

Conditional Expectations と Sampling Functions を巡る函数解析

東京工業大学名誉教授
梅垣壽春 (HISAHARU UMEGAKI)

表記の Conditional Expectations という概念は、本来は確率論に於ける基本的な部分を形成している。この概念を 1953 年以来、非可換解析を念頭に置いて展開してきたが、今回遡ってその構成の一端を振り返りながら、新たな構成に論を進めたいと思う。

§1. 確率空間上の Conditional Expectations

$\Omega = (\Omega, \mathcal{L}_\Omega, P)$ を確率空間とし、 \mathcal{B} を \mathcal{L}_Ω 上の σ -部分集合体とする。まず、 \mathcal{B} を制限し、有限な部分集合体とし、その ‘atoms’ 全体を

$$\mathcal{B}_0 \triangleq \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

とし

$$P(A/\mathcal{B}_0) \triangleq \sum_{B \in \mathcal{B}_0} 1_B \cdot P(A \cap B)/P(B) \tag{1.1}$$

と置き、これを $A \in \mathcal{L}_\Omega$ の条件付確率 (relative to \mathcal{B}_0) という。茲で 1_B は B の定義函数である。

更に (複素数値) 確率変数 f に対して

$$E(f/\mathcal{B}_0) \triangleq \sum_{B \in \mathcal{B}_0} (1_B(\cdot)/P(B)) \int_B f(\omega)P(d\omega)$$

と置き、これを ‘conditional expectation’ of f relative to \mathcal{B}_0 という。特に $f = 1_A$ とおくと

$$E(f/\mathcal{B}_0) = P(A/\mathcal{B}_0)$$

となる。

Conditional Expectation $E(f/\mathcal{B})$ に関する基本式は、 $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\int_B E(f/\mathcal{B})(\omega)P(d\omega) = \int_B f(\omega)P(d\omega) \tag{1.2}$$

であり、この等式 (1.2) が conditional expectation の特性方程式なのである。一般に、 \mathcal{B} を \mathcal{L}_Ω の一つの σ -部分集合体とする。このとき、 $\forall f \in L^1(\Omega)$ に対して、

等式 (1.2) を満たす \mathcal{B} -可測な確率変数 $E(f/\mathcal{B})$ が一意に存在する (この証明は Radon-Nikodym 定理を用いて行う).

Conditional Expectation に関する基本的性質は次の定理によって与えられる.

定理 1.1. 函数空間 $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, P)$ ($1 \leq p < +\infty$) とし, σ -部分集合体 $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}_\Omega$ を与える $\Rightarrow \exists_1 E(f/\mathcal{B}) \in L^p$; 等式 (1.2) を満たす.

定理 1.2. 変換 $f \rightarrow E(f/\mathcal{B})$ は $L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega, \mathcal{B}, P)$ である射影変換で

- 1°. $\|E(f/\mathcal{B})\|_p \leq \|f\|_p$,
- 2°. $E(\bar{f}/\mathcal{B}) = \overline{E(f/\mathcal{B})}$, $E(1/\mathcal{B}) = 1$,
- 3°. $E(fg/\mathcal{B}) = E(f/\mathcal{B}) \cdot g$ ($g \in L^\infty(\Omega)$),
- 4°. $E(\alpha f + \beta g/\mathcal{B}) = \alpha E(f/\mathcal{B}) + \beta E(g/\mathcal{B})$.

特に, この定理に於いて, $p = 1$ or 2 の場合が重要で, 数学的興味が引かれる.

§2. Banach 空間値確率変数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \mu)$ 上で定義され, Banach 空間 \mathbf{B} に値をとる確率変数 f, g, \dots を考える. Ω の有限可測分割 $\{A_j\} \subset \mathcal{L}_\Omega$ と \mathbf{B} の元の有限列 $\{\xi_j\} \subset \mathbf{B}$ に対して Ω 上の函数 $f: f(\omega) = \sum 1_{A_j}(\omega)\xi_j$ (a.e. $\omega \in \Omega$) を simple random variable という. 更に, この様な函数列 $\{f_n\}$ によって

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \rightarrow 0 \quad (\text{a.e. } \omega \in \Omega)$$

である函数 f を strong random variable という.

注. strong convergence の代わりに weak convergence を採用しても同様に定義され (weak random variable), \mathbf{B} が可分の場合, 両者 (両可測性) は一致する.

