数理解析研究所講究録
1183 巻 2001 年 35-51

path model とそれに関連した諸結果

筑波大学大学院 数学研究科　佐垣 大輔 (Daisuke Sagaki)
Graduate School of Mathematics,
University of Tsukuba.

§1 Introduction – path model の簡単な紹介と記号の準備 –

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ を symmetrizable な generalizd Cartan matrix $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ ($I=\{1,2,\ldots,n\}$) に付随した Kac-Moody algebra とし, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra, P を integral weight 全体の集合とする. $[0,1]:=\{t\in\mathbb{Q}\,|\,0\leq t\leq 1\}$ とし, B を区分的に線形で連続な path $\pi:[0,1]\to P_{\mathbb{Q}}:=\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}P$ で, $\pi(0)=0$ を充たすもの全体の集合とする. さらに適当な symbol θ を 1 つ準備する.

[4] において P. Littelmann は **root operator** と呼ばれる写像を定義した (定義は §2 を参照). これは $B\cup\theta$ から自分自身への写像 e_i, f_i $(i\in I)$ で, crystal basis 上に作用する operator と同様の性質を持っている. 例えば $e_i\pi\neq\theta$ (resp. $f_i\pi\neq\theta$) であるならば $f_ie_i\pi=\pi$ (resp. $e_if_i\pi=\pi$) が成立する.

この root operator を $\pi_\lambda(t):=t\lambda$ (ここで, λ は dominant integral weight である) に次々に作用させて得られる path の集合を $B(\lambda)$ とする. このとき $B(\lambda)$ の元 π は "chain condition" と呼ばれる条件を満たす W/W_λ の元の列 $\underline{\tau}:\tau_1>\tau_2>\cdots>\tau_s$ と有理数の列 $\underline{a}:0=a_0<a_1<\cdots<a_s=1$ との組と 1 対 1 に対応する: $\pi=(\underline{\tau},\underline{a})$. ここで W は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群であり $W_\lambda:=\{w\in W\,|\,w(\lambda)=\lambda\}$ である. さらに "$\geq$" は以下のようにして定めた W/W_λ 上の "Bruhat order" である: W/W_λ の各 coset には length が最小の元が唯一つ存在することが知られている. その元の length をその coset の "length" と定めて W/W_λ 上に "length fuction" を定義する. それを用いて W/W_λ 上に Bruhat order を定義する (詳細は §3 を参照). $B(\lambda)$ の元は class λ の **Lakshmibai-Seshadri path** (L-S path) と呼ばれ, 以下で紹介する定理に見られるように非常に重要かつ基本的である (L-S path については §4 参照).

さて L-S path に関する定理を幾つか紹介しよう. ρ を Weyl 元, すなわち任意の $i\in I$ に対して, $\langle\rho,\alpha_i^\vee\rangle=1$ を満たす $\mathfrak{h}^*$ の元とする. また ℓ を W 上の length function とし, $\mathrm{sgn}(w):=(-1)^{\ell(w)}$ と定める. さらに $L(\lambda)=\bigoplus_{\eta\in\mathfrak{h}^*}L(\lambda)_\eta$ を highest weight λ の irreducible highest weight $\mathfrak{g}$-module とする. このとき次の定理が成立する [4, §5], [7, Proposition 4.1]:

Theorem 1.1. (Weyl-Kac formula) λ を dominant integral weight とする. このとき, 以下の式が成立する:

$$\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w\rho}\sum_{\pi\in B(\lambda)}e^{\pi(1)}=\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w(\lambda+\rho)}. \tag{1.1}$$

したがって, 特に $\sum_{\pi\in B(\lambda)}e^{\pi(1)}=\mathrm{ch}\,L(\lambda)$ が成立する. □

次に $\pi=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_s\,;a_0,a_1,\ldots,a_s)\in B(\lambda)$ に対して $\varphi(\pi):=\tau_1$ と定め, $B(\lambda)_\tau:=\{\pi\in B(\lambda)\,|\,\varphi(\pi)\le\tau\}$ $(\tau\in W/W_\lambda)$ とおく. また次のような operator を定義する (**Demazure operator**):

$$D_i(e^\mu):=\frac{e^{\mu+\rho}-e^{r_i(\mu+\rho)}}{1-e^{-\alpha}}e^{-\rho} \tag{1.2}$$

さらに $E_\tau(\lambda):=U(\mathfrak{n}_+)u_\tau$ (**Demazure module**) とする. ここで $u_\tau\in L(\lambda)_{\tau(\lambda)}\setminus\{0\}$ である. また $\mathfrak{n}_+$ は positive root に対応する root space で生成される $\mathfrak{g}$ の subalgebra であり, $U(\mathfrak{n}_+)$ は $\mathfrak{n}_+$ の universal enveloping algebra である. このとき次の定理が成立する [4, §5]:

Theorem 1.2. (Demazure character formula) λ を dominant integral weight とする. また $\tau\in W/W_\lambda$ とし, $\tau=r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_s}$ を reduced expression とする. このとき, 以下の式が成立する:

$$\sum_{\pi\in B(\lambda)_\tau}e^{\pi(1)}=D_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_s}(e^\lambda) \tag{1.3}$$

したがって, 特に $\sum_{\pi\in B(\lambda)_\tau}e^{\pi(1)}=\mathrm{ch}\,E_\tau(\lambda)$ が成立する. □

λ,μ が dominant integral weight であるとき, $L(\lambda)\otimes L(\mu)$ は完全可約であることが知られている [8, Corollary 6.5.1].

Theorem 1.3. (Littlewood-Richardson rule) λ,μ を dominant integral weight とする. このとき, $L(\lambda)\otimes L(\mu)$ の既約分解は次で与えられる:

$$L(\lambda)\otimes L(\mu)=\bigoplus_{\substack{\pi\in B(\lambda)\\ \pi:\mu\text{-dominant}}}L(\mu+\pi(1)) \tag{1.4}$$

ここで, $\pi\in B(\lambda)$ が μ-dominant であるとは, 任意の $t\in[0,1]$ に対して $\mu+\pi(t)$ が dominant Weyl chamber に含まれるときにいう. □

またこれに関連して次の定理も成立する:

Theorem 1.4. (PRV conjecture) $\tau, \sigma \in W$ に対して, $\nu := \tau(\lambda) + \sigma(\mu)$ が dominant integral になるとき, $L(\nu)$ は $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ の分解に現われる. □

$S \subset I$ とし, $\mathfrak{g}_S$ を S に対応する $\mathfrak{g}$ の Levi subalgebra とする. $\mathfrak{g}$-module V に対して, V を制限によって $\mathfrak{g}_S$-module と見なしたものを $\operatorname{res}_S V$ で表すことにする. このとき, [8, Theorem 6.5.1] より $\operatorname{res}_S L(\lambda)$ は完全可約である. これの irreducible $\mathfrak{g}_S$-module への分解は次で与えられる [4, §7]:

