数理解析研究所講究録
1186巻 2001年 15-27

可測ノルムについての一考察

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科　原井　敬子 (Keiko Harai)
同理学部　前田　ミチヱ (Michie Maeda)

1 導入

無限次元空間上の測度論は1950年代のProkhorov、Sazonov、Minlos等の仕事([14,15,12])により独立した研究分野として確立された。この分野のことを簡単に言えば、「有限次元空間で有効なLebesgue測度は、無限次元空間上では存在しない。無限次元空間上にLebesgue測度にできるだけ近い性質をもった測度をつくることが究極の目的である。」ということになるだろう。しかし、無限次元という性質上、有限測度が主な研究対象となる。(もちろん、無限測度に関する研究もあるが([18])。) そこで、中心的な役割を果たす、目標とする測度は、Lebesgue測度そのものではなく、Gauss確率測度になる。Gauss測度は、有限次元空間での定義をそのまま無限次元Hilbert空間上においても拡張して定義できるが、実は、これはシリンダー測度であって、σ-加法性を満たす通常の測度になっていない。従って、このGaussシリンダー測度がどのような条件のもとで測度に拡張可能になるかが、重要な問題となる。1962年、Gross([5])が可測ノルムという概念を導入した。これはGaussシリンダー測度を測度に拡張するための条件である。1971年、Dudley-Feldman-LeCamら([3])が更に広い範囲でのシリンダー測度について測度化可能となる必要十分条件として可測ノルムを定義した。この2つの概念は極めて近いが微妙に異なる。このことについて、Badrikian-Chevet([1])がすべてのシリンダー測度について同値ではないかというConjectureを提示した。これは1984年、著者の一人であるMaeda[8]により、否定的に解決されている。一方、この2つの概念が一致するようなシリンダー測度はどのようなものになるかが問題としてでてくる。これについても、Maedaにより、一般化された回転不変なシリンダー測度までの範囲は明らかになっている。(最大の場合はまだ、未解決であるが。) この2つの可測ノルムの周辺は複数の条件があり、それらについての問題が議論されている。比較的、最近のものでは、Yan、Gong([17,4])による条件がある。この論文の中では、6つの条件について調べる。1998年、Maeda-Hagiharaにより、Gaussシリンダー測度に関しては2つの意味で可測であるが、あるシリンダー測度についてはD.F.Lの意味で可測でGrossの意味では可測にならないような例が示された。更に、1999年、Maeda-Shibuya-Bandouによって、1984年の例と上記の6つの条件との関係、更に、回転不変、回転準不変の場合での関係についての結果を得た。この論文においては、1984年に作られたノ

ルムとシリンダー測度、1998年に作られたノルムとシリンダー測度、更に新しいノルムとシリンダー測度を作ってGaussシリンダー測度との関係をからめながら、6つの条件との関係を調べていく。結果としては、Gaussシリンダー測度に関しても、1984年の例のノルムは可測にならないこと、また、1998年の例のシリンダー測度と6つの条件の関係等に新しい結果を得たので、これらを報告する。

2 準備

この論文では、XをBanach空間、X'をXの位相的双対空間とし、$(\cdot,\cdot)$をX'とXのnatural pairingとする。また、$\mathcal{B}(X)$をX上のBorel σ-algebraとする。 Hを実可分Hilbert空間、$<\cdot,\cdot>$をH上の内積、$FD(H)$をHの有限次元部分空間全体、$\mathcal{F}$をH上の有限次元部分空間への直交射影の全体とする。また、Iで恒等写像を表すことにする。

Zが、$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n \in X', D \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$に対して、次のように表されるとき、シリンダー集合という。

$$Z = \{x \in X; ((\xi_1,x),(\xi_2,x),\ldots,(\xi_n,x)) \in D\}$$

$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$を固定したときのシリンダー集合全体、$\mathcal{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$は$\sigma$-algebraになるが、シリンダー集合全体、$\mathcal{R}$は$\sigma$-algebraになるとは限らない。

また、Hilbert空間上のシリンダー集合は、直交射影を使って次のように表すことができる。

$$Z = \{x \in H; Px \in F\} \qquad (P \in \mathcal{F},\ F \in \mathcal{B}(PH))$$

次にシリンダー測度を定義する。

定義 2.1 (シリンダー測度) $\mathcal{R}$上に定義された関数 μが次の条件を満たすとき、シリンダー測度であるという。

(i) $\mu\ :\ \mathcal{R} \longrightarrow [0,1]$
(ii) μの$\mathcal{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$への制限は確率測度

