数理解析研究所講究録
1183 巻 2001 年 65-73

Bogoyavlensky 階層と toroidal Lie algebras[1]

池田 岳 (IKEDA Takeshi), Okayama University of Science

E-mail: ike@xmath.ous.ac.jp

要約：アフィン・リー環の２変数版である２トロイダル・リー環の表現に付随するソリトン方程式系について議論する．特に，Korteweg-de Vries 方程式を拡張して得られる hierarchy について，その Lax formalism および表現論的意味づけを与える．

本稿の内容は，高崎金久氏との共同研究に基づいている．詳細については論文 [1] としてまとめたので，もしも興味を持ってくださった方にはそちらを参照していただけたらと思う．講演では，議論の下敷きあるいは骨格となる KdV 階層について，少し詳しい review を試みた[2]．なお，日本語による記事としては，兵庫県三田市で行われた研究集会の報告集 [2] に書いたものがすでにあるので，この講究録はそれと相補う内容になるように心がけた．特に，表現の構成などについては [2] に詳しく，Lax 形式については本稿が少し詳しい．

第１，２節に関しては原論文 [3] の他に [4] を参照されたい．第３，４，５節は [1] による．第３節の Lax 形式に関連して，立命館大学のメンバーを中心とするグループ[3]による一連の研究（[6] など）がある．第４節から第５節にかけての表現論的部分については，Billig [7] および庵原・斉藤・脇本 [8] の結果をもとにしている．Generalized Casimir 作用素のトロイダル版を用いて広田方程式を導出するというアイデアを借りて，自由フェルミオンを基礎にして計算すると，Lax 形式との相性が良い定式化を与えることができた．

1 Korteweg-de Vries 階層の review

KdV 方程式は未知関数 $u = u(x,t)$ に対する次の非線形偏微分方程式である：

$$u_t = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}. \tag{1}$$

ここに，下付きの添え字は $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ などのように偏導関数をあらわしている．任意パラメータ p, δ を含む次の解は孤立波解（１ソリトン解）としてよく知られている：

$$u = 2p^2 \mathrm{sech}^2 \left(px + p^3 t + \delta\right). \tag{2}$$

あらたな従属変数 τ を $u = 2\partial_x^2 \log \tau$ という関係によって導入すると KdV 方程式は次の広田双線型微分方程式に変換される：

$$\left(D_x^4 - 4D_xD_t\right)\tau \cdot \tau = 0. \tag{3}$$

[1]研究集会「群と環の表現論及び非可換調和解析」2000 年 8 月 於：京都大学数理解析研究所
[2]でも，長すぎた．
[3]戸田，兪の両氏からは Calogero の論文 [5] があることを教えていただいた．

ここに広田の D 作用素は関数の組 f, g に対して次で定義される：

$$D_x^m D_t^n f \cdot g := \left(\frac{\partial^m}{\partial a^m} \frac{\partial^n}{\partial b^n} f(x+a, t+b) g(x-a, t-b) \right) \Bigg|_{a=b=0}. \tag{4}$$

実際，公式

$$\frac{D_x^4 \tau \cdot \tau}{\tau^2} = u_{xx} + 3u^2, \quad \frac{D_x D_t \tau \cdot \tau}{\tau^2} = 2(\log \tau)_{xt} \tag{5}$$

を使って (3) を書き直し，x で一回微分すれば (1) が得られる．

そもそも，広田の従属変数 τ および D 作用素は上記の 1 ソリトン解を一般化した N ソリトン解を（逆散乱法によらずに直接に）導くために導入されたのであるが，アフィン・リー環の表現論の立場からは次のように解釈可能となる．ひとまず天下りに「頂点作用素」を次で定義する：

$$X(p) := e^{2 \sum_j x_j p^j} e^{-2 \sum_j \widetilde{\partial}_{x_j} \cdot p^{-j}}. \tag{6}$$

