varphi \otimes v, f \otimes w \rangle, \end{aligned}$$

である. したがって,  $\psi_{\tilde{\pi}}(U(\mathfrak{g}))$  から  $D_{\mathfrak{n}^+} \otimes_{\mathbb{C}} \text{End } V_\pi$  への反同型  $\sigma$  を

$$\begin{aligned} \sigma: D_{\mathfrak{n}^-} \otimes_{\mathbb{C}} \text{End } V_{\tilde{\pi}} &\longrightarrow D_{\mathfrak{n}^+} \otimes_{\mathbb{C}} \text{End } V_\pi \\ F(\partial) &\mapsto F \quad (F \in \mathfrak{n}^-), \\ G &\mapsto G(\partial) \quad (G \in \mathfrak{n}^+), \\ \tilde{\pi}(X) &\mapsto -\pi(X) \quad (X \in \mathfrak{p}), \end{aligned}$$

で定めると,

$$(\psi_{\tilde{\pi}})(X) = -\sigma(\psi_{\tilde{\pi}}(X)) \quad (X \in \mathfrak{g}),$$

である. これを Proposition 2.5 の  $\psi_\pi$  の表示に適用すれば,  $(\psi_{\tilde{\pi}})(X) = \Psi_\pi(X)$  がただちに示される.  $\square$

**Theorem 2.7** 有限次元既約表現  $(\mathfrak{p}, \pi, V_\pi)$  に対して, Definition 2.4 により定めた表現  $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\pi, \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi)$  は, Definition 2.1 により定めた一般パーマ加群  $M(\pi)$  に同型である. その同型対応は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \xi: M(\pi) &\longrightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{n}^+] \otimes_{\mathbb{C}} V_\pi \\ u \otimes v &\mapsto \Psi_\pi(u) \cdot (1 \otimes v) \quad (u \in U(\mathfrak{g}), v \in V_\pi). \end{aligned}$$

$\square$

Theorem 2.7 の証明は §4 で行う. 証明の方針は作用の具体的な形を利用して次の Lemma 2.8 を適用することである.

**Lemma 2.8**  $\pi$  を  $\mathfrak{p}$  の有限次元既約表現,  $W$  を  $U(\mathfrak{g})$ -加群とするとき,  $W$  が  $M(\pi)$  と同型となる必要十分条件は, 写像  $\xi : M(\pi) \rightarrow W$  が存在して次の (a), (b) を満たすことである.

(a)  $\xi$  は  $U(\mathfrak{n}^-)$ -同型.

(b)  $\xi$  は  $1 \otimes V_\pi$  上で  $U(\mathfrak{p})$ -同型.

*Proof.*  $M(\pi) \simeq W$  ならば,  $U(\mathfrak{g})$ -同型  $\xi : M(\pi) \rightarrow W$  が存在し, これが (a), (b) を満足する.

逆に (a), (b) を満たす写像  $\xi : M(\pi) \rightarrow W$  が存在すると仮定する.  $M(\pi) \simeq W$  を示すためには,  $\xi$  が  $U(\mathfrak{g})$ -準同型であることをいえばよい.  $X \in \mathfrak{l}, Y_j \in \mathfrak{n}^-, v \in V_\pi$  に対して,

$$\begin{aligned} \xi(XY_1 \cdots Y_d \otimes v) &= \xi(Y_1 \cdots Y_d X \otimes v + [X, Y_1 \cdots Y_d] \otimes v) \\ &= \xi(Y_1 \cdots Y_d X \otimes v + [X, Y_1 \cdots Y_d] \cdot 1 \otimes v). \end{aligned}$$

ここで  $Y_1 \cdots Y_d$  と  $[X, Y_1 \cdots Y_d]$  は  $U(\mathfrak{n}^-)$  に属するから,  $\xi$  が (a), (b) を満たすことを用いると, この式は次に等しい.

$$\begin{aligned} Y_1 \cdots Y_d \cdot \xi(X \otimes v) + [X, Y_1 \cdots Y_d] \cdot \xi(1 \otimes v) \\ &= Y_1 \cdots Y_d X \cdot \xi(1 \otimes v) + [X, Y_1 \cdots Y_d] \cdot \xi(1 \otimes v) \\ &= XY_1 \cdots Y_d \cdot \xi(1 \otimes v) \\ &= X \cdot \xi(Y_1 \cdots Y_d \otimes v). \end{aligned}$$

$Y_1 \cdots Y_d \otimes v$  は  $M(\pi)$  全体を走るから, こうして  $\xi$  が  $U(\mathfrak{l})$ -準同型であることが示された, 次に  $\xi$  が  $U(\mathfrak{g})$ -準同型であることを示す.  $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{l} + \mathfrak{n}^-) \oplus U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+$  と直和分解し,  $u \in U(\mathfrak{g})$  を取ったときこれに対応して,  $u = u_0 + u_+$  のように分解する. すると,  $u \in U(\mathfrak{g})$  と  $v \in V_\pi$  に対して,

$$\begin{aligned} \xi(u \cdot 1 \otimes v) &= \xi(u_0 \otimes v + u_+ \otimes v) \\ &= \xi(u_0 \otimes v) \\ &= u_0 \cdot \xi(1 \otimes v) \\ &= u_0 \cdot \xi(1 \otimes v) + u_+ \cdot \xi(1 \otimes v) \\ &= u \cdot \xi(1 \otimes v). \end{aligned}$$

ここで,  $\mathfrak{n}^+$  の作用が  $V_\pi$  上と, その  $\xi$  による同型な像の上で自明であることを用いた. さて,  $u = XY_1 \cdots Y_d$  ( $X \in \mathfrak{g}, Y_j \in \mathfrak{n}^-$ ) とおくと,

$$\xi(XY_1 \cdots Y_d \otimes v) = XY_1 \cdots Y_d \cdot \xi(1 \otimes v) = X \cdot \xi(Y_1 \cdots Y_d \otimes v).$$

こうして  $\xi$  が  $U(\mathfrak{g})$ -準同型であることが示され, 補題は証明された. □

### 3 Proof of Proposition 2.5

この節では  $\psi_\pi(X)$  や  $\Psi_\pi(X)$  の具体的な形 (Proposition 2.5) を証明する. 記号を簡単にするため  $\pi$  が 1 次元表現の場合のみ証明するが, 一般の有限次元表現の場合の証明も全く同じである.