上記の事柄を base にして strong random variables f, g, \dots の構成する L^p -空間 ($1 \leq p < \infty$) が定義される:

$$\|f\|_p \triangleq \left(\int_{\Omega} \|f(\omega)\|^p \mu(d\omega) \right)^{1/p} < +\infty$$

とし,

$$L^p(\Omega; \mathbf{B}) = L^p(\Omega, \mathcal{L}_\Omega, \mu; \mathbf{B})$$

とおくと, $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ は Banach 空間となり ($p = \infty$ の場合は, $\| \cdot \|_\infty = \text{esssup} \|f(\omega)\| < \infty$), 次の Tensor 積構成によって表される:

有限列の対 $\{x_j\} \subset L^p(\Omega)$ と $\{\xi_j\} \subset \mathbf{B}$ に対して

$$\sum_{j=1}^n x_j \odot \xi_j \triangleq \sum_{j=1}^n x_j(\omega) \xi_j \pmod{\mu}$$

とおく. これは $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ の要素であり, この形の函数の全体を $L^p(\Omega) \odot \mathbf{B}$ で表す. これは Banach 空間の対 $L^p(\Omega)$ と \mathbf{B} の間の pre-Tensor 積であり, またそれは $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ の dense 部分空間であり, 且つ $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ のノルム $\|\cdot\|_p$ は cross-norm になり:

$$\|x \odot \xi\|_p = \|x\|_p \cdot \|\xi\|, \quad x \in L^p(\Omega), \xi \in \mathbf{B} \quad (\text{cf. Schatten [6]}).$$

これより $L^p(\Omega) \odot \mathbf{B}$ のノルム $\|\cdot\|_p$ に関する完備化が $L^p(\Omega)$ と \mathbf{B} 間の Tensor Product Banach 空間 $L^p(\omega) \otimes \mathbf{B}$ である. 従って $1 \leq p < +\infty$ のとき

$$L^p(\Omega, \mathbf{B}) = L^p(\Omega) \otimes \mathbf{B}$$

であり, $\forall f \in L^p(\Omega; \mathbf{B})$ は Bochner 可積分である, i.e., 積分値 $\int f(\omega) P(d\omega)$ が \mathbf{B} の要素として一意に存在する. また, indentify $\xi = 1 \odot \xi$ ($\xi \in \mathbf{B}, 1 = 1_\Omega$) によって空間 \mathbf{B} は $L^p(\Omega; \mathbf{B})$ の閉部分空間と見なされ, 写像

$$f \rightarrow \int f(\omega) P(d\Omega)$$

は norm-one projection $L^p(\Omega, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$ (onto) となる.

本論で特に必要且つ有用なのは空間 $L^1(\Omega; \mathbf{B})$ と $L^\infty(\Omega; \mathbf{B})$ である. これらに於ける norm は Schatten Tensor 積, ノルムの対 N_γ, N_λ の記号によって表される:

$$N_\gamma \left(\sum_{i=1}^n x_i \odot \xi_i \right) = \inf \sum_{j=1}^m \|y_j\| \cdot \|\eta_j\|$$

$$N_\lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i \odot \xi_i \right) = \sup \sum_{i=1}^n \langle x_i, x^* \rangle \langle \xi_i, \xi^* \rangle$$

茲に, \inf は $\left\{ \forall y_j \in L^1(\Omega), \forall \eta_j \in \mathbf{B}; \sum_{i=1}^n x_i \odot \xi_i = \sum_{j=1}^m y_j \odot \eta_j \right\}$, \sup は $\left\{ \forall x^* \in L^\infty(\Omega), \forall \xi^* \in \mathbf{B} (\|x^*\|_\infty \leq 1, \|\xi^*\| \leq 1) \right\}$ についてとる.