ただし，和の記号において j は $j = 1, 3, 5, \ldots$ と正の奇数を走るとし，$\widetilde{\partial}_{x_j} = \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ とおいた．この作用素は空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \ldots]$ 上に作用する．より正確には，p という文字をひとまず不定元と考えて形式的に展開した各係数が $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ 上の作用を与える．ちなみに後述の Lax 形式においては p はスペクトル・パラメータと同一視できる．

$X(p)$ において $x = x_1, t = x_3$ との同一視を行い，「高次の時間」$x_5, x_7, \ldots$ を定数と見なすと，1 ソリトン解 (2) を与える τ は，a を定数として

$$\tau = e^{aX(p)}.1 = 1 + e^{2px + 2p^3 t + 2\delta} \tag{7}$$

と書ける．ただしここで a および $x_5, x_7, \ldots$ といった x, t に依存しないパラメータはすべて定数 δ に押し込めて書いた．一般に N ソリトン解の τ 函数[4]を τ_N と書くとき

$$\tau_{N+1} = e^{a_{N+1} X(p_{N+1})} \tau_N \tag{8}$$

という関係が成り立つ．

ここで，頂点作用素 $X(p)$ の表現論的な意味を簡単に説明しておこう．アフィン・リー環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K$ において，次で生成される部分 Lie 環 $\mathfrak{s}$ を考える：

$$H_{2n+1} := \begin{pmatrix} 0 & s^n \\ s^{n+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

これらは Heisenberg の関係式

$$[H_j, H_k] = j \delta_{j+k,0} K \quad (j, k \in 2\mathbb{Z} + 1) \tag{10}$$

を満たす．多項式の空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ 上に $\mathfrak{s}$ の作用を，$j > 0$ に対して H_j を微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ として，H_{-j} をかけ算作用素 $j x_j$ として，最後に K を id と定めると，$\mathfrak{s}$ の既約表現が得

[4] N ソリトン解の τ 函数は多項式ではないのでもちろん空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ には属さないが，広田方程式 (3) の解になっていることが示せる．また，τ_N には不定元 $p_j (j = 1, \ldots, N)$ が含まれているが，あくまでこれらの形式的級数と考えても良いし，適当な解析的意味を持たせることもできる．

られる．この表現をアフィン・リー環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 全体にまで延ばすことが一意的に可能であり，$\mathfrak{s}$ に属さないような $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の元の作用を具体的に与えるのが頂点作用素 $X(p)$ である．

さて，高次の時間変数をも含んだ広田方程式を導入するのが大切である．そのための準備として母函数表示

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(t)\lambda^m = e^{\sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n} \tag{11}$$

によって多項式 $p_m(t)$ を定義する．不定元の列 $\boldsymbol{a} = (a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots)$ を導入し，さらに $\langle \boldsymbol{a}, D_{\boldsymbol{x}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} D_{x_{2n+1}}$，$\widetilde{D}_{\boldsymbol{x}} = (D_{x_1}, 0, \frac{1}{3}D_{x_3}, 0, \frac{1}{5}D_{x_5}, 0, \ldots)$ という記号を用いて，次の方程式を考える：

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(2\boldsymbol{a}) p_{m+1}(-\widetilde{D}_{\boldsymbol{x}}) e^{\langle \boldsymbol{a}, D_{\boldsymbol{x}} \rangle} \tau(\boldsymbol{x}) \cdot \tau(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{12}$$

左辺を不定元 $\boldsymbol{a}$ のべきに展開して得られる係数がすべて 0 であるという意味である．例えば a_3 の係数から (3) がでてくる．この方程式 (12) は $\tau \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}] \backslash \{0\}$ が $1 \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ の群軌道 $G.1$ に属するための必要十分条件であることが知られている[5]．ここで群 G とはなにか説明しておかなければならない．一般に，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現 V において $X \in \mathfrak{g}$ が局所べき零に作用するとは，各ベクトル $v \in V$ に対して $X^N v = 0$ $(N \gg 0)$ が成立することである．V 上局所べき零な作用を持つ $X \in \mathfrak{g}$ に対して指数関数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ は，各ベクトルに作用させると有限和になるので，自然に $\mathrm{GL}(V)$ の元を定める．特に，上記の $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ 上における表現では，局所べき零に作用する元が十分沢山あることが知られている（“integrable” な表現）から，それらの指数関数による作用で生成される $\mathrm{GL}(\mathbb{C}[\boldsymbol{x}])$ の部分群を G とする[6]のである．