$\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$  を  $\mathfrak{p}$  の指標とする. この節では  $\pi$  の代わりに  $\lambda$  を用いて, 1 次元表現であることを明確にしておく. この場合  $\psi_\lambda$  と  $\Psi_\lambda$  の表現空間はそれぞれ多項式環  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$  と  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$  になり,  $\psi_\lambda(X)$  と  $\Psi_\lambda(X)$  はそれぞれ  $D_{\mathfrak{n}^-}$  と  $D_{\mathfrak{n}^+}$  に属する. ここで  $\mathfrak{l}$  は  $\text{ad}$  により  $\mathfrak{n}^+$  に作用するので,  $\mathfrak{l}$  は  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^-] \simeq S(\mathfrak{n}^+)$  に作用する. 同様に  $\mathfrak{l}$  は  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$  にも作用する. これらの  $\mathfrak{l}$  の表現も同じ記号  $\text{ad}$  で表す.  $\{G_k\}$  と  $\{F_k\}$  をそれぞれ  $\mathfrak{n}^+$  と  $\mathfrak{n}^-$  の基底とし, 固定している双 1 次形式  $\langle, \rangle$  で双対なものとする.

#### 3.1 $\psi_\lambda$ on $\mathfrak{l}$

ここでは  $X \in \mathfrak{l}$  に対して  $\psi_\lambda(X)$  の具体的な形を求める. まず  $F \in \mathfrak{n}^-$  に対して, この方向の偏微分的作用素  $\partial_F \in D_{\mathfrak{n}^-}$  を

$$\partial_F.f(A) = \left. \frac{d}{dt} f(A + tF) \right|_{t=0} \quad (f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-], A \in \mathfrak{n}^-),$$

で定める. 固定した双 1 次形式  $\langle, \rangle$  によって  $\mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$  と  $S(\mathfrak{n}^+)$  を同一視しており,  $F(\partial)$  も同じ双 1 次形式を用いて定義したので,

$$\partial_F = F(\partial) \quad (F \in \mathfrak{n}^-),$$

が容易にわかる. 特に,  $\{F_k\}$  と  $\{G_k\}$  が  $\langle, \rangle$  に関して双対であるから,

$$\partial_{F_k} = F_k(\partial) = \frac{\partial}{\partial G_k},$$

である.

**Lemma 3.1**  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  と  $X \in \mathfrak{l}$  に対して,

$$\psi_\lambda(X) = \text{ad}(X) + \lambda(X) = \sum_k [X, G_k] \frac{\partial}{\partial G_k} + \lambda(X).$$

ここで  $[X, G_k] \in \mathfrak{n}^+$  は固定している不変双 1 次形式によって  $\mathfrak{n}^-$  上の線形関数とみる. この表示は基底の取り方によらない.

*Proof.*  $X \in \mathfrak{l}$ ,  $A \in \mathfrak{n}^-$ ,  $f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^-]$  に対して,

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(X).f(A) &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(-tX) \exp A) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(\text{Ad}(-tX)A) \exp(-tX)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \exp \lambda(tX) f(\text{Ad}(-tX)A) \right|_{t=0} \\ &= \lambda(X)f(A) + \left. \frac{d}{dt} (\text{Ad}(tX).f)(A) \right|_{t=0} \\ &= \lambda(X)f(A) + \text{ad}(X)f(A). \end{aligned}$$

ひとつ目の等号はこれで証明された。

次に,  $\text{ad}(X)$  と  $\sum_k [X, G_k] \partial / \partial G_k$  はともに derivation であるから  $f$  は 1 次式としてよく, さらに  $f = G_j$  のように単項式としてよいので, ふたつ目の等号は明らかである。□

### 3.2 $\psi_\lambda$ on $\mathfrak{n}^-$

ここでは  $X \in \mathfrak{n}^-$  に対して  $\psi_\lambda(X)$  の具体的な形を決定する。まず必要となる Baker-Campbell-Hausdorff の公式に関する補題を与える。この補題の証明はここではせず, 後の節で証明する。

**Lemma 3.2**  $t \in \mathbb{R}$  と, 十分に 0 に近い  $X, A \in \mathfrak{g}$  に対して,

$$\begin{aligned} \exp tX \exp A &= \exp(A + t(a_1 X + a_2 [A, X] + a_3 [A, A, X] + \cdots)) + O(t^2), \\ \exp A \exp tX &= \exp(A + t(a_1 X - a_2 [A, X] + a_3 [A, A, X] - \cdots)) + O(t^2). \end{aligned}$$

ここで  $\{a_j\}$  有理数からなる数列であり, はじめの数項は  $a_1 = 1, a_2 = -1/2, a_3 = 1/12, a_4 = 0, a_5 = -1/720$  である。□

この補題を利用して  $X \in \mathfrak{n}^-$  に対して  $\psi_\lambda(X)$  の具体的な形を計算できる。

**Lemma 3.3**  $p$  の指標  $\lambda$  と  $X \in \mathfrak{n}^-$  に対して,

$$\psi_\lambda(X) = -a_1 \partial_X - a_2 \sum_{j_1} G_{j_1} \partial_{[F_{j_1}, X]} - a_3 \sum_{j_1, j_2} G_{j_1} G_{j_2} \partial_{[F_{j_1}, F_{j_2}, X]} - \cdots$$

ここで  $\{a_j\}$  は Lemma 3.2 で現われた数列であり,  $\{G_k\}$  と  $\{F_k\}$  はそれぞれ  $\mathfrak{n}^+$  と  $\mathfrak{n}^-$  の基底であり, 固定してある不変双 1 次形式で双対なものである。この表示は基底のとりかたによらない。

*Proof.* Lemma 3.2 によって,  $X, A \in \mathfrak{n}^-$  と  $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}^-]$  をとったとき,

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(X) f(A) &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(-tX) \exp A) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(A - t(a_1 X + a_2 [A, X] + \cdots)) + O(t^2)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(A - t(a_1 X + a_2 [A, X] + \cdots)) \right|_{t=0} \\ &= \partial_{-a_1 X - a_2 [A, X] - \cdots} f(A), \end{aligned}$$

である。ここで,  $A = \sum_j b_j F_j$  としたとき,

$$\begin{aligned} \partial_{[A, \dots, A, X]} f(A) &= \sum_{j_1, \dots, j_n} b_{j_1} \cdots b_{j_n} \partial_{[F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X]} f(A) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} G_{j_1} \cdots G_{j_n} \partial_{[F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X]} f(A), \end{aligned}$$

となるから補題は証明された。□

### 3.3 $\psi_\lambda$ on $\mathfrak{n}^{+1}$

ここでは  $X \in \mathfrak{n}^{+1}$  に対して  $\psi_\lambda(X)$  の具体的な形を決定する.

