数理解析研究所講究録
1183 巻 2001 年 74-93

On annihilator operators of the degenerate principal series for orthogonal Lie groups

織田　寛（東京大学大学院数理科学研究科）

この講演の目的は，複素直交 Lie 環 $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ において，Pfaffian 型の普遍包絡環の諸要素（本稿では Pfaffian 型の作用素と呼ぶ）が，[14] で与えられた一般 Capelli 作用素が $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ に対して持つ役割と同様な役割を持つことを示し，その観点から分かる Pfaffian 型の作用素の性質を明らかにすることである．

この講演報告の構成は以下のとおり：§1 では，一般 Capelli 作用素が $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ において持つ役割を抽象化し，一般の複素簡約 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対する問題（問題 1.1）としてまとめる．この問題 1.1 は，$\mathfrak{g}$ の各放物型部分環 $\mathfrak{p}$ ごとに立てられ，これを解くことにより，$\mathfrak{p}$ に関する退化主系列や，$\mathfrak{p}$ の指標から誘導される一般 Verma 加群の annihilator の（$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の左，あるいは右イデアルとしての）生成系を具体的に与えることができる．ここでは，これらの応用とともに，この問題を解くために鍵となるいくつかの命題を取り上げる．§2 では，Clifford 代数と直交 Lie 環との自然な関係を用いて $\mathrm{U}(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ 内に Pfaffian 型の作用素を構成し，それらが $\mathbb{C}$ 上張る $\mathrm{ad}(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$-加群の構造について調べる．§3 では，Pfaffian 型の作用素を用いて，主に (B) 型，(D) 型に共通の場合に問題 1.1 の解を構成する．§4 では，(D) 型固有の特別な場合に，やはり Pfaffian 型の作用素により問題 1.1 の解が構成できることを示す．§3, §4 が扱っている $\mathrm{U}(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ の放物型部分環は，Pfaffian 型の作用素の線形結合で問題 1.1 の解が構成できるものすべてであるのだが，残りの放物型部分環に対してはどのような解があるだろうか．実は，$\mathrm{U}(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ の行列式型の普遍包絡環の諸要素（本稿では行列式型の作用素と呼ぶ）を用いると，Pfaffian 型の作用素と組み合わせて，全ての $\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ の放物型部分環に対して解を構成することが可能である．この行列式型の作用素については講演では触れず，別の機会に発表するつもりであったが，予告として §5 に概略を記しておく．

1　一般論

$\mathfrak{g}$ を複素簡約 Lie 環，$\mathfrak{h},\Delta,\Delta^+,\Pi$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環，ルート系，正ルート系，ルートの基本系とする．ルート分解 $\mathfrak{g}=\bigoplus\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha\in\Delta\}$ を用いて，$\mathfrak{n}=\bigoplus\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha>0\}$，$\bar{\mathfrak{n}}=\bigoplus\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha<0\}$ という 2 つの巾零部分環を定める．各 $\nu\in\mathfrak{h}^*$ に対して $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の左イデアル：

$$J(\nu)=\sum_{H\in\mathfrak{h}}\mathrm{U}(\mathfrak{g})(H-\nu(H))+\mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}.$$

を考えると，その商 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-加群 $\mathrm{M}(\nu)=\mathrm{U}(\mathfrak{g})/J(\nu)$ は highest weight ν の Verma 加群である．

次に，$\mathcal{F}$ を Π の任意の部分集合とする．この $\mathcal{F}$ に対して，$\mathfrak{g}$ のいくつかの部分 Lie 環を以下のように定める：

$$\mathfrak{h}(\mathcal{F})=\bigoplus\{\mathbb{C}\alpha^\vee \mid \alpha\in\mathcal{F}\}.$$

ここで，$\alpha^\vee$ は α に対する coroot である．

$$\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}=\{H\in\mathfrak{h} \mid \alpha(H)=0 \text{ for any } \alpha\in\mathcal{F}\}.$$

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}$ 及び $\mathfrak{g}$ の Killing form に関して $\mathfrak{h}(\mathcal{F})$ と $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}$ とが直交することに注意する．$\mathbb{Z}\mathcal{F}$ で $\sum_{\alpha\in\mathcal{F}} \mathbb{Z}\alpha$ を表すこととして，2つの巾零部分環：

$$\mathfrak{n}(\mathcal{F}) = \bigoplus\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+ \cap \mathbb{Z}\mathcal{F}\},$$

$$\mathfrak{n}_{\mathcal{F}} = \bigoplus\{\mathfrak{g}_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+ \setminus \mathbb{Z}\mathcal{F}\}$$

を定めると，$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}}$ という分解が得られる．$\overline{\mathfrak{n}}(\mathcal{F})$ 及び $\overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}}$ は，負ルートに対して同様に定められるものとする．最後に半単純部分環 $\mathfrak{m}(\mathcal{F}) = \overline{\mathfrak{n}}(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{h}(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{n}(\mathcal{F})$ を定義すると，$[\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{m}(\mathcal{F})] = 0$ 及び $[\mathfrak{n}_{\mathcal{F}}, \mathfrak{m}(\mathcal{F})] \subset \mathfrak{n}_{\mathcal{F}}$ が成り立っている．

各 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の左イデアル：

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda) = \sum_{H\in\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}} \mathrm{U}(\mathfrak{g})(H - \lambda(H)) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})(\mathfrak{m}(\mathcal{F}) \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}})$$

を考えると，その商 $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})/J_{\mathcal{F}}(\lambda)$ は一般 Verma 加群の特別なものとなっている．また，λ の $\mathfrak{h}^*$ への自然な延長 $\lambda_{\mathcal{F}}$ を

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{h}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\text{projection}} \mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}$$

により定める．

以上の諸定義のもと，次のような問題を考える：

問題 1.1. 与えられた $\mathcal{F} \subset \Pi$ 及び $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の有限次元の $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-stable な部分空間 V で

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + J(\lambda_{\mathcal{F}}) \tag{1.1}$$

を満たすものを具体的に構成せよ．

[14] では，一般 Capelli 作用素を用いて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の場合に，すべての $\mathcal{F}$，generic な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して解 V が構成された．この問題の応用として，同じく [14] で，(1) 退化主系列表現の主系列表現内での微分方程式による特徴付けを，主系列表現の実現に依らない形で与える，(2) 超幾何微分方程式系の構成，(3) ラドン変換の像の特徴付け，等が扱われている．また (1) に関して，(4) 退化主系列表現の annihilator の生成系の構成，及びその双対として (4') 一般 Verma 加群 $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ の annihilator の生成系の構成，にも応用がある．

(1) について少し触れる．$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{g}$ の normal real form として，$G_{\mathbb{R}}$ を $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ であるような連結実簡約 Lie 群とする．$G_{\mathbb{R}}$ 上の hyper function 全体を $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}})$ で表し，$X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}})$ への左作用 $\ell(X)$ 及び右作用 $r(X)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\ell(X)f(g) &= \frac{d}{dt} f(\exp(-tX)g)|_{t=0} \qquad \text{for } g \in G_{\mathbb{R}} \text{ and } f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}), \\
r(X)f(g) &= \frac{d}{dt} f(g\exp(tX))|_{t=0} \qquad \text{for } g \in G_{\mathbb{R}} \text{ and } f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}})
\end{aligned}$$

で定める．この2つの作用 $\ell(\cdot), r(\cdot)$ は $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ の普遍性，及び $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus_{\mathbb{R}} \mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ により $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の作用に延長される．ここで，$\mathcal{F} \subset \Pi$ 及び $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して定まる関数空間：

$$\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) = \{\, f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}) \mid r(D)f = 0 \quad \text{for any } D \in J_{\mathcal{F}}(\lambda) \,\}$$

に $G_{\mathbb{R}}$ の左作用の構造を入れたものが $G_{\mathbb{R}}$ の退化主系列表現である．この表現空間は，自然に主系列表現：

$$\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}})) = \{ f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}) \mid r(D)f = 0 \quad \text{for any } D \in J(\lambda_{\mathcal{F}}) \}$$

に埋め込まれるが，$V \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ が $(\mathfrak{g}, \mathcal{F}, \lambda)$ に対する問題 1.1 の解であれば，V の $\mathrm{Ad}(G_{\mathbb{R}})$-stability によって，任意の $f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}}))$ に対して，$f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) \Leftrightarrow r(D)f = 0$ for any $D \in V \Leftrightarrow \ell(D^a)f = 0$ for any $D \in V \Leftrightarrow \ell(D)f = 0$ for any $D \in V^a$ が成り立つ．ここで，$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \ni D \mapsto D^a \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の標準的反自己同形とした．結論として得られる

$$\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) = \{ f(g) \in \mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}})) \mid \ell(D)f = 0 \quad \text{for any } D \in V^a \} \tag{1.2}$$

の右辺に現れる左作用 $\ell(\cdot)$ が，表現空間としての作用に他ならないことを考慮すると，(1.2) は，$\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}}))$ の実現に依らない部分空間 $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda))$ の特徴付けとなっていることが分かる．このことから，例えば $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}}))$ に対する Poisson 変換が単写像である場合，Poisson 変換下の $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda))$ の像は V^a で特徴付けられる．

問題 1.1 の解 V が存在するかどうかは自明ではない．実際に [15] では，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の場合に各 $\mathcal{F}$ に対して V が存在するための $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に関する必要十分条件が与えられている．一般の $\mathfrak{g}$ に対しても generic な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対しては解の存在が保証されているが，それは次の [10] と [2] の結果による:

命題 1.2. 各 $\nu \in \mathfrak{h}^*$ に対して，写像

$$\Theta_\nu : \{ \textit{two sided ideal } I \mid I \supset \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}(\nu) \} \longrightarrow \{ \textit{left ideal } J \mid J \supset J(\nu) \}$$

を $I \longmapsto I + J(\nu)$ により定める．このとき，ν が *dominant*, すなわち，

$$\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \{-1, -2, \ldots\} \quad \textit{for any } \alpha \in \Delta^+ \tag{1.3}$$

であれば，Θ_ν は単写像であり，すべての I に対して $\mathrm{Ann}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})/\Theta_\nu(I) = I$ が成り立つ．更に，ν が *regular*, すなわち，

$$\langle \nu + \rho, \alpha^\vee \rangle \neq 0 \quad \textit{for any } \alpha \in \Delta \tag{1.4}$$

であり，かつ *dominant* であれば，Θ_ν は全写像である．ここで，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$. とした．