N_γ, N_λ はノルム $\|\cdot\|_p$ ($p = 1$ or ∞) と一致する:

$$L^1(\Omega; \mathbf{B}) = L^1(\Omega) \otimes_\gamma \mathbf{B}$$

$$L^\infty(\Omega) \otimes_\lambda \mathbf{B} \subset L^\infty(\Omega; \mathbf{B})$$

§3. Conditional Expectations of Strong Random Variables $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{B})$

前§の記号をそのまま用いる. Strong random variable $f, g, \dots \in L^1(\Omega, \mathcal{B})$, σ -subfield $\mathcal{B} (\subset \mathcal{L}_\Omega)$ とし, f の \mathcal{B} に関する \mathcal{B} -valued conditional expectation $\mathcal{E}(f/\mathcal{B})$ は次の様に定義される:

(i) $\mathcal{E}(f/\mathcal{B})$ は \mathcal{B} に関して強可測で, 且つ可積分である, i.e., $\mathcal{E}(f/\mathcal{B}) \in L^1(\Omega, \mathcal{B})$.

$$(ii) \int_B \mathcal{E}(f/\mathcal{B})(\omega) \mu(d\omega) = \int_B f(\omega) \mu(d\omega) \text{ for } \forall B \in \mathcal{B}.$$

ただし, (ii) の積分は Bochner-Integral である. この vector valued f の Conditional Expectation の存在と構成法が問題となる.

これは次の様に示される.

$$\mathcal{E}(f \circ \xi/\mathcal{B}) = \mathcal{E}(f/\mathcal{B}) \circ \xi, \quad f \in L^1(\Omega), \xi \in \mathcal{B},$$

つまり, $f = f \circ \xi$ の場合に (i), (ii) を適用, これを linear-hull に拡大し, 更に Schatten ノルム N_γ の性質を用いて, 一般の $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B})$ に対して Conditional Expectation $\mathcal{E}(f/\mathcal{B})$ が構成される.

以上のように, \mathcal{B} -valued f に対して通常の Radon-Nikodym 定理と Tensor 積を組み合わせることによって, vector-valued な conditional expectation $\mathcal{E}(\cdot/\cdot)$ が構成される.

\mathcal{B} -valued Conditional Expectation が定義されると, strong Random variables が構成する Martingale 解析が展開される. Martingales は Conditional Expectations の有向系によって構成され, これの収束定理が \mathcal{B} -valued σ -additive 測度に対する Radon-Nikodym 定理の特性化に発展する.

§4. Sampling Functions S_λ と空間 BL_λ

表記の函数 S_λ は Entropy 論と共に Shannon 情報理論の支柱と云われる.

Fix された実数 $\lambda > 0$ に対して, 函数

$$S_\lambda(t) = \begin{cases} 2\lambda \frac{\sin 2\pi\lambda t}{2\pi\lambda t} & (t \neq 0, -\infty < t < \infty) \\ 2\lambda & (t = 0) \end{cases}$$

が Sampling Function である. これの Fourier 変換 は

$$\hat{S}_\lambda(\omega) = 1_{[-\lambda, \lambda]}(\omega) \quad (= \text{区間 } [-\lambda, \lambda] \text{ の定義函数})$$

$$\hat{S}_\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} S_\lambda(t) dt$$

この Sampling function は様々な、数学的に興味ある性質をもっている。例えば

$$S_\lambda * S_\lambda(t) = \int S_\lambda(t-s)S_\lambda(s)ds = S_\lambda(t) = S_\lambda(-t) = S_\lambda^*(t),$$

$$\varphi_n(t) \triangleq (2\lambda)^{-1}S_\lambda(t - n(2\lambda)^{-1})$$

$\{\varphi_n\} = \{\varphi_n(\cdot); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は Sampling 函数系という。Hilbert 空間 $BL_\lambda (= \{f \in L^2(-\infty, \infty); \hat{f}(\omega) = 0 (|\omega| > \lambda)\})$ に於いて、 $\{\varphi_n\}$ は CONS (完全正規直交系) となる。この CONS $\{\varphi_n\}$ を用いて Fourier 展開すると、Shannon の Sampling 展開定理が得られる。

§5. Sampling Functions より Conditional Expectation へ

$\forall \lambda > 0$ に対して、Hilbert 空間 $L^2(R)$ との射影作用素 P_λ が対応する:

$$P_\lambda f = S_\lambda * f \quad (\lambda > 0).$$

これを用い、 $\forall A \in \mathfrak{A}(L^2)$ (L^2 上の bounded operators の全体) に対し

$$A^{P_\lambda} \triangleq E[A/P_\lambda] \triangleq P_\lambda A P_\lambda + (1 - P_\lambda)A(1 - P_\lambda)$$

$$\mathfrak{A}_\lambda \triangleq \{A^{P_\lambda}; A \in \mathfrak{A}\}$$

とおくと、operation $A \rightarrow A^{P_\lambda}$, i.e.