**Lemma 3.4**  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  と  $X \in \mathfrak{n}^{+1}$  に対して,

$$\begin{aligned} \psi_\pi(X) &= \sum_{k \in K_{>1}} G_k \partial_{[F_k, X]} - \sum_{k \in K_1} \pi([F_k, X]) G_k \\ &\quad + a_2 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K} G_{l_1} G_k \partial_{[F_{l_1}, F_k, X]} \\ &\quad - a_3 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K, l_2 \in K} G_{l_1} G_{l_2} G_k \partial_{[F_{l_1}, F_{l_2}, F_k, X]} + \cdots, \end{aligned}$$

ここで  $\{a_i\}$  は Lemma 3.2 で与えられるものであり,  $\{G_k\}, \{F_k\}, K, K_1, K_{>1}$  は Proposition 2.5 のようにとる. この表示は基底のとりかたによらない.

*Proof.* まず  $A \in \mathfrak{n}^-$  を  $\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}^{-1} \oplus (\mathfrak{n}^{-1} + \mathfrak{n}^{-2} + \cdots)$  の直和分解により分解したとき,  $A = A_1 + A_{>1}$  と書くことに約束する. 次の式

$$\psi_\lambda(X) f(A) = [\partial_{[A_{>1}, X]} + a_2[A, A_1, X] - a_3[A, A, A_1, X] + \cdots - \lambda([A_1, X])] \cdot f(A), \quad (3.1)$$

の証明をはじめの目標とする.

$$\exp tX \exp A = \exp(\text{Ad}(tX)A) \exp(tX) = \exp(A - t[A, X] + O(t^2)),$$

と, Lemma 3.2 の第 2 式で,  $A$  の代わりに  $A - tX$  として得られる

$$\exp(A - tX) = \exp(A + t(-a_2 \text{ad}(A) + a_3 \text{ad}(A)^2 - \cdots))(X) + O(t^2) \exp(-tX),$$

を用いると,

$$\begin{aligned} &\exp tX \exp A \\ &= \exp(A - t[A, X] + O(t^2)) \exp tX \\ &= \exp(A - t[A_{>1}, X] - t[A_1, X] + O(t^2)) \exp tX \\ &= \exp(A - t[A_{>1}, X] + t(-a_2 \text{ad}(A) + a_3 \text{ad}(A)^2 - \cdots)([A_1, X]) + O(t^2)) \\ &\quad \times \exp(-t[A_1, X]) \exp tX \\ &= \exp(A - t[A_{>1}, X] - ta_2[A, A_1, X] + ta_3[A, A, A_1, X] - \cdots + O(t^2)) \\ &\quad \times \exp(-t[A_1, X]) \exp tX. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &\psi_\lambda(X) f(A) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(-tX) \exp A) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(\exp(A + t[A_{>1}, X] + ta_2[A, A_1, X] - ta_3[A, A, A_1, X] + \cdots + O(t^2))) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \exp(-\lambda(t[A_1, X])) f(A + ta_2[A, A_1, X] - ta_3[A, A, A_1, X] + \cdots) \right|_{t=0} \\ &= [\partial_{[A_{>1}, X]} + a_2[A, A_1, X] - a_3[A, A, A_1, X] + \cdots - \lambda([A_1, X])] f(A), \end{aligned}$$

となり以上で (3.1) が証明された。

次に  $X \in \mathfrak{n}^{+1}$  に対して,  $\mathfrak{n}^-$  上の多項式係数微分作用素  $\alpha, \beta_k, \gamma$  を次で定める。

$$\begin{aligned}\alpha(X)f(A) &= \partial_{[A_{>1}, X]}f(A), \\ \beta_k(X)f(A) &= \partial_{[A, \dots, A, A_1, X]}f(A) = \partial_{\text{ad}(A)^k([A_1, X])}f(A), \\ \gamma(X)f(A) &= \lambda([A_1, X])f(A).\end{aligned}$$

すると  $A = \sum_k c_k F_k$  に対して,

$$\alpha(X)f(A) = \partial_{[A_{>1}, X]}f(A) = \sum_{k \in K_{>1}} c_k \partial_{[F_k, X]}f(A) = \sum_{k \in K_{>1}} G_k \partial_{[F_k, X]}f(A)$$

であるから,  $\alpha(X) = \sum_{l \in K_{>1}} G_l \partial_{[F_l, X]}$  である。さらに,  $\gamma(X) = \sum_{l \in K_{>1}} G_l \lambda([F_l, X])$  と  $\beta_k(X) = \sum_{l \in K_{>1}, m_j \in K} G_{m_1} \cdots G_{m_k} G_l \partial_{[F_{m_1}, \dots, F_{m_k}, F_l, X]}$  も同様の計算でわかる。(3.1) とこれを合わせると, 補題が証明された。□

### 3.4 $\Psi_\lambda$ on $\mathfrak{l}$

ここでは  $X \in \mathfrak{l}$  に対して  $\Psi_\lambda(X)$  の具体的な形を決定する。 $\Psi_\lambda(X)$  は Fourier 変換を用いて定義される。Fourier 変換の定義は Definition 2.3,  $\Psi_\lambda$  の定義は Definition 2.4 を見よ。

**Lemma 3.5**  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  と  $X \in \mathfrak{l}$  に対して,

$$\Psi_\lambda(X) = \text{ad}(X) + \lambda(X) = \sum_k [X, F_k] \frac{\partial}{\partial F_k} + \lambda(X).$$

この表示は  $\mathfrak{n}^-$  の基底  $\{F_k\}$  のとりかたによらない。

*Proof.* まず  $\rho$  は  $2\rho(X) = \text{Tr}_{\mathfrak{n}^+} \text{ad}(X)$  ( $X \in \mathfrak{p}$ ) で定義されていた。Lemma 3.1 により,  $X \in \mathfrak{l}$  に対して,

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(X) &= \sum_k [X, G_k] \frac{\partial}{\partial G_k} + \lambda(X) \\ &= \sum_{kl} \langle F_l, [X, G_k] \rangle G_l \frac{\partial}{\partial G_k} + \lambda(X) \\ &= \sum_{kl} \langle -[X, F_l], G_k \rangle G_l \frac{\partial}{\partial G_k} + \lambda(X) \\ &= \sum_l G_l \partial_{-[X, F_l]} + \lambda(X)\end{aligned}$$

したがって  $\Psi_\lambda$  の定義より,

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(X) &= \mathcal{F}(\psi_{\lambda+2\rho}(X)) \\ &= \sum_l \frac{\partial}{\partial F_l} [X, F_l] + (\lambda + 2\rho)(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_l \frac{\partial}{\partial F_l} ([X, F_l]) + \sum_l [X, F_l] \frac{\partial}{\partial F_l} + (\lambda + 2\rho)(X) \\
&= \sum_l \frac{\partial}{\partial F_l} (\text{ad}(X)(F_l)) + \sum_l [X, F_l] \frac{\partial}{\partial F_l} + (\lambda + 2\rho)(X) \\
&= -2\rho(X) + \text{ad}(X) + (\lambda + 2\rho)(X) \\
&= \text{ad}(X) + \lambda(X),
\end{aligned}$$

となり, ひとつ目の等号は証明された. ふたつ目の等号も  $\psi_\lambda$  の場合と同様にして証明できる.  $\square$

### 3.5 $\Psi_\lambda$ on $\mathfrak{n}^-$

ここでは  $X \in \mathfrak{n}^-$  に対して  $\Psi_\lambda(X)$  の具体的な形を決定する.