2　Lax 形式あるいは佐藤方程式

微分作用素の組

$$P = \partial_x^2 + u, \quad B = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x \tag{13}$$

を導入すると，KdV 方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = [B, P] \tag{14}$$

と同値である．

[5] この事実 (必要性は比較的容易) に関する基本文献としては [3] の他に [9] が非常に重要である．また，KP 階層の場合の対応する結果については例えば [4] にフェルミオンを用いた簡明な証明がある．KdV 階層は KP 階層の “2-reduction”（部分群に対応する）として得られるのであるが，KP 階層の結果から即座に KdV 階層の結果が従うわけではない（と思う）．[9] の解説を含めてその辺の事情をまとめたノート [10] を準備中である．多成分 KP やトロイダル版も含めて整理しておきたい．

[6] 後述のトロイダル・リー環の表現においても同様（参照：定理 2 の $\mathrm{SL}_\ell^{\mathrm{tor}}$）である．

線型方程式系

$$P\Psi = \lambda^2\Psi, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = B\Psi \tag{15}$$

を考える．第1式はポテンシャル u を持つ Schrödinger 作用素 P についての Strum-Liouville 型の固有値問題，第2式は波動函数 Ψ をパラメータ t について変形する方程式と見なすことができる．そのとき，Lax 方程式 (14) は，固有値 λ^2 が変形パラメータ t に依存しないための条件として解釈できる．

高次の時間 $x_5, x_7, \ldots$ を導入して階層化するには佐藤・Wilson 作用素

$$W = 1 + w_1\partial_x^{-1} + w_2\partial_x^{-2} + \cdots \tag{16}$$

を用いるのが便利である．KdV 階層を扱うときは，W には次の条件を要請する（“2-reduction”）：

$$(W\partial_x^2 W^{-1})_{\leq -1} = 0. \tag{17}$$

ただし，擬微分作用素 $A = \sum_{n\leq N} a_n\partial_x^n$ に対して $(A)_{\leq -1} = \sum_{n\leq -1} a_n\partial_x^n$ および $(A)_{\geq 0} = \sum_{0\leq n\leq N} a_n\partial_x^n$ という記法を用いる．このとき

$$W\partial_x^2 W^{-1} = (W\partial_x^2 W^{-1})_{\geq 0} = \partial_x^2 - 2(w_1)_x \tag{18}$$

となるので，$u = -2(w_1)_x$ と同一視して $P = W\partial_x^2 W^{-1}$ と見れば，$B = (W\partial_x^3 W^{-1})_{\geq 0}$ となる.「佐藤方程式」

$$\frac{\partial W}{\partial t} = BW - W\partial_x^3 \tag{19}$$

から Lax 方程式 (14) が導かれるので，これを一般化して

$$\frac{\partial W}{\partial x_{2n+1}} = B_{2n+1}W - W\partial_x^{2n+1} \tag{20}$$

という方程式を考える．ここで，B_{2n+1} は微分作用素である．両辺に右から W^{-1} をかけて微分作用素部分を比較すれば $B_{2n+1} = (W\partial_x^{2n+1}W^{-1})_{\geq 0}$ を得る．

対応する Lax 方程式として

$$\frac{\partial P}{\partial x_{2n+1}} = [B_{2n+1}, P] \tag{21}$$

を得る．

3 トロイダル化

$x_{2n+1}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ という空間・時間変数以外に $y_{2n}(n = 0, 1, 2, \ldots)$ という新たな独立変数を導入する．以下では $x_1 = x$ という同一視に類似の記法で以下では $y_0 = y$ とする．