従って，$\mathcal{F} \subset \Pi$ を固定すると，generic な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して $\Theta_{\lambda_{\mathcal{F}}}$ が全写像となり，問題 1.1 の解が存在する．

問題の応用 (4), (4') について述べる．generic な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対しては，命題 1.2 により $\Theta_{\lambda_{\mathcal{F}}}$ が単写像となるが，そのような λ に対する問題 1.1 の解 V があるとする．このとき，命題 1.2 で $\nu = \lambda_{\mathcal{F}}, I = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ とすると，$\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ann}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})/J(\lambda_{\mathcal{F}}) \subset J(\lambda_{\mathcal{F}})$ より，$\Theta_{\lambda_{\mathcal{F}}}(I) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + J(\lambda_{\mathcal{F}}) = J_{\mathcal{F}}(\lambda)$ となり，

$$\mathrm{Ann}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g})/J_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$$

が成り立つ．従って，よく知られた $\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ の生成系（$\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ に対する無限小指標の kernel で生成される）に V の基となるような各要素を加えたものが，$\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ の左（あるいは右，両側）$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-イデアルとしての生成系となることが分かる（(4')）．一方，$\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda))$ の要素で，$G_{\mathbb{R}}$ 上解析的であるもの全体を $\mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda))$ とすると，

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ : \ \mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda) \times \mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) \ni (D, f(g)) \longmapsto r(D)f(g)|_{g=\mathrm{id}} \in \mathbb{C}$$

は非退化 bilinear form を定め，

$$\langle D_1 D, f(g)\rangle = \langle D, \ell(D_1{}^a) f(g)\rangle \qquad \text{for any } D_1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

という不変性がある．これから容易に $\mathrm{Ann}\,\mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) = \left(\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)\right)^a$ が導かれるが，$\mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda))$ は $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda))$ の中で稠密なので，$\mathrm{Ann}\,\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) = \mathrm{Ann}\,\mathcal{A}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) = \left(\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)\right)^a = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V^a + \left(\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})\right)^a$ となる．更に，$\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ と $\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}}))$ の間にも同様の双対性があるので，

$$\mathrm{Ann}\,\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J_{\mathcal{F}}(\lambda)) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V^a + \mathrm{Ann}\,\mathcal{B}(G_{\mathbb{R}}; J(\lambda_{\mathcal{F}}))$$

が結論される（(4)）．

以下では，問題 1.1 を解くための一般論を述べる．問題の解の候補となるような $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-stable な $V \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ が与えられたとき，2 つの包含関係：

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda) \supset \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + J(\lambda_{\mathcal{F}}) \tag{1.5}$$

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + J(\lambda_{\mathcal{F}}) \tag{1.6}$$

を判定することができればよいのだが，そのどちらも，

$$\gamma \,:\, \mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \oplus (\bar{\mathfrak{n}}\mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}) \xrightarrow{\text{projection}} \mathrm{U}(\mathfrak{h}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

で定まる Harish-Chandra 準同形 γ による V の像 $\gamma(V) \subset \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ のみを用いて判定可能である．まず(1.5) は，$\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda) = \sum\{V \subset J_{\mathcal{F}}(\lambda) \mid \mathrm{ad}(\mathfrak{g})\text{-stable}\}$ により，

$$V \subset \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda) \tag{1.7}$$

と同値である．これに関して次の命題がある：

命題 1.3. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-*stable* な $V \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ に対して

(i) (1.7) であれば，各 $D \in V$ に対して $\gamma(D)(\lambda_{\mathcal{F}}) = 0$.

(ii) $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ が既約のとき（*generic* な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ で既約），各 $D \in V$ に対して $\gamma(D)(\lambda_{\mathcal{F}}) = 0$ であれば，(1.7) が成立する．

(iii) $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ が既約でない場合，$\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ は自明でない最小の $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-部分加群を持つが，これはある *weight* $\lambda_{\mathcal{F},0} \in \mathfrak{h}^*$ を *highest weight* とする既約 *highest weight* 加群と同形である．この $\lambda_{\mathcal{F},0}$ を用いると，各 $D \in V$ に対して $\gamma(D)(\lambda_{\mathcal{F},0}) = 0$ であることと(1.7) が成立することは同値となる．

(iii) の条件は，$\lambda_{\mathcal{F},0}$ の特定が難しいので実際には使いにくい．これを避けるために，実際に問題 1.1 を扱う場合はいつでも，解 V にもパラメータ $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ を入れて，次のように問題を変形する：

問題 1.4. $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}$ のコピー $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}'$ を用意し，新しい Lie 環 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}'$ を考える．ここで，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}'$ は無関係，すなわち，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}'] = 0$ とする．各 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して，これは $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}'$ 上の一次形式でもあると考え，

$$A_\lambda \,:\, \mathrm{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}') = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \oplus \sum_{H \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}'} \mathrm{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}')(H - \lambda(H)) \xrightarrow{\text{projection}} \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

という写像（パラメータの λ への特化）を定義する．

(i) ad($\mathfrak{g}$)-stable な $V \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}')$ で，generic な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) A_\lambda(V) + J(\lambda_{\mathcal{F}}) \tag{1.8}$$

を満たすものを具体的に構成せよ．

(ii) 上の V に対して(1.8) が成立するための $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ の必要十分条件を求めよ．

命題 1.3(i) により，問題 1.4 の解 V について generic な λ 及び各 $D \in V$ に対して

$$\gamma(A_\lambda(D))(\lambda_{\mathcal{F}}) = 0 \tag{1.9}$$

が成り立つ．ところが，D にはパラメータが多項式変数のように入っているので，(1.9) はすべての λ について成り立つ．逆に，各 λ 及び各 $D \in V$ に対して(1.9) が成り立つような ad($\mathfrak{g}$)-stable な $V \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}')$ があるとき，命題 1.3(ii) により，$\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ が既約であるような generic な λ に対して $A_\lambda(V) \subset \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$，あるいはこれと同値である

$$A_\lambda(V) \subset J_{\mathcal{F}}(\lambda) \tag{1.10}$$

が成り立つ．ところが，上と同じ理由から(1.10) はすべての λ で成立してしまう．故に，問題 1.4 に関して次の命題を得た：

命題 1.5. ad($\mathfrak{g}$)-*stable* な $V \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}')$ に対して，各 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ 及び各 $D \in V$ に対して(1.9) が成り立つことと，各 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して(1.10) が成り立つことは同値である．

逆方向の包含関係(1.6) について論じる前に，$\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ の構造について少し調べる．一般に 2 つの Verma 加群 $\mathrm{M}(\nu), \mathrm{M}(\mu)$ の間に，自明でない準同形 $\mathrm{M}(\mu) \to \mathrm{M}(\nu)$ があるとき，この写像は単写像であり，定数倍を除いて一意的である．従って以下では，$\mathrm{M}(\mu)$ の $\mathrm{M}(\nu)$ における単射準同形の像も $\mathrm{M}(\mu)$ と書くことにする．さて，各 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して定まる Verma 加群 $\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ は常に，各 $\alpha \in \mathcal{F}$ ごとに部分加群 $\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha)$ を含む．より詳しくは，$W(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の各要素に対応する鏡影で生成される Weyl 群の部分群，$\rho(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}\sum\{\alpha \mid \alpha \in \Delta^+ \cap \mathbb{Z}\mathcal{F}\}$ とすると，$\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ は常に，各 $w \in W(\mathcal{F})$ ごとに定まる部分加群 $\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} + w\rho(\mathcal{F}) - \rho(\mathcal{F}))$ を含む．ここで，自然な全準同形 $\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}}) \to \mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ の kernel は $\sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha)$ に等しくなっており，

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda) \cong \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}}) / \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha)$$

が成り立つ．

(1.6) を判定するためには，次の命題がある：

命題 1.6. $V \subset \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ を ad($\mathfrak{g}$)-*stable* な $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の部分空間とする．$V = \bigoplus_\mu V_\mu$ をその $\mathfrak{h}$ に関する *weight* 分解とすると，以下の *6* つの条件はすべて同値となる：

(a) $J_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V + J(\lambda_{\mathcal{F}})$.

(b) $V\,\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha)$.

(c) $V \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha)$.

(d) 各 $\alpha \in \mathcal{F}$ に対して，$D \in V_{-\alpha}$ で $D \bmod J(\lambda_{\mathcal{F}}) \neq 0$ を満たすものが存在する．

(e) 各 $\alpha \in \mathcal{F}$ に対して，$D \in V_0$ で $\gamma(D)(\lambda_{\mathcal{F}} - \alpha) \neq 0$ を満たすものが存在する．

(f) 各 $w \in W(\mathcal{F}) \setminus \{1\}$ に対して，$D \in V_0$ で $\gamma(D)(\lambda_{\mathcal{F}} + w\,\rho(\mathcal{F}) - \rho(\mathcal{F})) \neq 0$ を満たすものが存在する．

注意 *1.7.* $\mu \neq 0$ であれば $\gamma(V_\mu) = 0$ となるので，(e), (f) における V_0 を V と置き換えてもよい．

以下の節では，すべてこの命題の $(e) \Rightarrow (a)$ を用いて(1.6) を判定する．

次に，後の節でも用いる partial Harish-Chandra 準同形の概念を導入する．

定義 1.8. (i) $\mathcal{F}$ を Π の任意の部分集合とする．直和分解 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F})) \oplus (\overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}}\mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_{\mathcal{F}})$ のもと，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の $\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F}))$ への射影を $\mathcal{F}$ に関する partial Harish-Chandra 準同形と呼び，$\gamma_{\mathcal{F}}$ と記す．$\mathcal{F} = \emptyset$ のときは，$\gamma_\emptyset$ は通常の Harish-Chandra 準同形 γ と一致する．

(ii) 更に，各 $\nu \in \mathfrak{h}^*$ に対して，写像 $\Gamma^\nu_{\mathcal{F}} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\mathcal{F}))$ を，

$$\Gamma^\nu_{\mathcal{F}}(D) - \gamma_{\mathcal{F}}(D) \in \sum_{H \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}} \mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F}))(H - \nu(H)) \quad \text{for any } D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

となるように定める．ここで，以下の直和分解を用いた：

$$\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F})) = \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\mathcal{F})) \oplus \sum_{H \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}} \mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F}))(H - \nu(H)).$$

$\gamma_{\mathcal{F}}$ 及び $\Gamma^\nu_{\mathcal{F}}$ には，以下の性質がある：

補題 1.9. $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_\mu \mathrm{U}(\mathfrak{g})_\mu$ を $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}})$ に関する *weight* 分解とする．また，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$ を $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}}$ とも記すことにすると，以下が成り立つ：

(i) $\gamma_{\mathcal{F}}$ 及び $\Gamma^\nu_{\mathcal{F}}$ はともに $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F}))$-加群の準同形である．

(ii) 任意の $D \in \bigoplus_{\mu \neq 0} \mathrm{U}(\mathfrak{g})_\mu$ に対して，$\gamma_{\mathcal{F}}(D) = 0$.