次にHilbert空間上で重要な役割を果たすGaussシリンダー測度を定義する。

定義 2.2 (Gaussシリンダー測度) 集合関数$\gamma : \mathcal{R} \to [0,1]$が次のような形で表されるとき、Gaussシリンダー測度であるという。

$$\gamma(Z) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,dx$$

ただし、$Z = \{x \in H; Px \in F\}$、$n = \dim PH$、$dx$ は PH 上の Lebesgue 測度とする。

注意 1 H が無限次元空間のとき、γ は有限加法的測度であるが、σ-加法的測度ではない。一般に Gauss シリンダー測度は、パラメータ t を使って、$\gamma_t(Z) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi t}})^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}} dx$ と表され、$t = 1$ のとき、標準的 Gauss シリンダー測度というが、この論文では、特に断らない限り、単に Gauss シリンダー測度で標準的 Gauss シリンダー測度を表すことにする。

次に、Gauss シリンダー測度を含み、その 1 つの特性である回転不変性をもつシリンダー測度の全体、さらに、これを一般化した回転準不変シリンダー測度等の定義をする。

定義 2.3 (回転不変シリンダー測度) μ を H 上のシリンダー測度とする。U を H 上のユニタリ作用素の全体とする。

$$\mu(C) = \mu(u(C)) \qquad (u \in U,\, C \in \mathcal{R}_H)$$

が常に成り立つとき、μ を回転不変シリンダー測度という。
ただし、$\mathcal{R}_H$ を H 上のシリンダー集合全体とする。

定義 2.4 (回転準不変シリンダー測度) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ で、$\mu(C) < \delta \Rightarrow \mu(u(C)) < \varepsilon$ $(u \in U, C \in \mathcal{R}_H)$ を満たすようなものが存在するとき、H 上のシリンダー測度 μ は回転準不変シリンダー測度であるという。

次に、この論文の主題である可測ノルムの定義をする。

定義 2.5 (Gross の可測ノルム) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して、$P \perp P_0$ となるどんな $P \in \mathcal{F}$ に対しても、

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき、$\|\cdot\|$ は μ-可測 (Gross) であるという。

上の定義は次のように書きかえることができる。

$\|\cdot\|$ は μ-可測 (Gross)

$\Longleftrightarrow$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $G \in FD(H)$ が存在して、$F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても、

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし、$N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| < \varepsilon\}$, $F^\perp$ は F の直交補空間とする。

無限次元 Hilbert 空間上では、Gauss シリンダー測度 γ は可算加法的測度ではない。そこで、初めの位相よりも弱い位相を導入する新しいノルムを考え、これに関する完備化空間の中ではじめの空間上のシリンダー測度を埋め込み写像による像測度として考える。これが可算加法的となるための十分条件を求めたのが、L.Gross である。

定義 2.6 (Abstract Wiener Space) γ を H 上の Gauss シリンダー測度、$\|\cdot\|$ を H 上の γ-可測 (Gross) なノルム、B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化、i を H から B への埋め込み写像とするとき、(i, H, B) を Abstract Wiener Space という。

Gross が可測ノルムを定義した後、Dudley-Feldman-LeCam が別の可測ノルムを定義した。この可測ノルムはシリンダー測度を可算加法的測度に拡張するための必要十分条件となるものである。

定義 2.7 (D.F.L の可測ノルム) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $G \in FD(H)$ が存在して、$F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても、

$$\mu(\{x \in H; \|x - F^\perp\| < \varepsilon\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき、$\|\cdot\|$ は μ-可測 (D.F.L) であるという。

上の定義も次のように書きかえることができる。

$\|\cdot\|$ は μ-可測 (D.F.L)

$\iff$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $G \in FD(H)$ が存在して、$F \perp G$ となるどんな $F \in FD(H)$ に対しても、

$$\mu(\{P_F(N_\varepsilon) + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし、P_F は H から F への直交射影とする。