天下りだが，次のような計算をしてみる：

$$W\partial_x^{2n}\partial_y W^{-1} = -W^{-1}\partial_x^{2n}W^{-1}\frac{\partial W}{\partial y}W^{-1} + W\partial_x^{2n}W^{-1}\partial_y. \tag{22}$$

いま，(17) を課しているので右辺の第2項は $P^n\partial_y$ と書ける．また，$\frac{\partial W}{\partial y}W^{-1}$ を Q とおくと，第1項は $-P^nQ$ と書ける．これを見ながら，

$$C_{2n} := -(P^nQ)_{\geq 0}, \quad D_{2n} := C_{2n} + P^n\partial_y \tag{23}$$

とおく．ここで Lax 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial y_{2n}} = [D_{2n}, P] \tag{24}$$

あるいは「佐藤方程式」

$$\frac{\partial W}{\partial y_{2n}} = D_{2n}W - W\partial_x^{2n}\partial_y \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

を考えよう．

例：定義にしたがって計算すると $C_2 = w_1(w_1)_y - (w_2)_y - 2(w_1)_{xy}$ となる．ここで (17) からしたがう式 $(w_1)_{xx} + 2(w_2)_x - 2w_1(w_1)_x = 0$ を用いて計算すると

$$u_{y_2} = \frac{1}{4}u_{xxy} + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u)u_x + uu_y \tag{26}$$

が得られる．ただし $\partial_x^{-1}u = -2w_1$ とおいた．この方程式は Calogero が 1975 年に発見し [5]，1990 年に Bogoyavlensky [11] がソリトン解や Lax 形式，保存量などの一連の議論を行った方程式と同じものである．また，Schiff [12] は 1992 年に Self-dual Yang-Mills 方程式からの次元逓減によって，この方程式を導出している．

2系列の佐藤方程式 (20),(25) の連立系として記述される W に関する方程式を Bogoyavlensky 階層 (hierarchy) と呼ぶことにする．ℓ を2以上の任意の整数とし，(17) の代わりに

$$(W\partial_x^{\ell}W^{-1})_{\leq -1} = 0 \tag{27}$$

という条件を課すことで，同様の方程式を考えることができる．そのとき，独立変数は $x_n(n \geq 1, n \neq \ell)$ および $y_{n\ell}(n \geq 1)$ とするのである．そうして得られる階層 (hierarchy) を ℓ-Bogoyavlensky 階層と呼ぶことにする．

4 トロイダル・リー環とその表現

トロイダル・リー環について簡単に説明する．A を可換な $\mathbb{C}$ 代数とし，$\mathfrak{g}$ を有限次元の複素単純 Lie 環とする．$\Omega_{A/\mathbb{C}}$ を Kähler 微分加群とし，$d : A \to \Omega_{A/\mathbb{C}}$ を canonical な微

分とする．いま $\mathcal{K} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Omega_{A/\mathbb{C}}/dA$ とおき，$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} A \oplus \mathcal{K}$ 上に次で与えられる $\mathbb{C}$ 上の Lie 環の構造を入れる：

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X, Y] \otimes fg + (X|Y)\overline{g(df)}, \quad \mathcal{K} \in \text{center} \quad (X, Y \in \mathfrak{g}, f, g \in A). \tag{28}$$

ただし，$(\cdot|\cdot)$ は $\mathfrak{g}$ の適当に正規化した Killing form であり，$\overline{g(df)}$ は $g(df) \in \Omega_{A/\mathbb{C}}$ の dA を法とする剰余類である．右辺の第二項を落として得られる Lie 環を $\mathfrak{g}_A$ とかくとき，上の Lie algebra structure は $\mathfrak{g}_A$ の $\mathcal{K}$ による中心拡大になっている．

A として，n 変数ローラン多項式環 $\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ を選んだとき得られる Lie 環を n トロイダル Lie 環と呼んでいる．トロイダル Lie 環に関する基本的な文献として [13],[14] を挙げておく．$n = 1$ のとき，すなわち 1 トロイダル Lie 環の場合は $\mathcal{K} = \mathbb{C}\overline{d \log t_1}$ となり，中心は 1 次元である．これは affine Lie 環そのものである．以下では，$n = 2$ のみを扱い，$A = \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ とする．上の注意からわかるように，2 トロイダル Lie 環 $\mathfrak{g}^{\mathrm{tor}}$ は 2 つの変数 s, t に応じて二つの affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_s, \widehat{\mathfrak{g}}_t$ を部分 Lie 代数として含んでいる．