(iii) 任意の $D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}}$ に対して，$D - \gamma_{\mathcal{F}}(D) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_{\mathcal{F}} \cap \overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}}\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

(iv) 任意の $D_1 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}}$ 及び任意の $D_2 \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ に対して，

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathcal{F}}(D_1 D_2) &= \gamma_{\mathcal{F}}(D_1)\gamma_{\mathcal{F}}(D_2),\\ \gamma_{\mathcal{F}}(D_2 D_1) &= \gamma_{\mathcal{F}}(D_2)\gamma_{\mathcal{F}}(D_1).\end{aligned}$$

(v) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \Pi$ という包含関係があるとき，$\gamma_{\mathcal{F}_1} \circ \gamma_{\mathcal{F}_2} = \gamma_{\mathcal{F}_1}$.

(vi) $\nu|_{\mathfrak{h}(\mathcal{F})}$ で ν の $\mathfrak{h}(\mathcal{F})$ への制限を表すことにすると，任意の $D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ に対して，$\gamma(\Gamma^\nu_{\mathcal{F}}(D)) \in \mathrm{U}(\mathfrak{h}(\mathcal{F})) = \mathrm{S}(\mathfrak{h}(\mathcal{F}))$ は $\gamma(\Gamma^\nu_{\mathcal{F}}(D))(\nu|_{\mathfrak{h}(\mathcal{F})}) = \gamma(D)(\nu)$ を満たす．

(vii) 各 $w \in W(\mathcal{F})$ に対して，$\Gamma^\nu_{\mathcal{F}} = \Gamma^{w(\nu+\rho)-\rho}_{\mathcal{F}}$.

この節の最後に，問題 1.1 をいろいろな放物型部分環の半単純部分に制限することを考察する．これは，どのような $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して問題 1.1 の解 V が存在するかを調べるときに有益である．Ξ を $\mathcal{F}$ とは別の Π の部分集合として，$\mathcal{F}|_\Xi = \Xi \cap \mathcal{F}$, $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}|_\Xi = \mathfrak{h}(\Xi) \cap \mathfrak{h}_{\Xi\cap\mathcal{F}}$, $\mathfrak{n}_{\mathcal{F}}|_\Xi = \mathfrak{n}(\Xi) \cap \mathfrak{n}_{\mathcal{F}}$, $\overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}}|_\Xi = \overline{\mathfrak{n}}(\Xi) \cap \overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}}$ と置く．各 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して，$\lambda|_\Xi \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}|_\Xi{}^*$ を $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}|_\Xi \hookrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{F}}} \mathbb{C}$ で定義する．最後に，$\mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))$ に関して，以下の 2 つの左イデアルと 2 つの商加群を定義する：

$$\begin{aligned}J(\lambda_{\mathcal{F}})|_\Xi &= \sum_{H \in \mathfrak{h}(\Xi)} \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))(H - \lambda_{\mathcal{F}}(H)) + \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))\mathfrak{n}(\Xi),\\ J_{\mathcal{F}}(\lambda)|_\Xi &= \sum_{H \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}|_\Xi} \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))(H - \lambda|_\Xi(H)) + \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))(\mathfrak{m}(\mathcal{F}|_\Xi) \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}}|_\Xi),\\ \mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})|_\Xi &= \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))/J(\lambda_{\mathcal{F}})|_\Xi,\\ \mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)|_\Xi &= \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))/J_{\mathcal{F}}(\lambda)|_\Xi.\end{aligned}$$

$\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})|_{\Xi}$ 及び $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)|_{\Xi}$ はそれぞれ $\mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))$ の Verma 加群及び一般 Verma 加群であり，それぞれ自然に $\mathrm{M}(\lambda_{\mathcal{F}})$ 及び $\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ に埋め込まれる．これら 2 つの商加群の highest weight はともに $\lambda_{\mathcal{F}}|_{\mathfrak{h}(\Xi)}$ である．以上の準備のもと，次が成り立つ：

命題 1.10. (i) 各 $\Xi \subset \Pi$ に対して，$\Gamma_{\Xi}^{\lambda_{\mathcal{F}}}(\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)) \subset \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)|_{\Xi}$.

(ii) V が $(\mathfrak{g}, \mathcal{F}, \lambda)$ に対する問題 *1.1* の解であるとき，各 $\Xi \subset \Pi$ に対して，$\Gamma_{\Xi}^{\lambda_{\mathcal{F}}}(V)$ は $(\mathfrak{m}(\Xi), \mathcal{F}|_{\Xi}, \lambda|_{\Xi})$ に対する問題 *1.1* の解となる．すなわち，

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda)|_{\Xi} = \mathrm{U}(\mathfrak{m}(\Xi))\Gamma_{\Xi}^{\lambda_{\mathcal{F}}}(V) + J(\lambda_{\mathcal{F}})|_{\Xi}.$$

この命題の系として，次が得られる：

系 1.11. 各 $D \in \mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}}(\lambda)$ に対して，$\gamma(D)$ は $\{\, w(\lambda_{\mathcal{F}} + \rho) - \rho \mid w \in W(\Pi \setminus \mathcal{F}) \,\}$ 上で消える．ここで，$W(\Pi \setminus \mathcal{F})$ は $\Pi \setminus \mathcal{F}$ の各要素に対応する鏡影で生成される *Weyl* 群の部分群である．

2 Clifford 代数と直交 Lie 環

E_n を抽象的な基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ が $\mathbb{C}$ 上生成する n 次元ベクトル空間とする．そのテンソル代数 $\mathrm{T}(E_n)$ 内に $\{\, e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu \mid \mu \neq \nu \,\}$ 及び $\{\, {e_\nu}^2 + 1 \mid \nu = 1, \ldots, n \,\}$ が生成する両側イデアル R_n を考えると，商環 $Cl(n) = \mathrm{T}(E_n)/R_n$ は E_n 上の Clifford 代数と呼ばれる（Clifford 代数について基本的なことは [6, 3, 16, 1] などを参照）．

まず，$e_\nu \bmod R_n$ を簡単に e_ν と表すと $\mu \neq \nu$ なる添字 μ, ν に対して $e_\mu e_\nu = -e_\nu e_\mu$ が成り立ち，各 $\nu = 1, \ldots, n$ に対して ${e_\nu}^2 = -1$ が成り立つ．$Cl(n)$ は 2^n 次元 $\mathbb{C}$-線形環で $\{\, {e_1}^{j_1} \cdots {e_n}^{j_n} \mid j_\nu = 0 \text{ or } 1 \text{ for } \nu = 1, \ldots, n \,\}$ が $\mathbb{C}$ 上の基底となる．重複した要素を持たない添字の列 $I = \{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ に対して $e_I = e_{\nu_1} \cdots e_{\nu_k}$ という表記を用い，$Cl^{(k)}(n) = \sum_{\#I=k} \mathbb{C}e_I$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ と置くと，直和分解 $Cl(n) = \bigoplus_{k=0}^{n} Cl^{(k)}(n)$ が得られる．この和を以下のように偶の部分と奇の部分とに分ける：

$$Cl(n)_0 = \bigoplus_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} Cl^{(2k)}(n) \qquad Cl(n)_1 = \bigoplus_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} Cl^{(2k+1)}(n).$$

すると，$Cl(n) = Cl(n)_0 \oplus Cl(n)_1$ は，$\mathbb{Z}_2$-次数環としての分解を与えるので，$Cl(n)_0$ は $Cl(n)$ の部分環となっている．

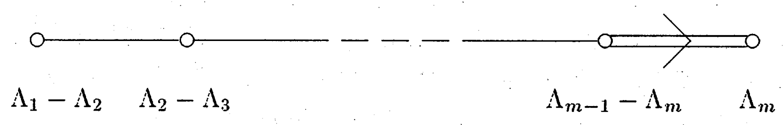
$\mathbb{C}$-線形環一般の場合に通常行う方法で $Cl(n)$ 及び $Cl(n)_0$ を Lie 環とみなすと，$Cl^{(2)}(n)$ は $Cl(n)_0$ の部分 Lie 環であり，$n \geq 2$ のとき複素直交 Lie 環 $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ と同形になっている．そこで，$\mathfrak{g} = Cl^{(2)}(n) \cong \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ と置き，$Cl(n)$ あるいは $Cl(n)_0$ を自然な方法で $\mathfrak{g}$-加群とみなす．

ここで，後の節でも用いる $\mathfrak{g}$ に関するいくつかの設定を行う．以降では，$n > 2$ とし，整数 m を $n = 2m+1$ または $2m$ となるよう定める．$\mu \neq \nu$ である添字 μ, ν に対して $F_{\mu,\nu} = \dfrac{e_\mu e_\nu}{2}$ と置く．Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を $\{F_{1,2}, \ldots, F_{2m-1,2m}\}$ で張られるものとすると，$\{\sqrt{-1}F_{1,2}, \ldots, \sqrt{-1}F_{2m-1,2m}\}$ は $\mathfrak{h}$ の実部 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底となっているので，これを用いて ${\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}^*$ に辞書式順序を導入する．すると，$\mathfrak{g}$ に対する $\Delta, \Delta^+, \Pi, \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{n}, \ldots$ は一意的に定まる．各 $\nu = 1, \ldots, m$ に対して $\Lambda_\nu \in \mathfrak{h}^*$ を $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m\}$ が $\{\sqrt{-1}F_{1,2}, \ldots, \sqrt{-1}F_{2m-1,2m}\}$ の双対基底となるように定める．各 $\nu = 1, \ldots m$ に対して，

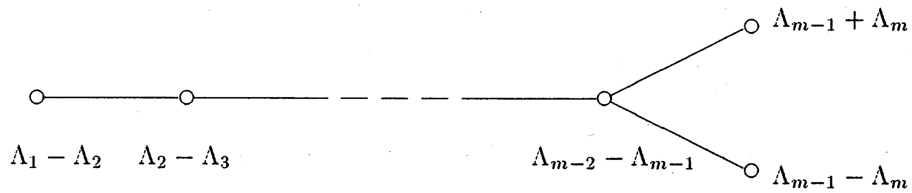
$$[\sqrt{-1}F_{2\nu-1,2\nu},\ (e_{2\nu-1} \pm \sqrt{-1}e_{2\nu})] = \pm(e_{2\nu-1} \pm \sqrt{-1}e_{2\nu})$$

が容易に確かめられるので，$\{\, (e_{2\mu-1} + \sqrt{-1}e_{2\mu})e_\nu \mid 2\mu < \nu \,\}$ が $\mathfrak{n}$ の基底，$\{\, (e_{2\mu-1} - \sqrt{-1}e_{2\mu})e_\nu \mid 2\mu < \nu \,\}$ が $\bar{\mathfrak{n}}$ の基底を与える．

(a) $n=2m+1$ の場合,
$\Pi=\{\Lambda_1-\Lambda_2,\ldots,\Lambda_{m-1}-\Lambda_m,\Lambda_m\}$ で $\mathfrak{g}$ は (B_m) 型.