**Lemma 3.6**  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  と  $X \in \mathfrak{n}^-$  に対して,

$$\Psi_\lambda(X) = a_1 X + a_2 \sum_{j_1} [F_{j_1}, X] \frac{\partial}{\partial F_{j_1}} + a_3 \sum_{j_1, j_2} [F_{j_1}, F_{j_2}, X] \frac{\partial}{\partial F_{j_1}} \frac{\partial}{\partial F_{j_2}} + \dots$$

ここで  $a_j$  は Lemma 3.2 で与えられたもので,  $\{G_k\}$  と  $\{F_k\}$  はそれぞれ  $\mathfrak{n}^+$  と  $\mathfrak{n}^-$  の基底で双対なものである. この表示は基底のとりかたによらない.

*Proof.* Lemma 3.3 の Fourier 変換をとればよい. 項別に見ると,

$$\mathcal{F} \left( \sum_{j_1, \dots, j_n} G_{j_1} \cdots G_{j_n} \partial_{[F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X]} \right) = - \sum_{j_1, \dots, j_n} \partial_{G_{j_1}} \cdots \partial_{G_{j_n}} [F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X].$$

ここで  $\partial_{G_{j_t}} ([F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X]) = \langle G_{j_t}, [F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X] \rangle = 0$  がウェイトを考えるとわかるから,  $\partial_{G_{j_t}}$  たちと  $[F_{j_1}, \dots, F_{j_n}, X]$  は可換であり, 補題は証明された.  $\square$

### 3.6 $\Psi_\lambda$ on $\mathfrak{n}^{+1}$

ここでは  $X \in \mathfrak{n}^{+1}$  に対して  $\Psi_\lambda(X)$  の具体的な形を決定する.

**Lemma 3.7**  $\mathfrak{p}$  の指標  $\lambda$  と  $X \in \mathfrak{n}^{+1}$  に対して,

$$\begin{aligned}
\Psi_\pi(X) &= - \sum_{k \in K_{>1}} [F_k, X] \frac{\partial}{\partial G_k} - \sum_{k \in K_1} \pi([F_k, X]) \frac{\partial}{\partial G_k} \\
&\quad - a_2 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K} [F_{l_1}, F_k, X] \frac{\partial}{\partial G_{l_1}} \frac{\partial}{\partial G_k} \\
&\quad + a_3 \sum_{k \in K_1, l_1 \in K, l_2 \in K} [F_{l_1}, F_{l_2}, F_k, X] \frac{\partial}{\partial G_{l_1}} \frac{\partial}{\partial G_{l_2}} \frac{\partial}{\partial G_k} - \dots
\end{aligned}$$

ここで  $\{a_i\}$  は Lemma 5.5 で与えられるものであり,  $\{G_k\}$ ,  $\{F_k\}$ ,  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_{>1}$  は Lemma 2.5 のようにとる. この表示は基底のとりかたによらない.

*Proof.* Lemma 3.4 のフーリエ変換を取れば良い.  $\square$

## 4 Proof of the main theorem

この節ではスカラー型一般バーマ加群に対して、つまり、 $\pi$ が1次元表現の場合に主定理 (Theorem 2.7) を証明する。  $\pi$ が有限次元表現である場合の証明もほとんど同様である。証明には Lemma 3.5 と Lemma 3.6 による  $\Psi_\lambda$  の具体的な形を用いて、 Lemma 2.8 を適用する。証明には  $X \in \mathfrak{n}^+$  に対する  $\Psi_\lambda(X)$  の具体的な形は必要ないことに注意しておく。

まず、線形写像  $\xi$  を、

$$\begin{aligned} \xi: M(\lambda) &\longrightarrow \mathbf{C}[n^+] \\ u \otimes v &\longmapsto \Psi_\lambda(u).v \quad (u \in U(\mathfrak{g}), v \in \mathbf{C}_\lambda), \end{aligned}$$

で定める。ここで  $\mathbf{C}_\lambda = \mathbf{C}$  は  $\lambda$  の表現空間を表す。

$\xi$  が well-defined であることも示さなくてはならないが、  $X \otimes v - 1 \otimes \lambda(X)v$  ( $X \in \mathfrak{p}$ ) が  $\xi$  で 0 にうつることを示せば十分である。  $X \in \mathfrak{l}$  に対しては、

$$\begin{aligned} \xi(X \otimes v - 1 \otimes \lambda(X)v) &= \Psi_\lambda(X).v - \Psi_\lambda(1).\lambda(X)v \\ &= (\text{ad}(X) + \lambda(X)).v - \lambda(X)v \\ &= \text{ad}(X)v \\ &= 0. \end{aligned}$$

で確かに 0 にうつる。次に  $X \in \mathfrak{n}^+$  に対しては、  $\Psi_\lambda(X).v$  のウェイトは  $\lambda + (\text{weight of } X)$  に等しいが、  $\lambda$  が表現  $(U(\mathfrak{g}), \Psi_\lambda, \mathbf{C}[n^+])$  のウェイトの中で最も高いのでこのウェイトは起こりえない。したがって  $\Psi_\lambda(X).v = 0$  である。他方  $\Psi_\lambda(1).\lambda(X)v = \lambda(X)v = 0$  であるから、  $X \in \mathfrak{n}^+$  に対して  $\xi(X \otimes v - 1 \otimes \lambda(X)v) = 0$  を得た。以上より  $\xi$  は well-defined である。