さて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ とし，前々節において KdV 階層と関連して用いた $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ を考える．トロイダル的な変数 $\boldsymbol{y} = (y_0, y_2, y_4, \ldots)$ に応じて $F_{\boldsymbol{y}} = \mathbb{C}[y_2, y_4, \ldots] \otimes \mathbb{C}[e^{y_0}, e^{-y_0}]$ という空間を用意する．ここでは詳細は省略するが，空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}] \otimes F_{\boldsymbol{y}}$ 上に $\mathfrak{sl}_2^{\mathrm{tor}}$ の表現を構成することができる．片方の変数 s に関するアフィン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}_s$ の表現 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ を拡張した表現になっている．Lie 環 $\mathfrak{g}$ のランクを上げて $\mathfrak{sl}_\ell^{\mathrm{tor}}$ の表現を与えることも同様にできる[7]．この表現と前節までの話との関係は節を改めて説明したい．

5　波動函数と双線型方程式

トロイダル・リー環 $\mathfrak{sl}_\ell^{\mathrm{tor}}$ の表現と ℓ-Bogoyavlensky 階層との関係について説明したい．ただし，以下において ℓ-reduced 条件 (27) のもとでは自明な時間発展（W がこれらに依存しないという意味で）しか与えない変数 $x_{n\ell}(n \geq 1)$ をも敢えて含めて方程式を書いている[8]ので注意してほしい．

W を ℓ-Bogoyavlensky 階層の解であるとする．λ をスペクトル・パラメータ（ただの不定元と思ってもよい）とする．与えられた W に対して「波動函数」およびその双対を次で定める：

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \lambda) = W e^{\xi(\boldsymbol{x}, \lambda)}, \quad \Psi^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \lambda) = W^{*-1} e^{-\xi(\boldsymbol{x}, \lambda)} \tag{29}$$

ここで，$\xi(\boldsymbol{x}, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda^n$ とし，$\partial_x^n e^{\pm\xi(\boldsymbol{x},\lambda)} = (\pm\lambda)^n e^{\pm\xi(\boldsymbol{x},\lambda)} (n \in \mathbb{Z})$ によって擬微分作用素の作用を定めている．また，W^* は W の formal adjoint である．$\boldsymbol{y}$ 変数のうち $y = y_0$ とそれ以外 $\check{\boldsymbol{y}} = (y_\ell, y_{2\ell}, \ldots)$ を分けて，$\Psi = \Psi(\boldsymbol{x}, y, \check{\boldsymbol{y}})$ という記法を用いる．このとき，基本的な結果は次のように述べられる．

---

[7] その場合表現空間を $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}] = \mathbb{C}[x_n | n \geq 1, n \neq \ell]$，$\mathbb{C}[\boldsymbol{y}] = \mathbb{C}[y_\ell, y_{2\ell}, y_{3\ell}, \ldots] \otimes \mathbb{C}[e^{y_0}, e^{-y_0}]$ と選ぶ．

[8] KP 階層が先にあって，$x_{n\ell}(n \geq 1)$ という時間を殺してから $y_{n\ell}(n \geq 1)$ という時間を差し込むという気持ちから．残骸の $x_{n\ell}(n \geq 1)$ はすべて 0 と考えて差し支えない．表現空間 $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$ についても同様である．

定理 1. ℓ-Bogoyavlensky 階層の波動函数は，任意の非負整数 j に対して次を満たす：

$$\oint_{\lambda=\infty} \lambda^{j\ell}\Psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, y-\eta(\boldsymbol{b},\lambda), \check{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{b},\lambda)\Psi^*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}, y+\eta(\boldsymbol{b},\lambda), \check{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{b},\lambda)d\lambda = 0, \quad (30)$$