(b) $n=2m$ の場合,
$\Pi=\{\Lambda_1-\Lambda_2,\ldots,\Lambda_{m-1}-\Lambda_m,\Lambda_{m-1}+\Lambda_m\}$ で $\mathfrak{g}$ は (D_m) 型.



Clifford 代数の話に戻る．$Cl(n)$ の“最高次”の要素 $e_{\{1,\ldots,n\}}=e_1\cdots e_n$ を e_{top} と表すことにすると，$\mathfrak{g}$ は e_{top} に自明に作用するので，写像 $*\cdot e_{\mathrm{top}}:Cl(n)\ni a\mapsto a\cdot e_{\mathrm{top}}\in Cl(n)$ は $\mathfrak{g}$-加群 $Cl(n)$ の自己同形を与える．この自己同形に関して次が成り立つ：

命題 2.1. 各 $k=0,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$ に対して

$$Cl^{(k)}(n)\cong Cl^{(n-k)}(n)$$

であり，これらは *highest weight* $\Lambda_1+\cdots+\Lambda_k$ の既約 $\mathfrak{g}$-加群である．

$n=2m$ の場合は，$*\cdot e_{\mathrm{top}}$ が $Cl^{(m)}(2m)$ の自己同形を与えるが，この作用は自明ではない．そこで，$\varepsilon=\pm1$ に対して，$Cl^{(m,\varepsilon)}(2m)$ を

$$\{\, e_{\{\sigma^{-1}(1),\ldots,\sigma^{-1}(m)\}}-\varepsilon(\sqrt{-1})^{m^2}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\,e_{\{\sigma^{-1}(m+1),\ldots,\sigma^{-1}(2m)\}}\mid\sigma\in\mathfrak{S}_{2m}\,\}$$

で張られる $\mathbb{C}$-線形空間とすると，次が成り立つ：

命題 2.2. $Cl^{(m)}(2m)=Cl^{(m,+)}(2m)\oplus Cl^{(m,-)}(2m)$ であり，$Cl^{(m,\varepsilon)}(2m)$ は *highest weight* $\Lambda_1+\cdots+\Lambda_{m-1}-\varepsilon\Lambda_m$ の既約 $\mathfrak{g}$-加群である．

次に，$Cl(n)_0$ と $\mathrm{U}(\mathfrak{g})=\mathrm{U}(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$ の間の関係について考察する．$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の普遍性により，包含写像 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})=Cl^{(2)}(n)\hookrightarrow Cl(n)_0$ は $\mathbb{C}$-線形環としての準同形 $\varpi:\mathrm{U}(\mathfrak{g})\longrightarrow Cl(n)_0$ に一意的に拡張される．$Cl^{(2)}(n)$ は $Cl(n)_0$ 全体 を $\mathbb{C}$-線形環として生成するので，ϖ は全写像である．この逆となるような写像 $\eta:Cl(n)_0\longrightarrow\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ を以下のように構成する：各 $k=1,\ldots,[\frac{n}{2}]$ 及び重複のない添字の列 $I=\{\nu_1,\ldots,\nu_{2k}\}$ に対して

$$\eta(e_I)=\frac{2^k}{(2k)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2k}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,F_{\nu_{\sigma^{-1}(1)},\nu_{\sigma^{-1}(2)}}\cdots F_{\nu_{\sigma^{-1}(2k-1)},\nu_{\sigma^{-1}(2k)}}\tag{2.1}$$

とする．また，$Cl^{(0)}(n)$ 上は $Cl^{(0)}(n)\ni1\mapsto1\in\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ とする．これが $\mathbb{C}$-線形写像を well-defined に定めることはすぐ分かるが，実は次が成り立つ：

命題 2.3. U($\mathfrak{g}$) を随伴作用により $\mathfrak{g}$-加群とみなすと，$\eta : Cl(n)_0 \longrightarrow$ U($\mathfrak{g}$) は $\mathfrak{g}$-準同形であり，$\varpi \circ \eta = \mathrm{id}_{Cl(n)_0}$ が成り立つ．

(2.1) の右辺は Pfaffian の形をしているので，η の像を Pfaffian 型の作用素と呼ぶことにする．この命題により，各 $k = 0, 1, \ldots, m$ に対して，$\eta(Cl^{(2k)}(n)) \subset$ U($\mathfrak{g}$) は ad($\mathfrak{g}$)-stable な部分空間となる．また，$n = 2m$ の場合は，$e_{\mathrm{top}} \in Cl(n)_0$ なので，任意の $\tau \in \mathbb{C}$ に対して $\eta((e_{\mathrm{top}} - \tau)Cl^{(2k)}(n))$ も ad($\mathfrak{g}$)-stable である．更に，$n = 2m$ で m が偶のときは，$Cl^{(m)}(n) \subset Cl(n)_0$ であるから，$\eta(Cl^{(m,\pm)}(n))$ も ad($\mathfrak{g}$)-stable である．これらの Pfaffian 型の作用素が作る ad($\mathfrak{g}$)-stable な U($\mathfrak{g}$) の部分空間を用いて問題 1.1 の解を構成しようというのが，以下の節の主題である．

この節の最後に Pfaffian 型の作用素に関する簡単な公式を挙げる：

補題 2.4. 各 $k = 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$ 及び重複のない添字の列 $I = \{\nu_1, \ldots, \nu_{2k}\}$ に対して，

(i)

$$\eta(e_{\{\nu_1, \ldots, \nu_{2k}\}}) = \frac{2}{2k-1} \sum_{i=2}^{2k} (-1)^i F_{\nu_1, \nu_i} \eta(e_{\{\nu_2, \ldots, \widehat{\nu_i}, \ldots, \nu_{2k}\}}).$$

(ii)

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} F_{\nu_i, \nu_j} \eta(e_{\{\nu_1, \ldots, \widehat{\nu_i}, \ldots, \widehat{\nu_j}, \ldots, \nu_{2k}\}}) = \frac{k(2k-1)}{2} \eta(e_I).$$

が成り立つ．

3 Pfaffian 型の作用素

この節では $n \geq 5$ を仮定し，前の節での $\mathfrak{g}$ の設定を踏襲する．まず Π のいくつかの部分集合の定義から始める．

定義 3.1. 整数 $k = 1, \ldots, m-1$ に対して，有限集合 $\mathcal{F}^{[k]} \subset \Pi$ を以下のように定める：$k = 1, \ldots, m-2$ の場合は，$\mathcal{F}^{[k]} = \Pi \setminus \{\Lambda_k - \Lambda_{k+1}\}$ とする．$n = 2m+1$ の場合は，$\mathcal{F}^{[m-1]}$ に対しても同じ定義を用いる．$n = 2m$ の場合は，$\mathcal{F}^{[m-1]} = \Pi \setminus \{\Lambda_{m-1} - \Lambda_m, \Lambda_{m-1} + \Lambda_m\}$ とする．

$\mathcal{F}^{[k]}$ に関する partial Harish-Chandra 準同形について，以下が成り立つ：

命題 3.2. 各 $\ell = 0, 1, \ldots, m-k$ 及び $2k < \nu_1 < \cdots < \nu_{2\ell} \leq n$ であるような各 $I = \{\nu_1, \ldots, \nu_{2\ell}\}$ について，

$$\gamma_{\mathcal{F}^{[k]}}(\eta(e_{2k-1} e_{2k} e_I)) = \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right) (\sqrt{-1} F_{2k-1, 2k} + \ell) \eta(e_I).$$

この式は，Pfaffian 型の作用素を用いて問題 1.1 を解く際に鍵となるものである．また，直交 Lie 環の行列式型の作用素は Pfaffian 型の作用素の 2 乗となっているのだが（[9] の結果），行列式型の作用素を用いて，問題 1.1 の解を構成する場合にも非常に重要な役割を果たす．証明の前に次を準備する：

補題 3.3. $k = 1, \ldots, m-1$ とし，$\{\alpha, \beta\}$ を $2k < \alpha, \beta \leq n$，$\alpha \neq \beta$ であるような添字の組とする．このとき，

(i) $F_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}^{[k]}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F}^{[k]})$.

(ii) $\gamma_{\mathcal{F}^{[k]}}(F_{2k-1,\alpha}F_{2k,\beta}) = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}\,F_{\alpha,\beta}$.