次に  $\xi|_{1 \otimes \mathbf{C}_\lambda}$  が  $U(\mathfrak{p})$ -同型であることを示す。明らかに  $\xi|_{1 \otimes \mathbf{C}_\lambda}$  は 0 ではないから、  $U(\mathfrak{p})$ -準同型であることを示せばよい。  $X \in \mathfrak{p}$  と  $v \in \mathbf{C}_\lambda$  に対して、

$$\begin{aligned} \xi(X.(1 \otimes v)) &= \xi(X \otimes v) \\ &= \Psi_\lambda(X).v \\ &= \Psi_\lambda(X).\xi(1 \otimes v), \end{aligned}$$

であるから、  $\xi|_{1 \otimes \mathbf{C}_\lambda}$  は  $U(\mathfrak{p})$ -同型である。

最後に  $\xi$  が  $U(\mathfrak{n}^-)$ -同型であることを示す。線形性は明らかである。そして、  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $v \in \mathbf{C}_\lambda$ ,  $u \in U(\mathfrak{g})$  に対して、

$$\begin{aligned} \xi(X.(u \otimes v)) &= \xi(Xu \otimes v) \\ &= \Psi_\lambda(Xu).v \\ &= \Psi_\lambda(X).\Psi_\lambda(u).v \\ &= \Psi_\lambda(X).\xi(u \otimes v), \end{aligned}$$

であるから、  $\xi$  は  $U(\mathfrak{g})$ -準同型である。あとは全単射性を示せばよい。  $\mathbf{C}_d[n^+]$  と  $U_d(\mathfrak{n}^-)$  により、次数が高々  $d$  次である元からなる部分空間を表すと、  $X \in \mathfrak{n}^-$  に対する  $\Psi_\lambda(X)$  の具体的な形 (Lemma 3.6) により、  $\mathbf{C}_1[n^+]$  は  $\xi(U_1(\mathfrak{n}^-))$  に含まれる。すると帰納法により  $\mathbf{C}_d[n^+]$  が  $\xi(U_d(\mathfrak{n}^-))$  に含まれることがわかる。したがって  $\xi$  は全射である。  $\dim \mathbf{C}_d[n^+] = \dim U_d(\mathfrak{n}^-) < \infty$  であるから  $\xi|_{U_d(\mathfrak{n}^-)}$  は単射であり、  $\xi$  の単射性もわかる。以上でスカラー型の場合の Theorem 2.7 の証明が完了した。

## 5 Proof of Lemma 3.2

ここでは Lemma 3.2 の証明をする. また Lemma 3.2 に現われた数列  $\{a_j\}$  を定義する漸化式を与える.  $\{a_j\}$  は本質的に Bernoulli 数であることが観察できるが, その証明は今の所与えることができていない. まず Baker-Campbell-Hausdorff の公式を復習する. 詳しくは [3] を見よ.

**Proposition 5.1 (Baker-Campbell-Hausdorff)**  $0 \in \mathfrak{g}$  の開近傍  $\mathfrak{a}$  と解析的な写像  $C: \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$  が存在して次を満たす.

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp C(X:Y) \quad (X, Y \in \mathfrak{a}).$$

さらに, 多項式写像  $c_n: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  ( $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) を,

$$\begin{aligned} c_1(X:Y) &= X + Y, \\ (n+1)c_{n+1}(X:Y) &= \frac{1}{2}[X - Y, c_n(X:Y)] \\ &\quad + \sum_{1 \leq p \leq [n/2]} K_{2p} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{2p} = n \\ k_j > 0}} [c_{k_1}(X:Y), \dots, c_{k_{2p}}(X:Y), X + Y], \end{aligned} \tag{5.1}$$

によって定めると,

$$C(X:Y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(X:Y)$$

であり, この無限和は絶対収束する. ここで  $K_p$  は次の Taylor 展開で決まる有理数である.

$$\frac{z}{1 - e^{-z}} - \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^n.$$

$z/(1 - e^{-z}) - z/2$  が偶関数であるから  $K_{2p-1} = 0$  ( $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ ) がわかる. 次の  $K_p$  に関する漸化式も得られる.

**Proposition 5.2**  $K_p$  を Proposition 5.1 で与えられた有理数とすると,

$$\begin{aligned} K_0 &= 1, \\ K_1 &= 0, \\ K_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \frac{1}{2} - \binom{n}{0}! K_1 - \dots - \binom{n}{n-2} (n-1)! K_{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

この漸化式を用いて  $K_p$  を計算すると次のようになる.

$n$	0	2	4	6	8	10
$K_n$	1	1/12	-1/720	1/30240	-1/1209600	1/47900160

Proof.

$$f(z) = \frac{z}{1-e^{-z}} - \frac{z}{2},$$

$$g(z) = \frac{z}{1-e^{-z}},$$

とおく.

第一に次の式を証明する.

$$f^{(n)}(z) = \frac{z - \binom{n}{0}f(z) - \binom{n}{1}f'(z) - \dots - \binom{n}{n-1}f^{(n-1)}(z) + n}{1-e^{-z}} \quad (n \geq 2). \quad (5.2)$$

ここで,  $f^{(k)}$  は  $k$  階導関数を表す.  $k \geq 2$  の時  $f^{(k)} = g^{(k)}$  だから  $f$  の代わりに  $g$  に対して (5.2) を証明すればよい.

$p = p(z) = 1 - e^{-z}$  とおくと  $p' = e^{-z} = 1 - p$  と  $z = gp$  を得るので,

$$\begin{aligned} g' &= (p - z(1-p))/p^2 \\ &= (p - gp(1-p))/p^2 \\ &= (1-p+gp)/p \\ &= (z-g+1)/p. \end{aligned}$$

したがって (5.2) は  $g$  と  $n=1$  に対して成立する.

次に (5.2) が  $n$  ( $n \geq 1$ ) まで成立すると仮定すると,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)} &= \frac{(1 - \binom{n}{0}g' - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n)})p - pg^{(n)}(1-p)}{p^2} \\ &= \frac{1 - \binom{n}{0}g' - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n)} - g^{(n)} + pg^{(n)}}{p}. \end{aligned}$$

帰納法の仮定より, 上の式の分子は次のように計算される.

$$\begin{aligned} &1 - \binom{n}{0}g' - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n)} - \binom{n}{n}g^{(n)} + \left( z - \binom{n}{0}g - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n-1)} + n \right) \\ &= z - \binom{n}{0}g - \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) g' - \dots - \left( \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) g^{(n)} + (n+1). \end{aligned}$$

したがって (5.2) は  $n+1$  に対しても成立している. よって (5.2) は証明された.