Theorem 1.5. (Branching rule) λ を dominant integral weight とする. このとき $\operatorname{res}_S L(\lambda)$ は次のように分解する:

$$\operatorname{res}_S L(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\pi \in B(\lambda) \\ \pi : \mathfrak{g}_S\text{-dominant}}} L(\pi(1)) \tag{1.5}$$

ここで, $\pi \in B(\lambda)$ が $\mathfrak{g}_S$-dominant であるとは, 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\pi(t)$ が $\mathfrak{g}_S$ の root system に関する dominant Weyl chamber に含まれるときにいう. □

これらの定理を用いて, 例えば Demazure module の次元 $\dim E_\tau(\lambda)$ や Levi subalgebra による分解の explicit な公式を求めたいわけだが, そのためにはまずは class λ の L-S path の集合 $B(\lambda)$ を決定しなくてはならない. ところがこれは Bruhat order の複雑さや chain condition のために一般にはかなり困難な作業である ($\mathfrak{g}$ の rank が 2 でも一般の dominant integral weight λ に対して $B(\lambda)$ を与えるのは難しい). しかしこれは以下のような方法で, 場合によっては回避できることがある. 説明に入る前に幾つか記号を準備しよう. $\pi_1, \pi_2 \in B$ および $0 < a < 1$ に対して,

$$\pi_1 *_a \pi_2(t) := \begin{cases} \pi_1(a^{-1}t) & \text{if } \ 0 \leq t \leq a \\ \pi_1 + +\pi_2((1-a)^{-1}(t-a)) & \text{if } \ a \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

と定義する (**path の 連結**). さらに $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n \in B$ に対して,

$$\pi_1 * \pi_2 * \cdots * \pi_n := (\cdots((\pi_1 *_{\frac{1}{2}} \pi_2) *_{\frac{2}{3}} \pi_3) \cdots) *_{\frac{n-1}{n}} \pi_n \tag{1.7}$$

と定める.

さて, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を dominant integral weights としたとき,

$$\begin{aligned} B_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)} &:= B(\lambda_1) * B(\lambda_2) * \cdots * B(\lambda_n) \\ &= \left\{ \pi_1 * \pi_2 * \cdots * \pi_n \mid \pi_i \in B(\lambda_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n \right\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

は root operator の作用で不変であることが分かる (cf. Lamma 5.2). 一方, $\lambda :=$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ とし, $\pi_{\underline{\lambda}} := \pi_{\lambda_1} * \pi_{\lambda_2} * \cdots * \pi_{\lambda_n}$ と定め, これに root operator を次々

に作用させて得られる path の集合を $B(\underline{\lambda})$ とする．このとき，$B(\underline{\lambda}) \subset B_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)}$ である．さらに $B_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)}$ の元 π が $B(\underline{\lambda})$ に含まれる (このとき π は **standard** であるという) ための必要十分条件も知られている [6, Theorem 10.1]:

Theorem 1.6. $\pi = \pi_1 * \pi_2 * \ldots \pi_n \in B_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$, $\pi_i = (\tau^i_1, \ldots, \tau^i_{s_i}; a^i_0, \ldots, a^i_{s_i}) \in B(\lambda_i)$ とする． このとき，$\pi \in B(\underline{\lambda})$ であるための必要十分条件は次のような $\{\sigma^k_j\}_{\substack{j=1,2,\ldots,s_k \\ k=1,2,\ldots,n}} \subset W/W_\lambda$ が存在することである:

(1) $\sigma^1_1 \geq \cdots \geq \sigma^1_{s_1} \geq \sigma^2_1 \geq \cdots \geq \sigma^{n-1}_{s_{n-1}} \geq \sigma^n_1 \geq \cdots \geq \sigma^n_{s_n}$

(2) $p_k(\sigma^k_j) = \tau^k_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s_k\,;\, k = 1, 2, \ldots, n)$

ここで $p_i : W/W_\lambda \to W/W_{\lambda_i}$ は自然な写像である． □

この定理をより $B(\underline{\lambda})$ に対しても Theorem 1.1 ～ Theorem 1.5 に対応する定理が成立することが分かる (Theorem 5.4 ～ Theorem 5.7). これによって，例えば fundamental weight Λ_i 達に対して $B(\Lambda_i)$ を決めることが出来れば，任意の dominant integral weight λ に対しては λ を fundamental weight の一次結合で表して $B(\underline{\lambda})$ を考えることによって，様々な結果を導くことが出来るかもしれないわけである (一般にはやはり難しいが....).

本小論説の構成は以下の通りである．まず，この §1 では path model を簡単に紹介し，またそれを用いて得られる主要な結果を紹介してきた．またこのセクションは記号の準備も兼ねている．§2 では，path model の理論において，中心的な役割を果たす root operator を定義する．これの定義は論文によって，微妙に違うのだがここでは [5] での定義を分かりやすく書き換えたものを採用した．§3 では W/W_λ について述べる．これは後の L-S path や standard path についての議論で必要になる．§4 では path model の基本とも言える Lakshmibai-Seshadri path (L-S path) を定義する．ここでは具体的な例として $\mathfrak{g}$ の rank が 2 で λ が fundamental weight の場合に class λ の L-S path の集合 $B(\lambda)$ を決定する (Example 4.4). 最後に §5 では standard path について述べる．ここでは特殊な設定の元で上の Theorem 1.6 をより簡単にしたものを与える (Theorem 5.8). さらにそれを用いて，すでに知られている事実ではあるが $\mathfrak{g} = A_n$, $S = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ の場合の branching rule を与える (Example 5.9). 後，Appendix として $\mathfrak{g}$ が finite type の場合の Demazure module $E_\tau(\lambda)$ の次元公式を付け加えた.

Notation. Kac-Moody algebra に関する記号は特に断らない限り [3] に従うことにする:

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$: symmetrizable generalized Cartan matrix, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$: A に付随した Kac-Moody algebra
$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra
$\mathfrak{g}_S$: $S \subset I$ に対応する Levi subalgebra

$\{\alpha_i\}_{i\in I}$: simple root の集合, $\{\alpha_i^\vee\}_{i\in I}$: simple coroot の集合
Δ_+^{re} : positive real root の集合

P : integral weight 全体の集合, P_+ : dominant integral weight 全体の集合
ρ : Weyl 元, i.e. $\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 1$ for all $i \in I$

$W = \langle r_i \,|\, i \in I \rangle$: $\mathfrak{g}$ の Weyl 群, $W_\lambda := \{w \in W \,|\, w(\lambda) = \lambda\}$
$\ell : W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$: W 上の length function, $\mathrm{sgn}(w) := (-1)^{\ell(w)}$
$\geq$: W 上の Bruhat order

$L(\lambda) = \bigoplus_{\eta\in\mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\eta$: highest weight λ の irreducible highest weight module
$\mathrm{res}_S V$: $\mathfrak{g}$-module V を制限によって $\mathfrak{g}_S$-module と見なしたもの

§2 root operator の定義

このセクションでは **root operator** e_i, f_i $(i \in I)$ を定義する. ここでの定義は [5] の定義を分かりやすいように書き直したものである. まず記号を準備しよう. $[0,1] := \{t \in \mathbb{Q} \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$ とし, B を区分的に線形で連続な path $\pi : [0,1] \to P_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ で, $\pi(0) = 0$ をみたすもの全体の集合とし, $\pi \in B$ と $i \in I$ に対して, $h_i^\pi(t) := \langle \pi(t), \alpha_i^\vee \rangle$, $m_i^\pi := \min h_i^\pi(t)$ と定める. さらに適当な symbol θ を 1 つ準備する.