ここで，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は不定元であり，$\oint_{\lambda=\infty}$ は λ^{-1} の係数を拾う形式的な周回積分である．またここに，$\eta(\boldsymbol{b},\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n\ell}\lambda^{n\ell}$ とおいた．

波動函数は $\boldsymbol{x}$ の函数としては ℓ-reduced KP 階層の波動函数であることから，次のように「τ 函数」を導入することができる．すなわち，Ψ, Ψ^* を ℓ-Bogoyavlensky 階層の波動函数とするとき，以下を満たす $\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が存在する：

$$\Psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda) = \frac{\tau(\boldsymbol{x}-\epsilon(\lambda),\boldsymbol{y})}{\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}e^{\xi(\boldsymbol{x},\lambda)}, \quad \Psi^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda) = \frac{\tau(\boldsymbol{x}+\epsilon(\lambda),\boldsymbol{y})}{\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}e^{-\xi(\boldsymbol{x},\lambda)}, \quad (31)$$

ここに，$\epsilon(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2\lambda^2}, \dots, \frac{1}{n\lambda^n}, \dots\right)$ とした．変数 $\boldsymbol{y}$ のほうは分母と分子でシフトが無いところが特徴的である．したがって τ には $\boldsymbol{y}$ のみの函数 $g(\boldsymbol{y})$ を掛ける任意性がある (分母分子でキャンセルするから)．さて，$\langle \boldsymbol{b}, D_{\check{\boldsymbol{y}}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n\ell}D_{n\ell}$ という記号を用いるとき，ℓ-Bogoyavlensky 階層の τ 函数は次の広田双線型方程式を満たす．

定理 2. ℓ-Bogoyavlensky 階層の τ 函数は任意の非負整数 j に対して次を満たす：

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} p_m(2\boldsymbol{a})p_{m+(k+j)\ell+1}(-\widetilde{D_{\boldsymbol{x}}})p_k(-D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{b})e^{\langle \boldsymbol{a},D_{\boldsymbol{x}}\rangle+\langle \boldsymbol{b},D_{\check{\boldsymbol{y}}}\rangle}\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0. \quad (32)$$

また，ベクトル $\tau \in \mathbb{C}[\boldsymbol{x}]\otimes F_{\boldsymbol{y}}$ が 1 の $\mathrm{SL}_\ell^{\mathrm{tor}}$ 軌道に属すならば，(32) を満たす．

また，(32) を満たす τ から，佐藤・Wilson 作用素 W を再構成すれば，佐藤方程式 (20), (25) が満たされる．その意味で定理 2 の双線型方程式は佐藤方程式によって与えられる階層と等価である．定理の後半は，Lax 形式から導いた双線型方程式がトロイダル・リー環の表現論から導いたものと一致することを主張している．

例：双線型方程式 (eq:Hirota) において $\ell=2$ とし $j=0$ とすると b_2 の係数として

$$\left(D_{y_0}D_{x_1}^3 + 2D_{y_0}D_{x_3} - 6D_{x_1}D_{y_2}\right)\tau\cdot\tau = 0. \quad (33)$$

が得られる．$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \log\tau$ とおき，$x_1 = x, x_3 = t, y_0 = y$ という略記のもとに，公式

$$\frac{{D_x}^3 D_y\tau\cdot\tau}{\tau^2} = 12\rho_{xx}\rho_{xy} + 2\rho_{xxxy}, \quad \frac{D_x D_y\tau\cdot\tau}{\tau^2} = 2\rho_{xy}, \quad (34)$$

を使うと，方程式 (33) を非線形偏微分方程式

$$2\rho_{xy_2} = 2\rho_{xx}\rho_{xy} + \frac{1}{3}\rho_{xxxy} + \frac{2}{3}\rho_{yt} \quad (35)$$