(ii) の証明. $H^{[k]} = \sqrt{-1}F_{1,2} + \cdots + \sqrt{-1}F_{2k-1,2k}$ は $\mathfrak{h}_{\mathcal{F}^{[k]}}$ に属する. $2k < \xi \leq n$ であるような添字 ξ に対して, $[H^{[k]}, (e_{2k-1} + \sqrt{-1}e_{2k})\,e_\xi\,] = (e_{2k-1} + \sqrt{-1}e_{2k})\,e_\xi$ であるから,

$$\begin{cases} \dfrac{F_{2k-1,\xi} + \sqrt{-1}F_{2k,\xi}}{2} = (e_{2k-1} + \sqrt{-1}e_{2k})\,e_\xi \quad \in \mathfrak{n}_{\mathcal{F}^{[k]}}, \\ \dfrac{F_{2k-1,\xi} - \sqrt{-1}F_{2k,\xi}}{2} = (e_{2k-1} - \sqrt{-1}e_{2k})\,e_\xi \quad \in \overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}^{[k]}} \end{cases}$$

が分かる. 従って, (ii) は以下のように計算される：

$$\begin{aligned} F_{2k-1,\alpha}F_{2k,\beta} &= \Big(\frac{F_{2k-1,\alpha} + \sqrt{-1}F_{2k,\alpha}}{2} + \frac{F_{2k-1,\alpha} - \sqrt{-1}F_{2k,\alpha}}{2}\Big)\cdot \\ &\qquad \cdot\Big(\frac{F_{2k-1,\beta} + \sqrt{-1}F_{2k,\beta}}{2\sqrt{-1}} - \frac{F_{2k-1,\beta} - \sqrt{-1}F_{2k,\beta}}{2\sqrt{-1}}\Big) \\ &\equiv -\Big(\frac{F_{2k-1,\alpha} + \sqrt{-1}F_{2k,\alpha}}{2}\Big)\Big(\frac{F_{2k-1,\beta} - \sqrt{-1}F_{2k,\beta}}{2\sqrt{-1}}\Big) \\ &\qquad \mod \overline{\mathfrak{n}}_{\mathcal{F}^{[k]}}\mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_{\mathcal{F}^{[k]}} \\ &\equiv \frac{\sqrt{-1}}{4}\big[\,F_{2k-1,\alpha} + \sqrt{-1}F_{2k,\alpha}, F_{2k-1,\beta} - \sqrt{-1}F_{2k,\beta}\,\big] \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\,F_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

□

命題 *3.2* の証明. 補題 2.4 (i) により,

$$\begin{aligned} \eta(e_{2k-1}e_{2k}e_I) &= \frac{2}{2\ell+1}\,F_{2k-1,2k}\,\eta(e_I) \\ &\quad + \frac{2}{2\ell+1}\sum_{i=1}^{2\ell}(-1)^i\,F_{2k-1,\nu_i}\,\eta(e_{2k}e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\nu_{2\ell}\}}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

再び補題 2.4 (i) を適用して,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2\ell}(-1)^i\,F_{2k-1,\nu_i}\,\eta(e_{2k}e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\nu_{2\ell}\}}) \\ &\quad= \frac{2}{2\ell-1}\sum_{i=1}^{2\ell}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j+1}\,F_{2k-1,\nu_i}F_{2k,\nu_j}\,\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\nu_{2\ell}\}}) \\ &\qquad - \frac{2}{2\ell-1}\sum_{i=1}^{2\ell}\sum_{j=i+1}^{2\ell}(-1)^{i+j+1}\,F_{2k-1,\nu_i}F_{2k,\nu_j}\,\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\nu_{2\ell}\}}) \\ &\quad= -\frac{2}{2\ell-1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\big(\,F_{2k-1,\nu_i}F_{2k,\nu_j} - F_{2k-1,\nu_j}F_{2k,\nu_i}\,\big)\cdot \\ &\qquad\qquad \cdot\,\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\nu_{2\ell}\}}). \end{aligned}$$

ここで, 補題 3.3 (i) により $\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\nu_{2\ell}\}}) \in \mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}^{[k]}} \oplus \mathfrak{m}(\mathcal{F}^{[k]}))$ である. 補題 1.9 (iv) 及び

補題 3.3 (ii) によって，

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{\mathcal{F}^{[k]}}\Big(\sum_{i=1}^{2\ell}(-1)^i\,F_{2k-1,\,\nu_i}\,\eta(e_{2k}e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\nu_{2\ell}\}})\Big)\\
&= -\frac{2}{2\ell-1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\,\gamma_{\mathcal{F}^{[k]}}(\,F_{2k-1,\,\nu_i}F_{2k,\,\nu_j}-F_{2k-1,\,\nu_j}F_{2k,\,\nu_i}\,)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\,\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\nu_{2\ell}\}})\\
&= -\frac{2}{2\ell-1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\,(\,\frac{\sqrt{-1}}{2}F_{\nu_i,\,\nu_j}-\frac{\sqrt{-1}}{2}F_{\nu_j,\,\nu_i}\,)\,\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\nu_{2\ell}\}})\\
&= -\frac{2\sqrt{-1}}{2\ell-1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\,F_{\nu_i,\,\nu_j}\,\eta(e_{\{\nu_1,\ldots,\widehat{\nu_i},\ldots,\widehat{\nu_j},\ldots,\nu_{2\ell}\}})\\
&= -\frac{2\sqrt{-1}}{2\ell-1}\,\frac{\ell(2\ell-1)}{2}\,\eta(e_I) \qquad\qquad (\text{補題 } 2.4\text{ (ii)})\\
&= -\sqrt{-1}\,\ell\,\eta(e_I).
\end{aligned}
$$

(3.1) の第一項はすでに $\mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}^{[k]}}\oplus\mathfrak{m}(\mathcal{F}^{[k]}))$ に属しているので，

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\mathcal{F}^{[k]}}(\eta(e_{2k-1}e_{2k}e_I)) &= \frac{2}{2\ell+1}\,F_{2k-1,\,2k}\,\eta(e_I)\\
&\quad+\frac{2}{2\ell+1}(\,-\sqrt{-1}\,\ell\,\eta(e_I)\,)\\
&= \frac{1}{2\ell+1}\,(\frac{2}{\sqrt{-1}})\,(\,\sqrt{-1}F_{2k-1,\,2k}+\ell\,)\,\eta(e_I)
\end{aligned}
$$

を得る． □

Pfaffian 型の作用素の Harish-Chandra 準同形による像を求める．

定義 3.4. $\mathfrak{S}_n$ の特別な要素 p を

$$
\begin{cases}
p(2k-1)=2k & \text{for } k=1,\ldots,m,\\
p(2k)=2k-1 & \text{for } k=1,\ldots,m,\\
p(n)=n & \text{if } n=2m+1
\end{cases}
$$

で定める．また，非負整数 $\ell=0,1,\ldots$ に対して，$C^{(\ell)}=\frac{\ell!}{(2\ell)!}\left(\frac{4}{\sqrt{-1}}\right)^{\ell}$ という定数を定める．

定理 3.5. (i) $\ell=1,\ldots,m$ とし，$I=\{\nu_1,\ldots,\nu_{2\ell}\}$ を重複のない添字の列とする．ある $i=1,\ldots,2\ell$ に対して $p(\nu_i)\notin I$ であれば，

$$\gamma(\eta(e_I))=0.$$

(ii) $\ell=1,\ldots,m$ とし $J=\{\nu_1,\ldots,\nu_\ell\}$ を $1\le\nu_1<\cdots<\nu_\ell\le m$ なる整数列とする．$I=\{\,2\nu_1-1,2\nu_1,2\nu_2-1,2\nu_2,\cdots,2\nu_\ell-1,2\nu_\ell\,\}$ と置くと，

$$\gamma(\eta(e_I))=C^{(\ell)}\prod_{i=1}^{\ell}(\sqrt{-1}F_{2\nu_i-1,\,2\nu_i}+(\ell-i))$$

が成り立つ．

証明. (i). ν_i は $2m+1$ とはなり得ない. また, $F_{\nu_i,\,p(\nu_i)} \in \mathfrak{h}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} e_I &= e_{\{\nu_1,\dots,\nu_{i-1}\}}\Big(\frac{e_{\nu_i}+\sqrt{-1}e_{p(\nu_i)}}{2}\Big)e_{\{\nu_{i+1},\dots,\nu_{2\ell}\}} \\ &\quad + e_{\{\nu_1,\dots,\nu_{i-1}\}}\Big(\frac{e_{\nu_i}-\sqrt{-1}e_{p(\nu_i)}}{2}\Big)e_{\{\nu_{i+1},\dots,\nu_{2\ell}\}}, \end{aligned}$$

であるから, $\eta(e_I)$ は 2 つの 0 でない固有値を持つ $F_{\nu_i,\,p(\nu_i)}$-固有ベクトルの和である. 従って補題 1.9 (ii) により, γ の像は消える.

(ii) は ℓ に関する帰納法で示される. まず $\ell=1$ のとき (ii) は明らかである. 次に $\ell>1$ と仮定して,

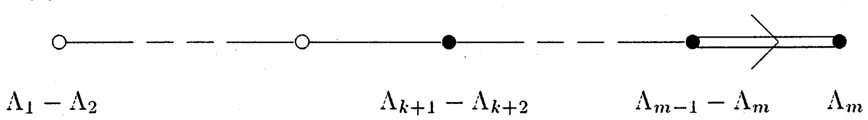
$$\begin{aligned} \gamma(\eta(e_I)) &= \gamma(\eta(e_{2\nu_1-1}e_{2\nu_1}e_{\{2\nu_2-1,2\nu_2,\cdots,2\nu_\ell-1,2\nu_\ell\}})) \\ &= \gamma\circ\gamma_{\mathcal{F}[\nu_1]}(\eta(e_{2\nu_1-1}e_{2\nu_1}e_{\{2\nu_2-1,2\nu_2,\cdots,2\nu_\ell-1,2\nu_\ell\}})) \\ &\qquad\qquad (\text{補題 } 1.9\ (\mathrm{v})) \\ &= \gamma\Big(\frac{1}{2\ell-1}\Big(\frac{2}{\sqrt{-1}}\Big)(\sqrt{-1}F_{2\nu_1-1,\,2\nu_1}+(\ell-1))\cdot \\ &\qquad \cdot\,\eta(e_{\{2\nu_2-1,2\nu_2,\cdots,2\nu_\ell-1,2\nu_\ell\}})\Big) \quad (\text{命題 } 3.2) \\ &= \frac{\ell}{2\ell(2\ell-1)}\Big(\frac{4}{\sqrt{-1}}\Big)(\sqrt{-1}F_{2\nu_1-1,\,2\nu_1}+(\ell-1))\cdot \\ &\qquad \cdot\,\gamma(\eta(e_{\{2\nu_2-1,2\nu_2,\cdots,2\nu_\ell-1,2\nu_\ell\}})). \quad (\text{補題 } 1.9\ (\mathrm{iv})) \end{aligned}$$

従って, 各 ℓ に対して (ii) を得た. □

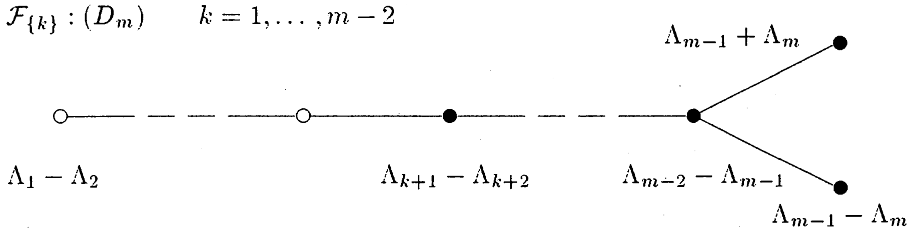
さて, この講演の主結果として, (B_m) 型 (D_m) 型共通の場合について, 問題 1.1 の解を構成する. 後で, 他に場合にも Pfaffian 型の作用素を用いて問題 1.1 の解を構成するが, ここに述べるものがいろいろな意味で一番強いものとなっている.