さて root operator $e_i : B \cup \{\theta\} \to B \cup \{\theta\}$ を定義しよう. まず $e_i\theta := \theta$ とし, $m_i^\pi > -1$ のときは $e_i\pi := \theta$ と定める. $m_i^\pi \leq -1$ のとき,

$$t_1 := \min\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi\}$$
$$t_0 := \max\{t' \in [0,t_1] \mid h_i^\pi(t) \geq m_i^\pi + 1 \text{ for all } t \in [0,t']\}$$

と定める. このとき $t_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_r = t_1$ で次の (1) または (2) が成立するものが存在することがわかる:

(1) $h_i^\pi(s_{k-1}) = h_i^\pi(s_k)$ であり, さらに任意の $t \in [s_{k-1}, s_k]$ に対して, $h_i^\pi(t) \geq h_i^\pi(s_{k-1})$ が成立する,

(2) $h_i^\pi(t)$ は $[s_{k-1}, s_k]$ 上で狭義単調減少していて, 任意の $t \in [t_0, s_{k-1}]$ に対して, $h_i^\pi(t) \geq h_i^\pi(s_{k-1})$ が成立する.

この分割を用いて, e_i を次のように定義する:

$$e_i\pi(t) := \begin{cases} \pi(t) & \text{if} \quad 0 \le t \le t_0 = s_0 \\ \pi(t) - \langle \pi(s_{k-1}) - \pi(s_0), \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i & \text{if} \quad t \in [s_{k-1}, s_k] \text{ of } (1) \\ \pi(t) - \langle \pi(t) - \pi(s_0), \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i & \text{if} \quad t \in [s_{k-1}, s_k] \text{ of } (2) \\ \pi(t) + \alpha_i & \text{if} \quad t_1 = s_r \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

次に root operator f_i を定義しよう. まず $f_i\theta := \theta$ とし, $h_i^\pi(1) - m_i^\pi < 1$ のときは $f_i\pi := \theta$ と定める. $h_i^\pi(1) - m_i^\pi \ge 1$ のとき,

$$\begin{aligned} t_0 &:= \max\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m\} \\ t_1 &:= \min\{t' \in [t_0, 1] \mid h_i^\pi(t) \ge m_i^\pi + 1 \quad \text{for any } t \in [t', 1]\} \end{aligned}$$

と定める. このとき $t_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_r = t_1$ で次の (1) または (2) が成立するものが存在することがわかる:

(1) $h_i^\pi(s_{k-1}) = h_i^\pi(s_k)$ であり, さらに任意の $t \in [s_{k-1}, s_k]$ に対して, $h_i^\pi(t) \ge h_i^\pi(s_{k-1})$ が成立する,

(2) $h_i^\pi(t)$ は $[s_{k-1}, s_k]$ 上で狭義単調増加していて, 任意の $t \in [s_k, t_1]$ に対して, $h_i^\pi(t) \ge h_i^\pi(s_k)$ が成立する.

この分割を用いて, $f_i\pi$ を次のように定義する:

$$f_i\pi(t) := \begin{cases} \pi(t) & \text{if} \quad 0 \le t \le t_0 = s_0 \\ \pi(t) - \langle \pi(s_{k-1}) - \pi(s_0), \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i & \text{if} \quad t \in [s_{k-1}, s_k] \text{ of } (1) \\ \pi(t) - \langle \pi(t) - \pi(s_0), \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i & \text{if} \quad t \in [s_{k-1}, s_k] \text{ of } (2) \\ \pi(t) - \alpha_i & \text{if} \quad t_1 = s_r \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

Remark 2.1. e_i および f_i は分割の取り方に依らないことが分かる.

Example 2.2. $\mathfrak{g} = A_2$ とし, $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2$ とする. $\pi_\lambda(t) := t\lambda$ に root operator を次々に作用させていくと次のような path が得られる. ここで $\pi' = f_i\pi$ であるとき, $\pi \xrightarrow{\alpha_i} \pi'$ と表すことにする.

$$\begin{tikzcd}
 & & t\lambda \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2"] & & \\
 & t\alpha_2 \arrow[dl, "\alpha_2"'] & & t\alpha_1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
\pi_2 \arrow[dr, "\alpha_2"'] & & & & \pi_1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \\
 & -t\alpha_2 \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & -t\alpha_1 \arrow[dl, "\alpha_2"] & \\
 & & -t\lambda & &
\end{tikzcd}$$

但し, π_i $(i=1,2)$ は次のような path である:

$$\pi_i = \begin{cases} -t\alpha_i & \text{if } 0 \le t \le 1/2 \\ (t-1)\alpha_i & \text{if } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

§3 W/W_λ について

$\lambda, \mu \in P_+$ を $\lambda - \mu \in P_+$ を満たすものとする. このとき [3, Proposition 3.12] により W_λ および W_μ はそれに含まれる simple reflection によって生成されているので $W_\lambda \subset W_\mu$ となる. さらに W_μ/W_λ の各 coset には長さが最小の元がただ一つ存在することが知られている. したがって,

$$W_\mu^\lambda := \{ w \in W_\mu \mid \ell(ww') \ge \ell(w) \text{ for any } w' \in W_\lambda \} \tag{3.1}$$

とおくと W_μ^λ の元と W_μ/W_λ の元は自然に 1 対 1 に対応する (W_μ^λ は W_μ/W_λ の完全代表系を与えている). 以下ではこれらを同一視し, それによって W_μ/W_λ を W の部分集合として扱うことにする. また dominant integral weight λ が 1 つ与えられていて, W/W_λ を考えているときも同様である.

Lemma 3.1. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P_+$ とし, $\mu_k := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ とおく.

(1) $W/W_{\mu_n} = \{ ww_2w_3\cdots w_n \mid w \in W/W_{\mu_1},\ w_j \in W_{\mu_{j-1}}/W_{\mu_j} \}$

(2) $ww_2w_3\cdots w_n \in W/W_{\lambda_n}$ のとき, $\ell(ww_2w_3\cdots w_n) = \ell(w) + \ell(w_2) + \ell(w_3) + \cdots + \ell(w_n)$ が成立する.