に書き直すことができる．これから，Calogero-Bogoyavlensky の方程式 (26) が導かれることを見よう．そのために (35) の両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
2\rho_{xxy_2} &= 2(\rho_{xx}\rho_{xy})_x + \frac{1}{3}\rho_{xxxxy} + \frac{2}{3}\rho_{xyt} && (36)\\
&= 2\rho_{xxx}\rho_{xy} + 2\rho_{xx}\rho_{xxy} + \frac{1}{3}\rho_{xxxxy} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\rho_{xxxx} + 3\rho_{xx}^2\right)_y && (37)\\
&= \frac{1}{2}\rho_{xxxxy} + 2\rho_{xxx}\rho_{xy} + 4\rho_{xx}\rho_{xxy} && (38)
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，1行目から2行目にうつるところで (3) から導かれる式 $2\rho_{xt} = \frac{1}{2}\rho_{xxxx} + 3\rho_{xx}^2$ を用いた．$u = 2\rho_{xx}$ とおくと，

$$
u_{y_2} = \frac{1}{4}u_{xxy} + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}u_y)u_x + uu_y, \qquad (39)
$$

を得る．ただしここで，$\partial_x^{-1}u_y$ は $2\rho_{xy}$ を指している．

講演では十分に触れられなかったが，Wronskian 表示を持つ特殊解の構成が可能である．それはソリトン解を含んでおり，Bogoyavlensky が breaking soliton solution と呼んだものの一般化になっている．

References

[1] T. Ikeda, K. Takasaki, “Toroidal Lie algebras and Bogoyavlensky's 2 + 1 - dimensional equation”, to appear in International Mathematics Research Notices, **nlin.SI/0004015**.

[2] 池田岳,「トロイダル・リー環の表現と Bogoyavlensky 階層」代数群と量子群の表現論 (研究集会報告集)（2000 年 6 月 30 日～7 月 2 日）於：関西学院千刈セミナーハウス (兵庫県三田市)

[3] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, in Proceedings of RIMS symposium (ed. M.Jimbo, T.Miwa) 39-120, World Sci., 1983.

[4] M. Jimbo, T. Miwa, E. Date, *Solitons*, Cambridge Tracts in Mathematics 135(Cambridge University Press 2000).

[5] F. Calogero, “A method to generate solvable nonlinear evolution equations”, Lettere al Nuovo Cimento **14**, N. 12 (1975), 443-447.

[6] Yu Song-Ju, K. Toda, N. Sasa, T. Fukuyama, “N Soliton Solutions to The Bogoyavlenskii-Schiff Equation and A Quest for The Soliton Solution in (3 + 1)”, Journal of Physics A 31 (1998), 3337-3347.

[7] Y. Billig, “An extension of the KdV hierarchy arising from a representation of a toroidal Lie algebra”, J. Algebra **217**(1999), no.1, 40-64.

[8] K. Iohara, Y. Saito, M. Wakimoto, "Hirota bilinear forms with 2-toroidal symmetry", Phys. Lett. A **254**(1999), 37-46.

[9] D.H.Peterson, V. Kac, "Infinite flag varieties and conjugacy theorems", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **80**(1983), 1778-1782.

[10] 池田岳,「ループ群の軌道と広田双線型方程式」(仮題) 出来次第 `http://www.xmath.ous.ac.jp/~ike/` にて公開する予定.

[11] O.I. Bogoyavlenskii, "Breaking solitons in $2+1$-dimensional integrable equations", Russian Math. Surveys **45**:4 (1990), 1-86.

[12] J. Schiff, "Integrability of Chern-Simons-Higgs vortex equations and a reduction of the self-dual Yang-Mills equations to three dimensions", in: *Painlevé Transcendents*, ed. D. Levi and P. Winternitz, NATO ASI Series B, vol. 278 (Plenum Press, New York, 1992).

[13] R.V. Moody, S. Eswara Rao, T. Yokonuma, "Toroidal Lie algebras and vertex representations", Geometriae Dedicata **35** (1990) 283-307.

[14] S. Eswara Rao, R.V. Moody, "Vertex representations for N-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebra", Commun. Math. Phys. **159** (1994) 239-264.