$$A \in \mathfrak{A}(L^2) \rightarrow A^{P_\lambda} \in \mathfrak{A}_\lambda$$

が得られるが、これに関して次の関係式が成立する:

$$\begin{aligned} (A^{P_\lambda} B)^{P_\lambda} &= P_\lambda (A^{P_\lambda} B) P_\lambda + (1 - P_\lambda) (A^{P_\lambda} B) (1 - P_\lambda) \\ &= P_\lambda (P_\lambda A P_\lambda B) P_\lambda + P_\lambda (1 - P_\lambda) A (1 - P_\lambda) B P_\lambda \\ &\quad + (1 - P_\lambda) (P_\lambda A P_\lambda + (1 - P_\lambda) A (1 - P_\lambda)) B (1 - P_\lambda) \\ &= P_\lambda A P_\lambda B P_\lambda + 0 + 0 + (1 - P_\lambda) A (1 - P_\lambda) B (1 - P_\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{P_\lambda} B^{P_\lambda} &= (P_\lambda A P_\lambda + (1 - P_\lambda) A (1 - P_\lambda)) (P_\lambda B P_\lambda + (1 - P_\lambda) B (1 - P_\lambda)) \\ &= P_\lambda A P_\lambda B P_\lambda + (1 - P_\lambda) A (1 - P_\lambda) B (1 - P_\lambda) \end{aligned}$$

$$\therefore (A^{P_\lambda} B)^{P_\lambda} = A^{P_\lambda} B^{P_\lambda} = (AB)^{P_\lambda}$$

$$(A^*)^{P_\lambda} = (A^{P_\lambda})^*, \quad (\alpha A + \beta B)^{P_\lambda} = \alpha A^{P_\lambda} + \beta B^{P_\lambda}$$

が成立する。実は、これは von Neumann Algebras に於ける conditional expectation の典型的な model である, i.e.,

$$A^{P_\lambda} = E[A/P_\lambda] = E[A/\mathfrak{A}_\lambda]$$

である。

付記

von Neumann algebras 上の Conditional Expectations の一般的構成は論文 [11] の I で導入したが, 2 つの New-Concept を発展して [11] の II, III, IV などと共に, 非可換確率や, von Neumann 観測理論・情報理論などを目標とした展開がなされている. Reference に列記した論文は何れもそれに関わるものである.

これにより, 作用素系 $\{A^{\lambda}; \lambda \in R, \lambda > 0\}$ の martingale の論述に関与していくテーマが予想される.

References

- [1] S. D. Chatterji, *Martingale convergence and the Radon-Nikodym Theorem in Banach Spaces*, Math. Scand. **23** (1968), 21-41.
- [2] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, New York, 1954.
- [3] Mieko Hirahara, *On the generalized Radon-Nikodym Theorem and Riesz's Representation Theorems*, Thesis (1972), 230p.
- [4] M. Hirahara and H. Umegaki, *Conditional expectation and channel operators*, 京都大学数理解析研究所講求録 **290** (1977), 42-56.
- [5] S-T C. Moy, *Characterization of conditional expectation as a transformation function spaces*, Pacific J. Math. **4** (1954), 47-65.
- [6] M. Nakamura and T. Turumaru, *Expectations in an operator algebra*, Tohoku Math. J. **6** (1954), 182-188.
- [7] M. Nakamura and H. Umegaki, *On von Neumann theory of measurements in quantum statistics*, Math. Japan. **7** (1962), 151-157.
- [8] R. Schatten, *A Theory of Cross Spaces*, Math. Studies **26** (1956).
- [9] I. E. Segal, *Non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. **57** (1953), 401-457.
- [10] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948).
- [11] H. Umegaki, *Conditional expectation in an operator algebra*, TMJ. **6** (1954), 177-181; II, *ibid* **8** (1956), 86-100; III *Kōdai Math. Sem. Rep.* **11** (1959); IV *ibid* **14** (1962), 59-85.
- [12] H. Umegaki and A. T. Barucha-Reid, *Banach space-valued random variables and tensor product of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **31** (1970), 49-67.
- [13] 梅垣壽春, 情報数理の基礎, サイエンス社, 1995年.
- [14] 梅垣壽春, Sampling functions の Fourier Spectral 解析, 京都大学数理解析研究所, 1999年6月.