(3) $k \ge l$ であるなら, $W/W_{\mu_k} \supset W/W_{\mu_l}$ である.

Proof. (1) は n に関する induction で容易に示せる. (2) は (1) の証明と平行して示せる. (3) は (1) より得られる. □

次に W/W_λ 上に Bruhat order を定義する (記号の乱用になるが, W 上の Bruhat order と同じ記号 "$\ge$" で表すことにする). $\overline{\cdot}: W \to W/W_\lambda$ を自然な写像とする.

Definition 3.2. $\tau, \tau' \in W/W_\lambda$ に対して, $\tau' = \tau$ であるか, 以下の (1) ~ (3) を満たす W/W_λ の元の列 $\{\tau_i\}_{i=0}^p$ が存在するときに $\tau' \ge \tau$ と定める:

(1) $\tau_0 = \tau$, $\tau_p = \tau'$,

(2) $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して, $\ell(\tau_i) > \ell(\tau_{i-1})$ が成立する,

(3) $i = 1, 2, \ldots, p$ に対して, $\overline{\tau_i} = r_{\beta_i}\overline{\tau_{i-1}}$ を満たす $\beta_i \in \Delta_+^{\mathrm{re}}$ が存在する

この W/W_λ 上の Bruhat order は, W 上の Bruhat order の持つ性質の多くを引き継いでいる. それらのうちで最も使用頻度が高いのは次であろう.

Lemma 3.3. (Subword condition) $\tau, \tau' \in W/W_\lambda$ に対して, W/W_λ において $\tau' \geq \tau$ であるための必要十分条件は W において $\tau' \geq \tau$ であることである. したがって, 特に W/W_λ 上の Bruhat order $\geq$ に関してもいわゆる subword condition が成立する.

Proof. $\tau' \geq \tau$ in W であれば $\tau' \geq \tau$ in W/W_λ であることは定義より明らか. 逆は [2, Theorem 2.2] から得られる. 後半の主張は前半より明らか. □

§4 Lakshmibai-Seshadri path

このセクションでは path model の基本とも言える Lakshmibai-Seshadri path について説明する. まず "a-chain" という概念を導入しよう.

Definition 4.1. $\tau, \tau' \in W/W_\lambda$, $0 < a < 1$ とする. W/W_λ の元の列 $\tau = \sigma_0 > \sigma_1 > \cdots > \sigma_s = \tau'$ が, 任意の $i = 1, 2, \ldots, s$ に対して $\ell(\sigma_i) = \ell(\sigma_{i-1}) - 1$ を満たし, さらにある $\beta_i \in \Delta_+^{\mathrm{re}}$ が存在して $\overline{\sigma_i} = r_{\beta_i}\overline{\sigma_{i-1}}$ かつ $a\langle \sigma_i(\lambda), \beta_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ となるとき, この列を (τ, τ') に対する a-chain という.

ここで Lakshmibai-Seshadri path の定義を与える:

Definition 4.2. W/W_λ の元の列 $\underline{\tau} : \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_s$ と有理数の列 $\underline{a} : 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = 1$ との組 $\pi = (\underline{\tau}, \underline{a})$ が class λ の **Lakshmibai-Seshadri path** (以下, L-S path) であるとは, 任意の $i = 1, 2, \ldots, s-1$ に対して, (τ_i, τ_{i+1}) に対する a_i-chain が存在するときにいう. class λ の L-S path 全体の集合を $B(\lambda)$ で表す. さらに π に対して次の path を対応させる:

$$\pi(t) = \sum_{i=1}^{j-1}(a_i - a_{i-1})\tau_i(\lambda) + (t - a_{j-1})\tau_j(\lambda), \quad \text{if} \quad a_{j-1} \leq t \leq a_j$$

Theorem 4.3. [5, Corollary 2, Corollary 3] $B(\lambda)$ は root operator の作用で不変である. さらに $B(\lambda)$ は $\pi_\lambda(t) := t\lambda$ に root operator を次々に作用させて得られる path の集合と一致している. □

L-S path に関する定理は §1 の Theorem 1.1 ～Theorem 1.5 を参照されたい.

Example 4.4. (rank 2 の場合) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の場合を考える (ここでの結果は [9, Lemma 1] の一般化になっている). Λ_i $(i = 1, 2)$ を fundamental weight, すなわち $\Lambda_i(\alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ を充たすものとする. ここでは例として, $B(\Lambda_i)$ を求めてみよう.

$$\tau_{2n}^+ := (r_2 r_1)^n, \quad \tau_{2n+1}^+ := r_1(r_2 r_1)^n, \qquad \tau_{2n}^- := (r_1 r_2)^n, \quad \tau_{2n+1}^- := r_2(r_1 r_2)^n,$$

とおくと, $W = \langle r_1 \rangle \ltimes \langle r_2 r_1 \rangle = \langle r_2 \rangle \ltimes \langle r_1 r_2 \rangle$ であるから,

$$W/W_{\Lambda_i} = \left\{ \tau_k^{\varepsilon(i)} \,|\, 0 \le k \le N-1 \right\}$$

となっている. ここで $N := |\langle r_2 r_1 \rangle|$ であり, $\varepsilon(1) := +$, $\varepsilon(2) := -$ である. まず n に関する induction により, $n \ge 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\langle \tau_{2n}^{+}(\Lambda_1), \alpha_1^{\vee} \rangle = [n] + [n-1], &\quad& \langle \tau_{2n}^{+}(\Lambda_1), \alpha_2^{\vee} \rangle = -b[n-1] \\
&\langle \tau_{2n+1}^{+}(\Lambda_1), \alpha_1^{\vee} \rangle = -[n] - [n-1], && \langle \tau_{2n+1}^{+}(\Lambda_1), \alpha_2^{\vee} \rangle = b[n], \\
&\langle \tau_{2n}^{-}(\Lambda_2), \alpha_1^{\vee} \rangle = -a[n-1], && \langle \tau_{2n}^{-}(\Lambda_2), \alpha_2^{\vee} \rangle = [n] + [n-1] \\
&\langle \tau_{2n+1}^{-}(\Lambda_2), \alpha_1^{\vee} \rangle = a[n], && \langle \tau_{2n+1}^{-}(\Lambda_2), \alpha_2^{\vee} \rangle = -[n] - [n-1]
\end{aligned}$$

が成立することがわかる. ここで $[n] := \xi^n + \xi^{n-2} + \cdots + \xi^{-n+2} + \xi^{-n}$ $(n \ge 0)$, $[-1] := 0$ であり, ξ は $x^2 - (ab-2)x + 1 = 0$ の解 (の 1 つ) である. $n \ge 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
d_{2n}^{+} &:= -b[n-1], &\quad d_{2n+1}^{+} &:= -[n] - [n-1] \\
d_{2n}^{-} &:= -a[n-1], &\quad d_{2n+1}^{-} &:= -[n] - [n-1]
\end{aligned}$$