定義 3.6. $k=1,\dots,m-2$ に対して, $\mathcal{F}_{\{k\}}=\Pi\backslash\{\Lambda_1-\Lambda_2,\dots,\Lambda_k-\Lambda_{k+1}\}$ と置く. また, $n=2m+1$ の場合には, $\mathcal{F}_{\{m-1\}}$ に対しても同じ定義をする. この定義は, 次の Dynkin 図式で視覚化される. 黒丸が退化しているルートである：

$\mathcal{F}_{\{k\}}:(B_m) \qquad k=1,\dots,m-1$



$\mathcal{F}_{\{k\}}:(D_m) \qquad k=1,\dots,m-2$



この定義のもと,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}} &= \{\sqrt{-1}F_{1,2},\dots,\sqrt{-1}F_{2k-1,2k}\}, \\ \mathfrak{h}(\mathcal{F}_{\{k\}}) &= \{\sqrt{-1}F_{2k+1,2k+2},\dots,\sqrt{-1}F_{2m-1,2m}\} \end{aligned}$$

に注意する.

定理 3.7. $n=2m+1$ の場合は $k=1,\dots,m-1$, $n=2m$ の場合は $k=1,\dots,m-2$ とする．また，多項式

$$\Psi_{\{k\}}=\prod_{i=1}^{k}(\sqrt{-1}F_{2i-1,2i}+k-i+1)\in \mathrm{U}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})=\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$$

を定めると以下が成り立つ：

(i) $\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)\subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})\oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)$.

(ii) イデアル $\mathcal{I}\subset \mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ に対して

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathcal{I}\oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)\supset \mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})$$

が成り立つためには，$\mathcal{I}+\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\Psi_{\{k\}}=\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ が必要十分である．

(iii) $\lambda\in {\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*$ に対して

$$J_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)=\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$$

が成立するためには

$$\lambda(\sqrt{-1}F_{2i-1,2i})\neq-(k-i+1)\quad \textit{for}\ i=1,\dots,k$$

が必要十分である．

注意 *3.8.* (i)，(ii) により，(ii) の条件を満たすイデアル $\mathcal{I}\subset \mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ は，

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathcal{I}\oplus\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})\oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)=\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathcal{I}\oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)$$

を満たす．問題 1.1 は，主系列，退化主系列に関連した 2 つの左イデアルの差を求めよというものであったが，このことは，$\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)$ がより一般化された 2 つの左イデアルの差にもなっていることを示す．

定理 *3.7* の証明．退化の仕方から，各 $\lambda\in{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*$ は，複素数 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ を用いて，$\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}}=\lambda_1\Lambda_1+\cdots+\lambda_k\Lambda_k+0\,\Lambda_{k+1}+\cdots+0\,\Lambda_m$ と表せる．以下ではこのような $\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\in\mathfrak{h}^*$ を簡単に $(\lambda_1,\dots,\lambda_k,0,\dots,0)$ と記すことにする．まず定理 3.5 によって，各 $e_I\in Cl^{(2(k+1))}(n)$ に対して $\gamma(\,\eta(e_I)\,)(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})=0$ となることがすぐ分かる．この $\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)$ に命題 1.5 を用いるために，$\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)\subset\mathrm{U}(\mathfrak{g})\subset\mathrm{U}(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}')$ とみなすと，任意の $\lambda\in{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*$ に対して $A_\lambda(\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big))=\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)$ であるから，命題 1.5 によって，各 $\lambda\in{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*$ に対して $\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)\subset J_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)$ となる．一方，$\bigcap\{\,J_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)\mid\lambda\in{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*\,\}=\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})\oplus\mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)$ より (i) を得る．

$2k<\alpha<\beta\le n$ なる添字の組 (α,β) に対して，$e_{\{1,\dots,2k\}}e_\alpha e_\beta\in Cl^{(2(k+1))}(n)$ である．$\mathcal{F}^{[i]}\supset\mathcal{F}_{\{k\}}$ for $i=1,\dots,k$ であるから，Harish-Chandra 準同形の計算のときと同様に命題 3.2 から帰納的に

$$\gamma_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\Big(\eta\big(e_{\{1,\dots,2k\}}e_\alpha e_\beta\big)\Big)=\sqrt{-1}F_{\alpha,\beta}\,C^{(k+1)}\,\Psi_{\{k\}}$$

を得る．

更に，$\eta\big(e_{\{1,\dots,2k\}}e_\alpha e_\beta\big)\in\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}$ であるから，補題 1.9 (iii) により，

$$\eta\big(e_{\{1,\dots,2k\}}e_\alpha e_\beta\big)\equiv\sqrt{-1}F_{\alpha,\beta}\,C^{(k+1)}\,\Psi_{\{k\}}\quad \mathrm{mod}\ \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}$$

となる．$\{\sqrt{-1}F_{\alpha,\beta} \mid 2k<\alpha<\beta\le n\}$ は $\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})$ の基底となるので，イデアル $\mathcal{I}\subset \mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ が $\mathcal{I}+\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\Psi_{\{k\}}=\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ を満たせば，

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathcal{I}\oplus\mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)\supset\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}}).$$

が成り立つ．特に極大イデアル

$$\mathcal{I}=\langle(\sqrt{-1}F_{1,2}-\lambda_1),\dots,(\sqrt{-1}F_{2k-1,2k}-\lambda_k)\rangle\subset\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$$

を考えると，各 $i=1,\dots,k$ に対して $\lambda_i\neq-(k-i+1)$ であれば，$J_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)=\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ が成り立つ．

(iii) の必要性を示すために，ある $i=1,\dots,k$ に対して $\lambda_i=-(k-i+1)$ であると仮定する．

$$\alpha=\begin{cases}\Lambda_{k+1}-\Lambda_{k+2} & n\neq 2m+1 \text{ または } k<m-1 \text{ の場合},\\ \Lambda_n & n=2m+1 \text{ で } k=m-1 \text{ である場合},\end{cases}$$

という単純ルート $\alpha\in\mathcal{F}_{\{k\}}$ をとると，$\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}}-\alpha=(\lambda_1,\dots,\lambda_k,-1,1,0,\dots,0)$ あるいは $\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}}-\alpha=(\lambda_1,\dots,\lambda_k,-1)$ となる．ここで，定理 3.5 から，すべての $e_I\in Cl^{(2(k+1))}(n)$ に対して $\gamma(\,\eta(e_I)\,)(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}}-\alpha)=0$ となることが容易に分かる．従って命題 1.6 (e) により，$J_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)\not\subset\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ となって (iii) が得られた．

最後に，(ii) の必要性を示すために，イデアル $\mathcal{I}\subset\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ が $\mathcal{I}+\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\Psi_{\{k\}}\subsetneq\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})$ であると仮定する．このとき，複素数 $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ を極大イデアル $\langle(\sqrt{-1}F_{1,2}-\lambda_1),\dots,(\sqrt{-1}F_{2k-1,2k}-\lambda_k)\rangle$ が $\mathcal{I}+\mathrm{S}(\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\Psi_{\{k\}}$ を含むように取れる．すると，$\Psi_{\{k\}}$ の定義から，ある $i=1,\dots,k$ について $\lambda_i+(k-i+1)=0$ となる．$\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}}=(\lambda_1,\dots,\lambda_k,0,\dots,0)\in{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*$ と置くと，(iii) より $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\not\supset\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})$ である．$J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\supset\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathcal{I}\oplus\mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)$ であるから，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)+\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,(\,\mathcal{I}\oplus\mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}\,)\not\supset\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{\{k\}})$ が導かれる． □

この解 $\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)$ が非常に強いものであることを示すものに，$(\mathfrak{g},\mathcal{F}_{\{k\}},\lambda)$ に対する問題に解が存在する場合には，$\eta\big(Cl^{(2(k+1))}(n)\big)$ がいつでも解の 1 つになっていることがある：

定理 3.9. $n\geq 6$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ とする．$m=3,4,\dots$ を $n=2m+1$ または $2m$ となるようにとり，$k=1,\dots,m-2$ とする．このとき，$\lambda\in{\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}}^*$ に対して，

$$J_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)=\mathrm{Ann}\,\mathrm{M}_{\mathcal{F}_{\{k\}}}(\lambda)\,+J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{k\}}})\tag{3.2}$$

となるためには，

$$\lambda(\sqrt{-1}F_{2i-1,2i})\neq-(k-i+1)\qquad \mathit{for}\ i=1,\dots,k\tag{3.3}$$

が必要十分である．

証明．(3.2) は問題 1.1 が解を持つための必要十分条件であることに注意する．従って，定理 3.7 により，(3.3) であれば (3.2) が成り立つ．必要性を示すために，$\Xi=\{\Lambda_1-\Lambda_2,\Lambda_2-\Lambda_3,\dots,\Lambda_{m-1}-\Lambda_m\}\subset\Pi$ と置く．すると，$\mathfrak{h}_\Xi\oplus\mathfrak{m}(\Xi)\cong\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ である．命題 1.10 (ii) によると，もし(3.2) が満たされれば，$(\mathfrak{g},\mathcal{F},\lambda)\to(\mathfrak{h}_\Xi\oplus\mathfrak{m}(\Xi),\mathcal{F}|_\Xi,\lambda)$ とした問題 1.1 も解を持つ．[15] で与えられた $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$ の場合における問題の解が存在するための必要十分条件によると，$(\mathfrak{h}_\Xi\oplus\mathfrak{m}(\Xi),\mathcal{F}|_\Xi,\lambda)$ に対する問題 1.1 が解を持つためには，(3.3) が必要十分である．こうして必要性も示された． □

注意 *3.10.* $n=2m+1$ で $k=m-1$ の場合には，上の議論を適用できない．

この節の最後に，$n=2m$ で m が偶であるような特別な場合について考察する．このとき，$Cl^{(m)}(2m)$ は可約であって，$Cl^{(m)}(2m)=Cl^{(m,+)}(2m)\oplus Cl^{(m,-)}(2m)$ である (命題 2.2).