第二に次の式を証明する.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= 0, \\ f^{(n)}(0) &= \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{2} - \binom{n}{0}f'(0) - \dots - \binom{n}{n-2}f^{(n-1)}(0) \right) \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

はじめの 2 式は容易に確認できる.  $n \geq 0$  に対して,

$$g^{(n)}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \binom{n}{0}g - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n-1)} + n}{p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \binom{n}{0}g' - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n)}}{1-p} \Big|_{z=0} \\
&= 1 - \binom{n}{0}g'(0) - \dots - \binom{n}{n-1}g^{(n)}(0),
\end{aligned}$$

であるから,

$$(n+1)g^{(n)}(0) = 1 - \binom{n}{0}g'(0) - \dots - \binom{n}{n-2}g^{(n-1)}(0),$$

を得る.  $f$  と  $g$  の定義より  $n=1$  の場合にかぎり  $f^{(n)} \neq g^{(n)}$  であるが,  $n=1$  の場合は  $g'(0) = f'(0) + 1/2$  である. したがって  $n \geq 2$  に対して,

$$\begin{aligned}
(n+1)f^{(n)}(0) &= 1 - \binom{n}{0} \left( f'(0) + \frac{1}{2} \right) - \binom{n}{1}f''(0) - \dots - \binom{n}{n-2}f^{(n-1)}(0) \\
&= \frac{1}{2} - \binom{n}{0}f'(0) - \dots - \binom{n}{n-2}f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

これにより残る 3 番目の  $n \geq 2$  の場合の式も証明された.

最後に補題を証明するが,  $K_n$  の定義より  $f^{(n)}(0) = n!K_n$  であることから明らかである.

□

**Remark 5.3**  $K_{2n}$  は本質的には Bernoulli 数  $B_n$  である ( $K_{2n-1} = 0$  であった). Bernoulli の定義にはいくつかの流儀があるが, ここでは (岩波公式集に合わせて)  $B_n$  を次で定義する

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!} z^{2n}.$$

これにより  $B_n = (-1)^{n-1}(2n)!K_{2n}$  が得られる. □

Baker-Campbell-Hausdorff の公式における  $c_n$  は多項式関数であるが,  $c_n(tX : Y)$  の  $t$  に関する次数が  $d$  の部分として多項式関数  $c_n^d(tX : Y)$  を定める.

**Lemma 5.4**  $c_n^d(tX : Y)$  を上で定めたとき,

$$\begin{aligned}
c_1^0(tX : Y) &= Y, \\
c_n^0(tX : Y) &= 0 \quad (n > 1).
\end{aligned}$$

*Proof.*  $n$  に関する帰納法で証明する.  $n=1$  の場合は  $c_n$  の定義から明らかである.

補題が  $n$  ( $n \geq 1$ ) まで成立すると仮定する.  $n \geq 1$  に対して帰納法の仮定より  $c_n(X : Y)$  は  $O(t)$  であるか  $tX + Y$  であるかのいずれかである. すると (5.2) の第 1 項の  $(1/2)[tX - Y, c_n(tX : Y)]$  は  $O(t)$  である.

(5.2) の第 2 項の最も内側のブラケットの  $[c_{k_{2p}}(tX : Y), tX + Y]$  も同様に  $O(t)$  である. したがって (5.2) は  $O(t)$  である.

こうして, (5.2) より  $n \geq 1$  に対して  $c_{n+1}(tX : Y)$  が  $O(t)$  であることがわかったので, 補題は証明された. □

**Lemma 5.5**  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$  に対して, 次を満たすような  $a_n \in \mathbf{Q}$  が存在する.

$$c_n^1(tX : Y) = a_n[Y, \dots, Y, X]t. \quad (5.3)$$

ここで  $[Y, \dots, Y, X] = [Y, [Y, \dots, [Y, X], \dots], [X] = X$  である.

さらに  $a_n$  は次の漸化式で決定される.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ (n+1)a_{n+1} &= -\frac{\delta_{n1}}{2} - \frac{a_n}{2} - \sum_{1 \leq p \leq [(n-1)/2]} K_{2p} a_{n-2p+1} \quad (n \in \mathbf{Z}_{>0}). \end{aligned}$$

ここで  $\delta_{ij}$  は Kronecker の  $\delta$  である. この漸化式を用いて次のように  $a_n$  が計算できる.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n$	1	-1/2	1/12	0	-1/720	0	1/30240	0

*Proof.* (5.3) を  $n$  に関する帰納法で証明する.  $n = 1$  の時,  $c_1(tX : Y) = tX + Y$  だから (5.3) は成立する.

(5.3) が  $n$  ( $n \geq 1$ ) まで成立していると仮定する. (5.2) における  $c_{n+1}(tX : Y)$  の第 1 項は次のように計算される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[tX - Y, c_n(tX : Y)] &= \frac{1}{2}[tX - Y, a_n[Y, \dots, Y, X]t + O(t^2) + \delta_{n1}Y] \\ &= \frac{\delta_{n1}}{2}[X, Y]t - \frac{1}{2}[Y, a_n[Y, \dots, Y, X]]t + O(t^2) \\ &= \frac{\delta_{n1}}{2}[X, Y]t - \frac{a_n}{2}[Y, \dots, Y, X]t \\ &\in \mathbf{Q}[Y, \dots, Y, X]t + O(t^2). \end{aligned}$$

(5.2) における  $c_{n+1}(tX : Y)$  の第 2 項は次のように計算される.

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq p \leq [n/2]} K_{2p} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_{2p} = n \\ k_j > 0}} [c_{k_1}(tX : Y), \dots, c_{k_{2p}}(tX : Y), tX + Y] \\ &= \sum_p K_{2p} \sum_{k_1, \dots, k_{2p}} [c_{k_1}, \dots, c_{k_{2p}}, tX] + \sum_p K_{2p} \sum_{k_1, \dots, k_{2p}} [c_{k_1}, \dots, c_{k_{2p}}, Y]. \quad (5.4) \end{aligned}$$

(5.4) の第 1 項において,  $O(t^2)$  にならない summand ではすべての  $c_j$  は  $c_1$  でなくてはならない. この場合  $k_1 = \dots = k_{2p} = 1$  だから  $n = 2p$  となる. したがって  $n$  が奇数の場合は (5.4) の第 1 項は  $O(t^2)$  である.  $n$  が偶数の場合は,

$$\begin{aligned} \sum_p K_{2p} \sum_{k_1, \dots, k_{2p}} [c_{k_1}, \dots, c_{k_{2p}}, tX] &= K_n[tX + Y, \dots, tX + Y, tX] + O(t^2) \\ &= K_n[Y, \dots, Y, tX] + O(t^2) \\ &\in \mathbf{Q}[Y, \dots, Y, X]t + O(t^2), \end{aligned}$$

が得られる.