とおく. このとき, $k \ge 1$ に対して, $d_k^{\pm}$ と $d_{k+1}^{\pm}$ は互いに素であることがわかる. 実際, $n \ge 1$ に対して d_{2n}^{+} と d_{2n+1}^{+} が互いに素であることを示してみよう (残りの場合も同様に示せる). まず b と $[n] + [n-1]$ が互いに素であることを示す. 解と係数の関係より $[n]$ が ab の整数係数の多項式であることに注意すれば次のことを示せば十分である:

claim 1. $m \ge 0$ に対して, $[m] + [m-1] \,\big|_{b=0} = (-1)^m$

m に関する induction で示す. $m = 0$ のとき, $[0] + [-1] = 1$ より成立する. ある $m \ge 0$ まで成立したとする. $[m+1] = \xi[m] + \xi^{-m-1}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
[m+1] + [m] &= \xi[m] + \xi^{-m-1} + \xi[m-1] + \xi^{-m-2} \\
&= \xi\big([m] + [m-1]\big) + (\xi^{-m-1} + \xi^{-m-2})
\end{aligned}$$

ここで $b = 0$ を代入すると, $\xi \,\big|_{b=0} = -1$ と induction の仮定より主張が得られる.

後は $[n] + [n-1]$ と $[n-1]$ が互いに素であることを示せばよい. このことを示すには次のことを示せば十分である:

claim 2. $m \ge 1$ に対して, $[m]$ と $[m-1]$ は互いに素である.

m に関する induction で示す. $m = 1$ のとき, $[1] = ab - 2$, $[0] = 1$ より成立する. ある $m \ge 1$ まで成立したとして, $[m+1]$ と $[m]$ が互いに素であることを示す.

$$
\begin{aligned}
[m+1] &= \xi^{m+1} + \xi^{m-1} + \cdots + \xi^{-m+1} + \xi^{-m-1} \\
&= \left(\xi + \xi^{-1}\right)\left(\xi^{m} + \xi^{m-2} + \cdots + \xi^{-m+2} + \xi^{-m}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad - \left(\xi^{m-1} + \xi^{m-3} + \cdots + \xi^{-m+3} + \xi^{-m+1}\right) \\
&= (ab-2)[m] - [m-1]
\end{aligned}
$$

induction の仮定より, $[m]$ と $[m-1]$ は互いに素である. したがって, 上の式から $[m+1]$ と $[m]$ は互いに素である. これによって主張が示された.

$\tau \in W/W_{\Lambda_i}$ が $\ell(\tau) = \ell(\tau_k^{\varepsilon(i)}) \pm 1$ を満たしているなら, $\tau = \tau_{k\pm1}^{\varepsilon(i)}$ であることが分かる. このことと上で示したことから $m \geq 2$ であるなら, 任意の $0 < a < 1$ に対して $(\tau_{k+m}^{\pm}, \tau_k^{\pm})$ に対する a-chain は存在しないことがわかる. したがって, $B(\Lambda_i)$ は次のようになる:

$$
B(\Lambda_i) = \left\{ (\tau_{k+m}^{\varepsilon(i)}, \tau_{k+m-1}^{\varepsilon(i)}, \ldots, \tau_k^{\varepsilon(i)} ;\, 0,\, a_{k+m},\, a_{k+m-1},\, \ldots,\, a_{k+1},\, 1) \right\}
$$

ここで a_j は (i) $0 < a_{k+m} < a_{k+m-1} < \cdots < a_{k+1} < 1$, (ii) $a_j d_j^{\varepsilon(i)} \in \mathbb{Z}$ を満たしていなくてはいけない.

§5 standard path

このセクションでは path が standard になるための必要十分条件について述べる. 記号は §1 で導入したもの用いる. また以下では $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P_+$ とし, $\mu_k := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$, $\lambda := \mu_n$ とおく. まず次の言葉を準備する.

Definition 5.1. $\pi \in B$ が **integrality property** を持つとは, 任意の $i \in I$ に対して, $m_i^{\pi} = \min\langle \pi(t), \alpha_i^{\vee} \rangle \in \mathbb{Z}$ であるときにいう.

Lemma 5.2. [5, §2.6] integrality property を持つ $\pi_1, \pi_2 \in B$ に対して, $x_i(\pi_1 * \pi_2) = \theta$ or $(x_i\pi_1) * \pi_2$ or $\pi_1 * (x_i\pi_2)$ である. ここで, $x_i = e_i$ or f_i である. □

Remark 5.3. 上の Lemma で $x_i(\pi_1 * \pi_2)$ がどのような場合に, 右辺のどれと一致するかを明確に記述することも出来るが, 以下の議論では必要としないので省略した (cf. [5, Lemma 2.7]).

L-S path は integrality property を持つことが知られている [5, Lemma 4.5 (d)]. したがって, $B_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$ は root operator の作用で不変であることが分かる. さらに $\pi_{\underline{\lambda}} \in B_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$ であるから, $B(\underline{\lambda}) \subset B_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$ となる. $\pi \in B_{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$ が $B(\underline{\lambda})$ に含まれるとき π は **standard** であるという.

さて π が standard になるための必要十分条件は Theorem 1.6 で述べた通りである. この Theorem の主張に現れる W/W_λ の元の列 $\{\sigma_j^k\}$ のことを π に対する **defining chain** と呼ぶ. またこのとき σ_1^1 を defining chain の "先頭" と呼ぶことにする. Theorem 1.6 より, $B(\underline{\lambda})$ に対しても Theorem 1.1 〜 1.5 に対応する定理が成立することがわかる (証明は L-S path の場合と同様).