$$S_1=\{\,\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{\frac{m}{2}-1})\in\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}}}{}^*\mid\lambda_i\neq-(\frac{m}{2}-i)\ \text{ for } i=1,\dots,\tfrac{m}{2}-1\,\}$$

と置くと，定理 3.7(iii) により，$\lambda\in S_1$ のとき $Cl^{(m)}(2m)$ が $(\mathfrak{g},\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}},\lambda)$ に対する問題の解となっている．このとき実は，有限個の除外点を除いて，$Cl^{(m)}(2m)$ の既約成分である $Cl^{(m,+)}(2m)$ や $Cl^{(m,-)}(2m)$ が，それだけですでに問題の解となっている．各 $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_{\frac{m}{2}-1})\in\{0,1\}^{\frac{m}{2}-1}$ に対して，$\lambda_\kappa=(\lambda_{\kappa,1},\dots,\lambda_{\kappa,\frac{m}{2}-1})\in\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}}}{}^*$ を $\lambda_{\kappa,i}=-(m-i-1)\kappa_i-(-1)^{\kappa_i}\sum_{j>i}\kappa_j$ $(i=1,\dots,\frac{m}{2}-1)$ により定義し，

$$S_2=\{\,\lambda_\kappa\in\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}}}{}^*\mid\kappa\in\{0,1\}^{\frac{m}{2}-1}\,\}$$

と置く．すると，$S_2\subset S_1$ であり，$\#S_2=2^{\frac{m}{2}-1}$ であるが，この S_2 がその除外点である：

定理 3.11. $\varepsilon=\pm1$ として，$\lambda\in\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}}}{}^*$ に対して，

$$J_{\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}}}(\lambda)=\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\eta\big(Cl^{(m,\varepsilon)}(2m)\big)+J(\lambda_{\mathcal{F}_{\{\frac{m}{2}-1\}}})\tag{3.4}$$

であるためには，$\lambda\in S_1\setminus S_2$ が必要十分である．

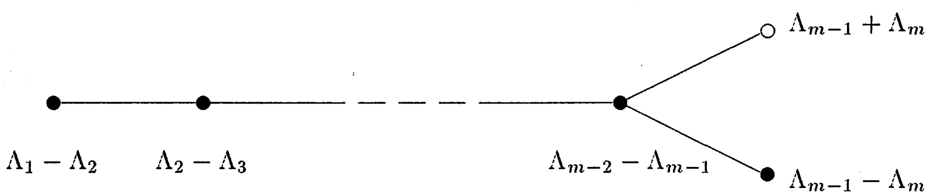
4 (D) 型固有の解

(D_m) $(m\geq3)$ の場合には，$e_{\mathrm{top}}\in Cl(n)_0$ なので，前節で扱った以外の $\mathcal{F}\subset\Pi$ に対しても Pfaffian 型の作用素により問題 1.1 の解が構成できる．本節では，その結果を証明抜きで述べる．実際の証明は，前節の場合と同様に，命題 1.5 と命題 1.6$(e)\Rightarrow(a)$ を用いてなされる．

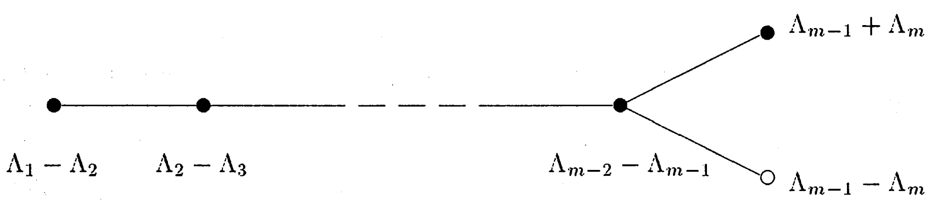
前節以外に Pfaffian 型の線形結合により解が構成できる場合の Π の部分集合は以下の二つである：

定義 4.1. $\varepsilon=\pm1$ に対して，$\mathcal{F}_{(\varepsilon)}=\Pi\backslash\{\,\Lambda_{m-1}+\varepsilon\Lambda_m\,\}=\{\,\Lambda_1-\Lambda_2,\dots,\Lambda_{m-2}-\Lambda_{m-1},\Lambda_{m-1}-\varepsilon\Lambda_m\,\}$ と置く．

$\mathcal{F}_{(+)}$:



$\mathcal{F}_{(-)}$:



この定義のもと，

$$H_\varepsilon\ =\ \frac{\sqrt{-1}F_{1,2}+\cdots+\sqrt{-1}F_{2m-3,\,2m-2}+\varepsilon\sqrt{-1}F_{2m-1,\,2m}}{m}\in\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}}$$

と置くと，$\mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}} = \mathbb{C}H_\varepsilon$ であり，

$$\begin{cases} \sqrt{-1}F_{2\nu-1,2\nu} \equiv H_\varepsilon \mod \mathfrak{h}(\mathcal{F}_{(\varepsilon)}) & \nu = 1,\dots,m-1, \\ \sqrt{-1}F_{2m-1,2m} \equiv \varepsilon H_\varepsilon \mod \mathfrak{h}(\mathcal{F}_{(\varepsilon)}) \end{cases} \tag{4.1}$$

となることに注意．解を構成するために以下を準備する：

定義 4.2. $\ell = 1,2,\dots,[\frac{m}{2}]$ とし，$\varepsilon = \pm 1$ とする．複素パラメータ τ を用いて，

$$V(\tau,\varepsilon,\ell) = \eta\big(\{(-1)^\ell \frac{\varepsilon}{C^{(m-\ell)}} e_{\mathrm{top}} - \frac{\tau}{C^{(\ell)}}\} Cl^{(2\ell)}(2m)\big)$$

と置く，更に，x を変数とする多項式 $\Phi^{(\ell)}(x)$ を

$$\Phi^{(\ell)}(x) = \prod_{i=1}^{m-2\ell} (x + (m-\ell-i)) \quad \in \mathbb{C}[x]$$

で定義する．

$\ell \neq \frac{m}{2}$ の場合は，命題 2.1 により，$V(\tau,\varepsilon,\ell)$ は $\eta(Cl^{(2\ell)}(2m) \oplus Cl^{(2(m-\ell))}(2m))$ の既約な ad($\mathfrak{g}$)-stable 部分空間であり，m が偶，$\ell = \frac{m}{2}$ の場合は，$\Phi^{(\frac{m}{2})}(x) = 1$ であり，$Cl^{(m,\varepsilon)}(2m)$ の定義により，$V(1,\varepsilon,\frac{m}{2}) = \eta(Cl^{(m,\varepsilon)}(2m))$ である．ここで，$\ell = 1,2,\dots,[\frac{m}{2}]$ を固定すると，generic な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}}{}^*$ に対して，$V(\Phi^{(\ell)}(\lambda(H_\varepsilon)),\varepsilon,\ell)$ が $\mathcal{F}_{(\varepsilon)}$ に対する問題 1.1 の解となる．このように，$\mathcal{F}_{(\varepsilon)}$ に対する解として $[\frac{m}{2}]$ 個の異なるものを Pfaffian 型の作用素を用いて構成できる：

定理 4.3. $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}}{}^*$ に対して，

$$J_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})V(\Phi^{(\ell)}(\lambda(H_\varepsilon)),\varepsilon,\ell) + J(\lambda_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}})$$

であるためには，

- $\ell = 1$ のとき：

$$\lambda(H_\varepsilon) \notin \{-1,\dots,-(m-2)\} \cup \{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\dots,-(\left[\frac{m-1}{2}\right]-\frac{1}{2})\},$$

- $2 \leq \ell \leq [\frac{m}{2}]$ のとき：

$$\lambda(H_\varepsilon) \notin \{0,-1,\dots,-(m-\ell-1)\} \cup \{-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\dots,-(\left[\frac{m-1}{2}\right]-\frac{1}{2})\}$$

が必要十分である．

より詳しいイデアルの包含関係：

$$V(\tau,\varepsilon,\ell) \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})\{\Phi^{(\ell)}(H_\varepsilon) - \tau\} + \mathrm{U}(\mathfrak{g})(\mathfrak{m}(\mathcal{F}_{(\varepsilon)}) \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{F}_{(\varepsilon)}})$$

等も示すことができる．

5 行列式型の作用素

$n \geq 3$，$n = 2m$ または $2m+1$ として前と同様に $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$ について考察する．$F_{i,i} = 0$ $(i = 1,\dots,n)$ とし，x をパラメータとして $F_{i,j}(x) \in U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ を

$$F_{i,j}(x) = F_{i,j} + x\delta_{i,j}$$

で定めておく．このとき，直交 Lie 環における行列式型の作用素を，以下で定める:

定義 5.1. $k = 0, \ldots, n$ とし，$I = \{i_1, \ldots, i_k\}$，$J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ をそれぞれ重複のない添字 $(1, \ldots, n)$ の列とする．この I, J に対して，$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ に値を取る列行列式：

$$D_{IJ}(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) F_{i_{\sigma(1)}, j_1}(x) F_{i_{\sigma(2)}, j_2}(x+1) \cdots F_{i_{\sigma(k)}, j_k}(x+k-1) \tag{5.1}$$

を直交 Lie 環の行列式型の作用素と呼ぶ．但し，$k = 0$ のときは，$D_{\emptyset\emptyset}(\lambda) = 1$ とする．

$I = J = \{1, \ldots, n\}$ のとき，$D(x) = D_{IJ}(x)$ は，$\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ に属する要素として [8] で導入され，[9] でその性質が詳しく調べられた．そのほとんどの性質は，一般の $D_{IJ}(x)$ にそのまま拡張される：

命題 5.2 ([8]). 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$ に対して

$$D_{\sigma(I)\tau(J)}(x) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) D_{IJ}(x) \tag{5.2}$$

が成り立つ．

命題 5.3 ([9]). I, J をそれぞれ重複を持たない k 個の添字の列とすると，

$$D_{JI}(x) = (-1)^k D_{IJ}(-x-k+1).$$

「$D(x) \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$」は次のように拡張される：

命題 5.4. 線形写像 $Cl^{(k)}(n)^{\otimes 2} \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ を

$$Cl^{(k)}(n)^{\otimes 2} \ni e_I \otimes e_J \longmapsto D_{IJ}(x) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$$