続いて (5.4) の第 2 項についての吟味をする.

$$\begin{aligned} & \sum_p K_{2p} \sum_{k_1, \dots, k_{2p}} [c_{k_1}, \dots, c_{k_{2p}}, Y] \\ &= \sum_p K_{2p} \sum_{k_1, \dots, k_{2p}} \sum_{\substack{\varepsilon_j = 0, 1 \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{2p} = 1}} [c_{k_1}^{\varepsilon_1}, \dots, c_{k_{2p}}^{\varepsilon_{2p}}, Y] + O(t^2), \end{aligned}$$

が得られるが,  $c_{k_{2p}}^0$  は  $Y$  または  $0$  であるから,  $\varepsilon_{2p}$  は  $0$  でない summand においては  $1$  である必要がある. これにより  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{2p-1} = 0$  が導かれる. すると,  $c_{k_j}^0$  は  $k_j = 1$  でないかぎり  $0$  であるから,  $k_1 = \dots = k_{2p-1} = 1$  となり,  $k_{2p} = n - 2p + 1$  が得られる. したがって上の式は次のように計算される.

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq p \leq [n/2]} K_{2p} [c_1^0, \dots, c_1^0, c_{n-2p+1}^1, Y] + O(t^2) \\ &= \sum_p K_{2p} [Y, \dots, Y, c_{n-2p+1}^1, Y] + O(t^2) \\ &= - \sum_p K_{2p} [Y, \dots, Y, c_{n-2p+1}^1] + O(t^2) \\ &= - \sum_p K_{2p} a_{n-2p+1} [Y, \dots, Y, [Y, \dots, Y, X]] t + O(t^2) \\ &\in \mathbf{Q}[Y, \dots, Y, X] + O(t^2). \end{aligned}$$

これで (5.3) が証明された.

次に  $a_n$  の漸化式の証明をする. ここまでの計算をまとめると,

$$\begin{aligned} (n+1)c_{n+1}^1(tX : Y) &= \frac{\delta_{n1}}{2} [X, Y] t - \frac{a_n}{2} [Y, \dots, Y, X] t \\ &\quad + \delta_{n, \text{even}} K_n [Y, \dots, Y, X] t \\ &\quad - \sum_{1 \leq p \leq [n/2]} K_{2p} a_{n-2p+1} [Y, \dots, Y, X] t + O(t^2). \end{aligned}$$

ここで  $\delta_{n, \text{even}}$  は  $n$  が偶数の時  $1$  で,  $n$  が奇数の時  $0$  であるとする. したがって係数を比較すると次を得る.

$$(n+1)a_{n+1} = -\frac{\delta_{n1}}{2} - \frac{a_n}{2} + \delta_{n, \text{even}} K_n - \sum_{1 \leq p \leq [n/2]} K_{2p} a_{n-2p+1}.$$

この式は  $n$  の偶奇によらず次のように書けることが容易に確認できる.

$$(n+1)a_{n+1} = -\frac{\delta_{n1}}{2} - \frac{a_n}{2} - \sum_{1 \leq p \leq [(n-1)/2]} K_{2p} a_{n-2p+1}.$$

□

**Remark 5.6** 計算結果を見ると,

$$\begin{aligned} a_2 &= -1/2, \\ a_n &= K_{n-1} \quad (n \in \mathbf{Z}_{>0}, n \neq 2), \end{aligned}$$

であるように見え、これは  $a_n$  が結局は本質的には Bernoulli 数であることを示している。しかし今の所この式の証明を与えることはできていない。□

この項の最後に Lemma 3.2 を証明する。  $X, A \in \mathfrak{g}$  に対して Lemma 5.4 と Lemma 5.5 から次がわかる。

$$\begin{aligned} C(tX : A) &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^0(tX : A) + c_n^1(tX : A)) + O(t^2) \\ &= A + (a_1 X t + a_2 [A, X] t + a_3 [A, A, X] t + \dots) + O(t^2). \end{aligned}$$

したがって、

$$\exp tX \exp A = \exp C(tX : A) = \exp(A + t(a_1 X + a_2 [A, X] + a_3 [A, A, X] + \dots) + O(t^2)).$$

これは Lemma 3.2 のひとつめの式を示している。次に、

$$\begin{aligned} \exp A \exp tX &= \{\exp(-tX) \exp(-A)\}^{-1} \\ &= \exp(-C(-tX : -A)) \\ &= \exp(-(-A - t(a_1 X - a_2 [A, X] + a_3 [A, A, X] - \dots) + O(t^2))) \\ &= \exp(A + t(a_1 X - a_2 [A, X] + a_3 [A, A, X] - \dots) + O(t^2)), \end{aligned}$$

が得られるがこれはふたつ目の式を証明しており、Lemma 3.2 は証明された。

## 6 Example

この節では  $\mathfrak{g}$  として  $C_n$  型のリー代数、 $\mathfrak{p}$  としてはブルバキの番号付けで単純ルート  $\alpha_1$  に対応する極大放物型部分代数、 $\pi$  としては指標  $\lambda \in \text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C})$  のみを考えて、一般バーマ加群  $M(\lambda)$  の既約条件をこの論説で与えた実現を用いて導いてみる。 $\alpha_1$  に対応する基本ウェイトを  $\varpi_1$  とすると、 $\text{Hom}(\mathfrak{p}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}\varpi_1$  であるから、 $\lambda = \lambda_1 \varpi_1$  なる  $\lambda_1 \in \mathbf{C}$  がとれる。

一般に最高ウェイト加群  $V$  が既約である必要十分条件は、自明でない singular vector が存在しないことである。つまり、全ての  $X \in \mathfrak{g}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$  に対して  $X.v = 0$  となるような  $v \in V$  が、最高ウェイトを持つ元以外には存在しないことである。このような  $v$  が存在すれば、ウェイトベクトルであって自明でない singular vector が必ず存在するので、はじめから  $v$  はウェイトベクトルとしてよい。これを現在の設定で言い直すと、 $M(\lambda)$  が既約である必要十分条件は、定数ではないウェイトベクトル  $f \in \mathbf{C}[\mathfrak{n}^+]$  であって、 $\Psi_\lambda(\mathfrak{g}^+)f = 0$  なるものが存在しないことである。これを利用して以下で  $M(\lambda)$  の既約条件を導いてみる。

まず記号を定める。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{C}) \mid \begin{array}{l} A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}), \\ B, C \in \text{Sym}(n, \mathbf{C}) \end{array} \right\},$$