Theorem 5.4.

$$\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w\rho}\sum_{\pi\in B(\underline{\lambda})}e^{\pi(1)}=\sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)e^{w(\lambda+\rho)} \tag{5.1}$$

が成立する. したがって, 特に $\sum_{\pi\in B(\underline{\lambda})}e^{\pi(1)}=\mathrm{ch}\,L(\lambda)$ が成立する □

Theorem 5.5. [6, Corollary 1] $\tau\in W/W_\lambda$ とし, $\tau=r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_s}$ を reduced expression とする. このとき,

$$\sum_{\pi\in B(\underline{\lambda})_\tau}e^{\pi(1)}=D_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_s}(e^\lambda)=\mathrm{ch}\,E_\tau(\lambda) \tag{5.2}$$

が成立する. ここで $B(\underline{\lambda})_\tau$ は "先頭" が τ 以下になる defining chain を持つもの $B(\underline{\lambda})$ の元全体の集合とする. □

Theorem 5.6. $\mu\in P_+$ とする. このとき,

$$L(\lambda)\otimes L(\mu)=\bigoplus_{\substack{\pi\in B(\underline{\lambda})\\ \pi:\mu\text{-dominant}}}L(\mu+\pi(1)) \tag{5.3}$$

ここで, $\pi\in B(\underline{\lambda})$ が μ-dominant であるとは, 任意の $t\in[0,1]$ に対して $\mu+\pi(t)$ が dominant Weyl chamber に含まれるときにいう. □

Theorem 5.7. $S\subset\{1,2,\ldots,n\}$ とする. このとき,

$$\mathrm{res}_S\,L(\lambda)=\bigoplus_{\substack{\pi\in B(\underline{\lambda})\\ \pi:\mathfrak{g}_S\text{-dominant}}}L(\pi(1)) \tag{5.4}$$

ここで, $\pi\in B(\underline{\lambda})$ が $\mathfrak{g}_S$-dominant であるとは, 任意の $t\in[0,1]$ に対して $\pi(t)$ が $\mathfrak{g}_S$ の root system に関する dominant Weyl chamber に含まれるときにいう. □

さて特殊な状況の下で Theorem 1.6 を書き換えてみよう.

Theorem 5.8. 記号は Theorem 1.6 と同じとする. 任意の $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して, $W_{\lambda_k}/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}=W_{\mu_k}/W_{\mu_{k+1}}$ であるとしよう. このとき π が standard であるための必要十分条件は, 各 $k=1,2,\ldots,n-1$ に対して $\kappa_k\in W_{\lambda_k}/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ で, $\tau_{s_k}^k\kappa_k\geq\tau_1^{k+1}$ in $W/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ が成立するものが存在することである.

Proof. まず π が standard であったとしよう. Theorem 1.6 より π に対する defining chain $\{\sigma_j^k\}$ が存在する. このとき, $q_k : W/W_\lambda \to W/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ を自然な写像とすると, $q_k(\sigma_{s_k}^k) \geq q_k(\sigma_1^{k+1})$ in $W/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ である. 実際, Lemma 3.1 (1) を使って, $\sigma_{s_k}^k = w_1 w_2$ ($w_1 \in W/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$, $w_2 \in W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}/W_\lambda$) と表すと, σ_1^{k+1} は $\sigma_{s_k}^k$ の subword であるから, $\sigma_{k+1}^1 = w_1' w_2'$ となっている (ここで $'$ は subword であることを表す). $q_k(\sigma_{s_k}^k) = w_1$, $q_k(\sigma_1^{k+1}) = w_1'$ であるから subword condition より主張が得られる. さらに Lemma 3.1 と defining chain の定義 (2) から, ある $\kappa_k \in W_{\lambda_k}/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ が存在して, $q_k(\sigma_{s_k}^k) = \tau_{s_k}^k \kappa_k$ および $q_k(\sigma_1^{k+1}) \geq \tau_1^{k+1}$ である. したがって, これらをあわせると $\tau_{s_k}^k \kappa_k \geq \tau_1^{k+1}$ が得られる.

逆に各 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して, $\tau_{s_k}^k \kappa_k \geq \tau_1^{k+1}$ in $W/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ を満たす $\kappa_k \in W_{\lambda_k}/W_{\lambda_k+\lambda_{k+1}}$ が存在したとする. ここで Lemma 3.1 (3) より $\tau_{s_k}^k \kappa_k$, $\tau_1^{k+1} \in W/W_{\mu_{k+1}}$ であり, さらに τ_1^{k+1} が $\tau_{s_k}^k \kappa_k$ の subword であることに注意する. ここで $\sigma_j^k := \tau_j^k \kappa_k \kappa_{k+1} \cdots \kappa_{n-1}$ と定める. このとき, 仮定から $\kappa_k \in W_{\mu_k}/W_{\mu_{k+1}}$ であることに注意すれば, Lemma 3.1 (1) より $\sigma_j^k \in W/W_\lambda$ である. さらに Lemma 3.1 (2) と subword condition から, この列が defining chain を与えていることがわかる. したがって, π は standard となる. □

Example 5.9. (A_n の場合) ここでは $\mathfrak{g} = A_n$, $S = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ とし, $\lambda = x_1\Lambda_1 + \cdots + x_n\Lambda_n$ ($x_i \geq 1$) とする. Theorem 5.8 を使って次の式を示そう:

$$\operatorname{res}_S L(\lambda) = \bigoplus_{\substack{0 \leq y_i \leq x_i, \\ i=1,2,\ldots,n}} L\big(\lambda - \textstyle\sum_{i=1}^n (y_1 + \cdots + y_i)\alpha_i\big) \tag{5.5}$$

まず A_n の root は $\alpha_l + \alpha_{l+1} + \cdots + \alpha_m$ という形をしているので, $\sigma \in W/W_{\Lambda_k}$ に対して, $\langle \sigma(\Lambda_k), \alpha_j^\vee \rangle = \pm 1$ or 0 である. したがって, class Λ_k の L-S path は $(\sigma; 0, 1)$ という形をしている. 以下では記号の簡略化のため $(\sigma; 0, 1)$ を単に σ と表すことにする. また $s \leq t$ に対して $w_{t,s} := r_t r_{t-1} \cdots r_s$ とする.

claim

$$\sigma_1^1 * \cdots * \sigma_{x_1}^1 * \sigma_1^2 * \cdots * \sigma_{x_2}^2 * \cdots\cdots * \sigma_1^n * \cdots * \sigma_{x_n}^1 \tag{5.6}$$

$$\sigma_j^k \in W/W_{\Lambda_k} \ (i = 1, 2, \ldots, x_k\,;\, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.7}$$

が standard かつ $\mathfrak{g}_S$-dominant となるためのための必要十分条件は

$$(\sigma_1^k, \sigma_2^k, \ldots, \sigma_{x_k}^k) = (w_{n,k}, \ldots, w_{n,k}, 1, \ldots, 1), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

となることである.