で定めると，これは $\mathfrak{g}$-写像となる．

上の写像における $e \in Cl^{(k)}(n)^{\otimes 2}$ の像を $D(e; x)$ と記す．

以下しばらく，“対角”の場合，すなわち $I = J$ の場合を扱う．対角の行列式型作用素に関しては，次の重要な結果がある：

定理 5.5 ([9]). I を重複を持たない $2k$ 個（$k = 0, \ldots, m$）の添字の列とすると，

$$D_{II}(-k) = D_{II}(-k+1) = \frac{(-1)^k}{C^{(k)^2}} \eta^{\otimes 2}(e_I \otimes e_I).$$

ここで，$\eta^{\otimes 2}$ は

$$Cl(n)^{\otimes 2} \ni e_I \otimes e_J \longmapsto \eta(e_I)\eta(e_J) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

で定まる $\mathfrak{g}$-写像とする．

この定理を用いると，$D_{II}(x)$ を Pfaffian のみを用いた式で表す次の展開公式が導かれる：

命題 5.6 ([9]). I を重複を持たない $2k$ 個（$k = 0, \ldots, m$）の添字の列とすると，

$$D_{II}(x-k) = \sum_{\nu=0}^{k} \Bigl(\sum_{\substack{J \subset I \\ \# J = 2k-2\nu}} \frac{(-1)^{k-\nu}}{C^{(k-\nu)^2}} \eta^{\otimes 2}(e_J \otimes e_J) \Bigr) (x-\nu)(x-\nu+1) \cdots (x+\nu-1),$$

I を重複を持たない $2k+1$ 個（$k = 0, \ldots, [\frac{n-1}{2}]$）の添字の列とすると，

$$D_{II}(x-k) = \sum_{\nu=0}^{k} \Bigl(\sum_{\substack{J \subset I \\ \# J = 2k-2\nu}} \frac{(-1)^{k-\nu}}{C^{(k-\nu)^2}} \eta^{\otimes 2}(e_J \otimes e_J) \Bigr) (x-\nu)(x-\nu+1) \cdots (x+\nu)$$

が成り立つ．

この展開公式を手掛りに，行列式型の作用素を更に拡張することを考える．そのために，$\mathfrak{g}$-加群：

$$Cl(n)^{\otimes 2} = \bigoplus_{k,\ell=0}^{n} Cl^{(k)}(n) \otimes Cl^{(\ell)}(n)$$

に関して少し準備をする．上の直和分解の各成分 $Cl^{(k)}(n)\otimes Cl^{(\ell)}(n)$ は $\mathfrak{g}$-stable である．この $Cl^{(k)}(n)\otimes Cl^{(\ell)}(n)$ を $Cl^{(k,\ell)}(n)$ と書く．また，$k<0$ または $\ell<0$ のときには $Cl^{(k,\ell)}(n)=0$ と定めておく．$\theta=\sum_{i=1}^{n} e_i$ と置くと，任意の $e\in Cl^{(k,\ell)}(n)$ に対して $\theta\cdot e\in Cl^{(k+1,\ell+1)}(n)\oplus Cl^{(k+1,\ell-1)}(n)\oplus Cl^{(k-1,\ell+1)}(n)\oplus Cl^{(k-1,\ell-1)}(n)$ であるが，この $\theta\cdot e$ の $Cl^{(k+1,\ell-1)}(n)$，$Cl^{(k-1,\ell-1)}(n)$ への射影をそれぞれ $s_{\mathrm{left}}(e)$，$s_{\mathrm{down}}(e)$ として，線形写像

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{left}} &: Cl^{(k,\ell)}(n) \longrightarrow Cl^{(k+1,\ell-1)}(n), \\ s_{\mathrm{down}} &: Cl^{(k,\ell)}(n) \longrightarrow Cl^{(k-1,\ell-1)}(n) \end{aligned}$$

を定める．$s_{\mathrm{left}}(e)$，$s_{\mathrm{down}}(e)$ はともに $\mathfrak{g}$-写像になっている．そこで，$n\geq k\geq \ell\geq 0$ を満たす (k,ℓ) に対して，

$$Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} = \mathrm{Ker}\Big(s_{\mathrm{left}} : Cl^{(k,\ell)}(n) \longrightarrow Cl^{(k+1,\ell-1)}(n)\Big)$$

と置くと，$Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}}$ は $Cl^{(k,\ell)}(n)$ の $\mathfrak{g}$-部分加群である．

補題 5.7. $Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}}$ は

$$e_I\otimes e_J \in Cl^{(k)}(n)\otimes Cl^{(\ell)}(n) = Cl^{(k,\ell)}(n), \qquad I\supset J$$

という形の要素で $\mathfrak{g}$-加群として生成される．特に $k=\ell$ のときは対角の要素によって生成される．

各 $\nu=0,1,2,\ldots$ に対して，a，x の多項式 $\Upsilon(a,\nu;x)$ を

$$\Upsilon(a,\nu;x) = \prod_{\mu=0}^{\nu}\big(x^2-(a+\mu-1)^2\big)$$

で定める．

定義 5.8. (k,ℓ) は $n\geq k\geq \ell\geq 0$ を満たすとする．更に，k と ℓ の偶奇性は等しいとし，k が偶のとき $\kappa=0$，k が奇のとき $\kappa=1$ とする．各 $e\in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}}$ に対して，$\mathfrak{D}(e;x)\in \mathrm{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[x]$ を

$$\mathfrak{D}(e;x) = \sum_{\nu=0}^{\frac{\ell-\kappa}{2}} \frac{(-1)^{\frac{\ell-\kappa}{2}-\nu}\eta^{\otimes 2}\big({s_{\mathrm{down}}}^{2\nu+\kappa}(e)\big)}{(2\nu+\kappa)!\, C^{(\frac{k-\kappa}{2}-\nu)} C^{(\frac{\ell-\kappa}{2}-\nu)}} \Upsilon\Big(\frac{\ell-k+2\kappa}{4},\nu;x\Big)$$

で定める．ここで，$C^{(\cdot)}$ は定義 3.4 で定めた定数とする．

s_{down}，$\eta^{\otimes 2}$ が $\mathfrak{g}$-写像であるため，

$$Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} \ni e \longmapsto \mathfrak{D}(e;x) \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[x]$$

も $\mathfrak{g}$-写像である．$\mathfrak{D}(e;x)$ がある意味で行列式型の作用素の拡張となっていることは，補題 5.7 と命題 5.6 より容易に導かれる次から分かる：

命題 5.9. $k=0,\ldots,m$ とすると，各 $e\in Cl^{(2k,2k)}(n)_{\mathrm{pr}}$ に対して，

$$\frac{D(e;x-k)+D(e;-x-k)}{2} = \mathfrak{D}(e;x),$$

$k = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$ とすると，各 $e \in Cl^{(2k+1,2k+1)}(n)_{\mathrm{pr}}$ に対して，

$$\frac{D(e; x - k - \frac{1}{2}) - D(e; -x - k - \frac{1}{2})}{2x} = \mathfrak{D}(e; x)$$

が成り立つ．

本稿の最後に，この $\mathfrak{D}(e;x)$ を用いて，Pfaffian 型では扱えなかった場合に，問題 1.1 の解を構成する．$Y = (m_1, m_2, m_3)$ を m の分割（$m = m_1 + m_2 + m_3$ で各 m_i は非負整数）とし，$m_2 \geq 2$ とする．この Y に対して，Π の部分集合 $\mathcal{F}_Y = \{\Lambda_{m_1+1} - \Lambda_{m_1+2}, \dots, \Lambda_{m_1+m_2-1} - \Lambda_{m_1+m_2}\}$ を定める．また，$n = 2m$，$m_3 = 0$ のときは $\mathcal{F}_Y^- = \{\Lambda_{m_1+1} - \Lambda_{m_1+2}, \dots, \Lambda_{m_1+m_2-2} - \Lambda_{m_1+m_2-1}, \Lambda_{m_1+m_2-1} + \Lambda_{m_1+m_2}\}$ とする．

定理 5.10. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_Y$ または $\mathcal{F}_Y^-$ とし，$\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して，$V_\lambda \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ を以下の要素で張られる線形空間とする：

$$\mathfrak{D}\Big(e; \lambda_{\mathcal{F}}(\sqrt{-1}F_{2m_1+1, 2m_1+2}) + \frac{j}{2} - m_1 - 1 - i\Big) \quad \mathit{for} \quad \begin{cases} j \in \{n - m_2 + 1, \dots, n\} \\ i \in \{0, \dots, j - (n - m_2 + 1)\} \\ k \geq \ell, \quad \frac{k+\ell}{2} = j \\ e \in Cl^{(k,\ell)}(n)_{\mathrm{pr}} \end{cases}$$

すると，*generic* な $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathcal{F}}{}^*$ に対して，

$$J_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) V_\lambda + J(\lambda_{\mathcal{F}})$$

が成り立つ．

この定理は，Pfaffian 型のときの命題 3.2 のような partial Harish-Chandra 準同形に関する漸化式をいろいろな $\mathfrak{D}(e;x)$ に対して計算することにより得られる．この結果と，§3 の結果を合わせると，直交 Lie 環の場合のすべての $\mathcal{F} \subset \Pi$ に対する問題 1.1 を generic パラメータに対して解くことができる．

参考文献

[1] J. F. Adams, *Lectures on Exceptional Lie Groups*, The University of Chicago Press, 1996, Edited by Zafer Mahmud and Mamoru Mimura.

[2] J. N. Bernstein and S. I. Gel'fand, *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras*, Comp. Math. **41** (1980), 245–285.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, 1959, chap. 9.

[4] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.

[5] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.

[6] C. Chevalley, *Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, 1954.

[7] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[8] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[9] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint, Department of Mathematics, Faculty of Science, Univ. Kyoto, 1999.

[10] A. Joseph, *Dixmier's problrem for Verma and principal series submodules*, J. London Math. Soc. **20** (1979), 193–204.

[11] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, 1986.

[12] H. Oda, *Annihilator operators of the degenerate principal series for simple Lie groups of type* (D) *and* (B), Ph.D. thesis, University of Tokyo, 2000.

[13] ———, *On Pfaffian-type operators of orthogonal Lie algebras*, preprint, Department of Mathematical Science, Univ. Tokyo, 2000, UTMS 2000-47.

[14] T. Oshima, *Generalized Capelli identities and boundary value problems for* $GL(n)$, Structure of Solutions of Differential Equations, World Scientific, 1996, pp. 307–335.

[15] ———, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, preprint, Department of Mathematical Science, Univ. Tokyo, 2000, UTMS 2000-38.

[16] I. R. Porteous, *Topological Geometry*, 2 ed., Cambride University Press, 1981.

[17] H. Schlichtkrull, *Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, 1984.