とおき、 $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の対角行列からなる集合とし、 $i, j \in \{1, \dots, n\}$  に対して

$$\begin{aligned} H_{ij} &= E_{ij} - E_{n+j, n+i}, \\ G_{ij} &= E_{i, n+j} + E_{j, n+i}, \\ F_{ij} &= E_{n+i, j} + E_{n+j, i}, \end{aligned}$$

とおく.  $\mathfrak{g}$  の不変双 1 次形式として  $\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY)/2$  を固定する.  $\varepsilon \in \mathfrak{h}^*$  を  $\varepsilon_i(H_{jj}) = \delta_{ij}$  で定めると,

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2\varepsilon_i\}, \\ \Delta_L^+ &= \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 < i < j \leq n\} \cup \{2\varepsilon_i \mid 1 < i \leq n\}, \\ \Delta_N^{+1} &= \{\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j \mid 1 < j \leq n\}, \\ \Delta_N^{+2} &= \{2\varepsilon_1\},\end{aligned}$$

であり,  $H_{ij}$  は  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ ,  $G_{ij}$  は  $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ ,  $F_{ij}$  は  $-\varepsilon_i - \varepsilon_j$  にそれぞれ対応するルートベクトルである.

さて, まず  $\mathbf{C}[n^+]$  のウェイトベクトルの形を見る.  $\mathbf{C}[n^+] \simeq S(\mathfrak{n}^-)$  だから,  $\mathbf{C}[n^+]$  は環として 1,  $H_{i1} (1 < i \leq n)$ ,  $F_{i1} (1 \leq i \leq n)$  で生成される. これらのウェイトの間にある関係式は,  $H_{i1}F_{i1}$  と  $F_{11}$  のウェイトが  $(\varepsilon_i - \varepsilon_1) + (-\varepsilon_i - \varepsilon_1) = -2\varepsilon_1$  で等しいというものだから,  $\mathbf{C}[n^+]$  のウェイトベクトルは,

$$f = \sum_{0 \leq t_i \leq \min(k_i, l_i)} A_t \prod_{i>1} H_{i1}^{k_i - t_i} \prod_{i>1} F_{i1}^{l_i - t_i} F_{11}^{t_2 + \dots + t_n} \quad (k_i, l_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, A_t \in \mathbf{C}),$$

という形になる.

では次にこのウェイトベクトルが singular vector になると仮定して, 必要な条件を求めてみる.  $1 < r \leq n$  に対して,  $G_{rr} \in \mathfrak{h}^+ \subset \mathfrak{g}^+$  だから,  $\Psi_\lambda(G_{rr})f = 0$  である. Proposition 2.5 を用いると,

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(G_{rr})f &= 2H_{r1} \frac{\partial}{\partial F_{r1}} \cdot \sum_t A_t \prod_{i>1} H_{i1}^{k_i - t_i} \prod_{i>1} F_{i1}^{l_i - t_i} F_{11}^{t_2 + \dots + t_n} \\ &= \frac{2(l_r - t_r)H_{r1}}{F_{r1}} f,\end{aligned}$$

となり, これが 0 であるためには  $l_r = t_r$  が必要で,  $r$  は  $1 < r \leq n$  を動けるので  $(t_2, \dots, t_n) = (l_2, \dots, l_n)$  だから,  $k$  や  $l$  たちを取り直して

$$f = \prod_{i>1} H_{i1}^{k_i} F_{11}^{l_i},$$

としてよい. さらに,  $1 < r < s \leq n$  に対して  $H_{rs} \in \mathfrak{h}^+ \subset \mathfrak{g}^+$  だから,  $\Psi_\lambda(H_{rs})f = 0$  である. したがって上と同様にして,

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(H_{rs})f &= \left( H_{r1} \frac{\partial}{\partial H_{s1}} - F_{s1} \frac{\partial}{\partial F_{r1}} \right) \cdot \sum_t A_t \prod_{i>1} H_{i1}^{k_i - t_i} \prod_{i>1} F_{i1}^{l_i - t_i} F_{11}^{t_2 + \dots + t_n} \\ &= \frac{k_s H_{r1}}{H_{s1}} f,\end{aligned}$$

となり, これが 0 であるためには  $k_s = 0$  であり,  $s$  は  $s > 2$  を自由にとれるので,

$$f = H_{21}^k F_{11}^l,$$

としてよい. 次に  $H_{12} \in \mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{g}^+$  だから,  $\Psi_\lambda(H_{12})f = 0$  であり,

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(H_{12})f &= \left( -2F_{21} \frac{\partial}{\partial F_{11}} + (\lambda_1 - \theta) \frac{\partial}{\partial H_{21}} \right) \cdot \sum_t A_t \prod_{i>1} H_{i1}^{k_i - t_i} \prod_{i>1} F_{i1}^{l_i - t_i} F_{11}^{t_2 + \dots + t_n} \\ &= \left( -\frac{2lF_{21}}{F_{11}} + \frac{(\lambda_1 - k - l + 1)k}{H_{21}} \right) f. \end{aligned}$$

ここで  $\theta$  は  $\mathfrak{n}^+$  上のオイラー作用素である. これが 0 であるためには,  $l = 0$  かつ  $k(\lambda_1 - k - l + 1) = 0$  だが,  $f$  は定数ではないので  $l = 0, k = \lambda_1 + 1$  となる.  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  だが  $f$  が定数でない多項式であるためには  $\lambda_1 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  でなくてはならない.

上で求めた  $\lambda_1 \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  は自明でない singular vector の存在の必要条件であったが,  $G_{rr}, H_{rs}, H_{12}$  で  $\mathfrak{g}$  の単純ルートのルートベクトルはカバーされているので, 十分条件でもある. したがって  $M(\lambda)$  の既約条件は (否定をとって)  $\lambda_1 \notin \mathbf{Z}_{\geq 0}$  である.

## 参考文献

- [1] Gyoja, A. *Further generalization of generalized Verma modules*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29** (1993), 349–395.
- [2] Jakobsen, H. P., *Basic covariant differential operators on hermitian symmetric spaces*, Ann. scient. Èc. Norm. Sup. **18** (1985), 421–436.
- [3] Varadarajan V. S., *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Springer-Verlag, New York (1974).
- [4] Vergne, M. and Rossi, I., *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group*, Acta Math. **136** (1976), 1–59.
- [5] Wachi, A., *Contravariant forms on generalized Verma modules and b-functions*, Hiroshima Math. J. **29** (1999), 193–225.
- [6] Wallach, N. R., *Induced representations of Lie algebras II*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 161–166.