まず Theorem 5.8 が使える状況であることに注意して十分性を示そう．それには $\kappa_k \in W_{\Lambda_k}/W_{\Lambda_k+\Lambda_{k+1}}$ が存在して，$\sigma^k_{x_k}\kappa_k \geq \sigma^{k+1}_1$ in $W/W_{\Lambda_k+\Lambda_{k+1}}$ が成立することを示せば十分であろう (残りは明らかである)．しかしこれは

$$W/W_{\Lambda_k+\Lambda_{k+1}} = \langle r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_n\rangle / \langle r_{k+2}, \ldots, r_n\rangle \ni w_{n,k+1}$$

であるので，subword condition から容易に得られる．さらに $\mathfrak{g}_S$-dominant であることは $w^{-1}_{n,k}(\alpha_l) \in \Delta^{\mathrm{re}}_+$ $(l = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$ より得られる．

次に必要性を示そう．まず $\{\sigma^1_j\}_{j=1,2,\ldots,x_1}$ として取り得る class Λ_1 の L-S path を調べよう．$W/W_{\Lambda_1} = \{w_{l,1} \,|\, l = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{1\}$ である．また

$$\langle w_{n,1}\Lambda_1, \alpha^\vee_l\rangle = 0, \qquad \langle w_{l,1}\Lambda_1, \alpha^\vee_l\rangle = -1 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n-1)$$

であることに注意すると，$\mathfrak{g}_S$-dominant であるためには

$$(\sigma^1_1,\, \sigma^1_2,\, \ldots,\, \sigma^1_{x_1}) = (w_{n,1},\, \ldots,\, w_{n,1},\, 1,\, \ldots,\, 1)$$

となっていなくてはいけないことがわかる．

$1 \leq k \leq m$ $(m \leq n-1)$ に対して，

$$(\sigma^k_1,\, \sigma^k_2,\, \ldots,\, \sigma^k_{x_1}) = (w_{n,k},\, \ldots,\, w_{n,k},\, 1,\, \ldots,\, 1)$$

となったとする．このとき $\{\sigma^{m+1}_j\}_{j=1,2,\ldots,x_{m+1}}$ として取りうる class Λ_{m+1} の L-S path を考えてみよう．ここでは $\sigma^m_{x_m} = w_{n,m}$ の場合のみ考えよう ($\sigma^m_{x_m} = 1$ のときも同様に示せる)．まず帰納法の仮定から

$$\langle \pi(t), \alpha^\vee_l\rangle = 0, \qquad 0 \leq t \leq m/n,\ m \leq l \leq n-1$$

であるので，σ^{m+1}_1 は

$$\langle \sigma^{m+1}_1(\Lambda_{m+1}), \alpha_l\rangle \geq 0 \qquad m \leq l \leq n-1 \tag{5.8}$$

を満たしていなくてはいけないことに注意する．

$w_{n,m+1} \in W_{\Lambda_m}/W_{\Lambda_m+\Lambda_{m+1}}$ が Bruhat order に関する最大の元であることに注意すると，Theorem 5.8 と subword condition により，σ^{m+1}_1 として許されるのは $w_{n,m}w_{n,m+1} \geq \sigma$ in $W/W_{\Lambda_m+\Lambda_{m+1}}$ となる $\sigma \in W/W_{\Lambda_{m+1}}$ である．したがって subword condition と Lemma 3.1 (2) より $w_{n,m}$ および $w_{n,m+1}$ の subword τ_1, τ_2 が存在して，$\sigma = \tau_1\tau_2$ となっている．さらに σ は $W/W_{\Lambda_{m+1}}$ のある coset の長さ最小の元であるのだから，$\tau_2 = 1$ または $\tau_2 = w_{l,m+1}$ $(m+1 \leq l \leq n)$ であることに注意する．

まず $\tau_2 = 1$ のときを考えよう．このとき σ の長さの最小性から $\tau_1 = 1$ であるか, $\tau_1 = w_{l,m+1}$ $(m+1 \le l \le n)$ となることがわかる．前者の場合は $\sigma = 1$ となり, この場合は条件 (5.8) を満たす．一方, 後者の場合でさらに $l < n$ のときは $\langle \sigma(\Lambda_{m+1}), \alpha_l^\vee \rangle = -1$ であるからので条件 (5.8) を満たさない．$l = n$ の場合は $\langle \sigma(\Lambda_{m+1}), \alpha_i^\vee \rangle \ge 0$ $(m \le i \le n-1)$ となるので条件 (5.8) を満たす．

次に $\tau_2 = w_{l,m+1}$ $(m+1 \le l \le n)$ の場合を考えよう．$\tau_1 = 1$ であるなら, 上と同様の議論によって, $l = n$ でなければ条件を満たさないことがわかる．$\tau_1 \ne 1$ のときを考える．σ の長さの最小性から $\tau_1 = w_{k,m}$ $(m \le k \le n)$ となっている．まず $k \ge l$ のときは $\langle \sigma(\Lambda_{m+1}), \alpha_{l-1}^\vee \rangle = -1$ であるので, 条件 (5.8) を満たさない．$k < l$ の場合も $\langle \sigma(\Lambda_{m+1}), \alpha_k^\vee \rangle = -1$ であるからやはり条件を満たさない (ここで $k \le n-1$ であることに注意する)

よって, 条件 (5.8) をみたすためには $\sigma_1^{m+1} = w_{n,m+1}$ or 1 でなくてはいけないことがわかる．逆に $w_{n,m+1}$ と 1 は σ_1^{m+1} として取りうることも上の計算などからわかる．σ_j^{m+1} $(j = 2, 3 \ldots, x_{m+1})$ が主張のようにならなくてはいけないことは $\{\sigma_j^1\}$ のときに示したのと同様に示せる．これで帰納法により claim の必要性が示された．

path (5.6) に $w_{n,k}$ が現れる個数を y_k で表すと, path (5.6) の終端は

$$\lambda - \sum_{i=1}^{n} y_i(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n) = \lambda - \sum_{i=1}^{n} (y_1 + y_2 + \cdots + y_i)\alpha_i$$

である．後は y_k を 0 から x_k の間を動かせば (5.5) が得られる．

Appendix

ここでは A が $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ の場合に, 一般の dominant integral weight $\lambda = s\Lambda_1 + t\Lambda_2$ $(s \ge 0, t \ge 0)$ と $\tau \in W$ に関する Demazure module $E_\tau(\lambda) = U(\mathfrak{n}_+)u_{\tau(\lambda)}$ の次元に関する公式を与える．計算方法については [9] のものを参考にした．ちなみに [9] では $A = A_1^{(1)}, A_2^{(2)}$ の場合に Demazure module の次元に関する公式を与えている．A が hyperbolic の場合の公式はまだ得られていない．各記号については Example 4.4 で使ったものを用いる．

A_2 の場合　まず Example 4.4 での結果を使うと, $B(\Lambda_i)$ は次のようになる．

L-S path of class Λ_1	L-S path of class Λ_2
$(\tau_2^+; 0, 1)$, $(\tau_1^+; 0, 1)$, $(\tau_0^+; 0, 1)$	$(\tau_2^-; 0, 1)$, $(\tau_1^-; 0, 1)$, $(\tau_0^-; 0, 1)$

これを用いて Demzure module の次元を計算すると次のようになる.

$$E_{\tau_0^+}(\lambda)=1 \qquad E_{\tau_1^+}(\lambda)=s+1$$
$$E_{\tau_2^+}(\lambda)=\frac{1}{2}(s+1)(s+2t+2) \qquad E_{\tau_3^+}(\lambda)=\frac{1}{2}(s+1)(t+1)(s+t+2)$$
$$E_{\tau_0^-}(\lambda)=1 \qquad E_{\tau_1^-}(\lambda)=t+1$$
$$E_{\tau_2^-}(\lambda)=\frac{1}{2}(t+1)(2s+t+2) \qquad E_{\tau_3^-}(\lambda)=\frac{1}{2}(s+1)(t+1)(s+t+2)$$

B_2 の場合 まず Example 4.4 での結果を使うと, $B(\Lambda_i)$ は次のようになる.

L-S path of class Λ_1	L-S path of class Λ_2
$(\tau_3^+\,;0,1)$, $(\tau_2^+\,;0,1)$	$(\tau_3^-\,;0,1)$, $(\tau_2^-\,;0,1)$
$(\tau_2^+,\tau_1^+\,;0,\frac{1}{2},1)$	$(\tau_1^-\,;0,1)$, $(\tau_0^-\,;0,1)$
$(\tau_1^+\,;0,1)$, $(\tau_0^+\,;0,1)$	

これを用いて Demzure module の次元を計算すると次のようになる.

$$E_{\tau_0^+}(\lambda)=1, \qquad E_{\tau_1^+}(\lambda)=s+1, \qquad E_{\tau_2^+}(\lambda)=(s+1)(s+t+1)$$
$$E_{\tau_3^+}(\lambda)=\frac{1}{6}(s+1)\{3t^2+3(2s+3)t+(s+2)(2s+3)\}$$
$$E_{\tau_4^+}(\lambda)=\frac{1}{6}(s+1)(t+1)(2s+t+3)(s+t+2)$$
$$E_{\tau_0^-}(\lambda)=1, \qquad E_{\tau_1^-}(\lambda)=t+1, \qquad E_{\tau_2^-}(\lambda)=\frac{1}{2}(t+1)(2s+t+2)$$
$$E_{\tau_3^-}(\lambda)=\frac{1}{6}(t+1)\{6s^2+6(t+2)s+(t+2)(t+3)\}$$
$$E_{\tau_4^-}(\lambda)=\frac{1}{6}(s+1)(t+1)(2s+t+3)(s+t+2)$$

G_2 の場合 まず Example 4.4 での結果を使うと, $B(\Lambda_i)$ は次のようになる.

L-S path of class Λ_1	L-S path of class Λ_2
$(\tau_5^+\,;0,1)$, $(\tau_4^+\,;0,1)$, $(\tau_4^+,\tau_3^+\,;0,\frac{1}{3},1)$,	$(\tau_5^-\,;0,1)$, $(\tau_4^-\,;0,1)$, $(\tau_3^-\,;0,1)$
$(\tau_4^+,\tau_3^+\,;0,\frac{2}{3},1)$, $(\tau_4^+,\tau_3^+,\tau_2^+\,;0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1)$	$(\tau_3^-,\tau_2^-\,;0,\frac{1}{2},1)$, $(\tau_2^-\,;0,1)$
$(\tau_4^+,\tau_3^+,\tau_2^+,\tau_1^+\,;0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$	$(\tau_1^-\,;0,1)$, $(\tau_0^-\,;0,1)$
$(\tau_3^+\,;0,1)$, $(\tau_3^+,\tau_2^+\,;0,\frac{1}{2},1)$	
$(\tau_3^+,\tau_2^+,\tau_1^+\,;0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$, $(\tau_2^+\,;0,1)$	
$(\tau_2^+,\tau_1^+\,;0,\frac{1}{3},1)$, $(\tau_2^+,\tau_1^+\,;0,\frac{2}{3},1)$	
$(\tau_1^+\,;0,1)$, $(\tau_0^+\,;0,1)$	

これを用いて Demzure module の次元を計算すると次のようになる.

$$E_{\tau_0^+}(\lambda) = 1, \qquad E_{\tau_1^+}(\lambda) = s+1$$

$$E_{\tau_2^+}(\lambda) = \frac{1}{2}(s+1)(3s+2t+2), \qquad E_{\tau_3^+}(\lambda) = \frac{1}{2}(s+1)(s+t+1)(2s+t+2)$$

$$E_{\tau_4^+}(\lambda) = \frac{1}{12}(s+1)\{4t^3 + 18(s+1)t^2 + 2(12s^2+24s+13)t + 3(3s^3+9s^2+10s+4)\}$$

$$E_{\tau_5^+}(\lambda) = \frac{1}{120}(s+1)\{10t^4 + 20(3s+4)t^3 + 10(12s^2+33s+23)t^2 + 10(9s^3+39s^2+57s+28)t + (s+2)(2s+3)(3s+4)(3s+5)\}$$

$$E_{\tau_6^+}(\lambda) = \frac{1}{120}(s+1)(t+1)(s+t+2)(2s+t+3)(3s+t+4)(3s+2t+5)$$

$$E_{\tau_0^-}(\lambda) = 1, \qquad E_{\tau_1^-}(\lambda) = t+1$$

$$E_{\tau_2^-}(\lambda) = \frac{1}{2}(t+1)(2s+t+2), \qquad E_{\tau_3^-}(\lambda) = \frac{1}{6}(t+1)(3s+t+2)(3s+2t+2)$$

$$E_{\tau_4^-}(\lambda) = \frac{1}{12}(t+1)\{12s^3 + 18(t+2)s^2 + 2(4t+9)(t+2)s + (t+2)^2(t+3)\}$$

$$E_{\tau_5^-}(\lambda) = \frac{1}{120}(t+1)\{90s^4 + 180(t+2)s^3 + 40(3t^2+17t+19)s^2 + + 30(t^3+7t^2+17t+14)s + (t+2)(t+3)(t+4)(2t+5)\}$$

$$E_{\tau_6^-}(\lambda) = \frac{1}{120}(s+1)(t+1)(s+t+2)(2s+t+3)(3s+t+4)(3s+2t+5)$$

References

[1] V. Deodhar, *Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function*, Invent. Math. **39** (1977), 187-198.

[2] V. Deodhar, *A splitting criterion for the Bruhat orderings on Coxeter groups*, Comm. Alg. **15** (1987), 1889-1894.

[3] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras (3rd edition)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[4] P. Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent. Math. **116** (1994), 329-346.

[5] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. Math. **142** (1995), 499-525.

[6] P. Littelmann, *A plactic algebra for semisimple Lie algebras*, Adv. Math. **124** (1996), 312-331.

[7] P. Littelmann, *Characters of representations and paths in $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$*, Proc. Symp. Pure Math. **61** (1997), 29-49.

[8] R.V. Moody and A. Painzola, *Lie algebras with triangular decompositions*, Canadian Mathematical Society series of monographs and advaced texts, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[9] Y.B. Sanderson, *Dimensions of Demazure modules for rank two affine Lie algebras*, Compositio Math. **101** (1996), 115-131.