したがって、2つの可測ノルムの条件を比較すると、D.F.L の可測ノルムの条件よりも Gross の可測ノルムの条件の方が強い条件であることが分かる。

3　可測ノルムを取り囲む条件とその関係

ここでは、Gross の可測ノルムの条件、D.F.L の可測ノルムの条件を取り囲む条件とその関係を紹介する。

定理 3.1 H を実可分ヒルベルト空間、μ を H 上のシリンダー測度、$\|\cdot\|$ を H 上で定義されたノルム、B を $\|\cdot\|$ に関する H の完備化とする。このとき、次の (i)〜(vi) に対して、(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) が成り立つ。
(i) I に強収束する $\mathcal{F}$ の任意の列 P_n が、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たす。

(ii) $\|\cdot\|$ は μ-可測 (Gross) である。

(iii) I に強収束する増加列 $P_n \in \mathcal{F}$ で、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) = 0$$

を満たすものが存在する。

(iv) I に強収束する増加列 $P_n \in \mathcal{F}$ で、

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in H; \sup_{1\le k\le n} \|P_k x\| > N\}) = 0$$

を満たすものが存在する。

(v) $\|\cdot\|$ は μ-可測 (D.F.L) である。

(vi) $i(\mu)$ は測度に拡張できる。
ただし、i は H から B への埋め込み写像で、$i(\mu) = \mu \circ i^{-1}$ とする。

証明　はじめに、(iii) $\Rightarrow$ (iv) を示す。
(iii) より、I に強収束する $\mathcal{F}$ の単調増加列 $\{P_n\}$ で任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある n_0 が存在して、$n, m \ge n_0$ ならば、

$$\mu(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

となるものが存在する。三角不等式より $k \ge n_0$ なる任意の k に対して、

$$\|P_k x\| \le \|P_{n_0} x\| + \|P_k x - P_{n_0} x\|$$

が成り立つので、$n > n_0$ のときには、次が成り立つ。

$$\sup_{n_0\le k\le n} \|P_k x\| \le \|P_{n_0} x\| + \sup_{n_0\le k\le n} \|P_k x - P_{n_0} x\|$$

ここで、N を任意の自然数とする。このとき、$\sup_{n_0\le k\le n}\|P_kx\| > N$ ならば、

$\|P_{n_0}x\| > \dfrac{N}{2}$ または、$\sup_{n_0\le k\le n}\|P_kx - P_{n_0}x\| > \dfrac{N}{2}$ となる。

これより、次の包含関係が成り立つ。

$$\{\sup_{1\le k\le n}\|P_kx\| > N\} \subset \{\sup_{1\le k\le n_0}\|P_kx\| > N\} \cup \{\sup_{n_0<k\le n}\|P_kx\| > N\}$$

$$\subset \{\sup_{1\le k\le n_0}\|P_kx\| > N\} \cup \{\|P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\} \cup \{\sup_{n_0<k\le n}\|P_kx - P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\}$$

簡単のために、$\{\sup_{1\le k\le n}\|P_kx\| > N\}$ で、$\{x \in H \ \sup_{1\le k\le n}\|P_kx\| > N\}$ を表すことにする。

測度をとると、

$$\begin{aligned}\mu(\{\sup_{1\le k\le n}\|P_kx\| > N\}) &\le \mu(\{\sup_{1\le k\le n_0}\|P_kx\| > N\}) + \mu(\{\|P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\}) \\ &\qquad + \mu(\{\sup_{n_0<k\le n}\|P_kx - P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\}) \\ &\le \mu(\{\sup_{1\le k\le n_0}\|P_kx\| > \frac{N}{2}\}) + \mu(\{\|P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\}) \\ &\qquad + \mu(\{\sup_{n_0<k\le n}\|P_kx - P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\})\end{aligned}$$

という式が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned}\mu(\{\sup_{1\le k\le n_0}\|P_kx\| > \frac{N}{2}\}) &\le \sum_{k=1}^{n_0}\mu(\{\|P_kx\| > \frac{N}{2}\}) \\ &= \sum_{k=1}^{n_0}(\mu\circ {P_k}^{-1})(|t_k| > \frac{N}{2})\end{aligned}$$

となる。

ただし、$t_k \in \mathbf{R}^{\ell_k}, \ell_k = \dim P_k(H)$ とする。

$(\mu\circ {P_k}^{-1})$ は有限次元空間上の測度であるから、各 k に対して、

$(\mu\circ {P_k}^{-1})(|t_k| > M_k) < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$ となる M_k が存在する。

$\dfrac{M}{2} \ge \max\{M_1, M_2, \ldots, M_{n_0}\}$ とおけば、$N > M$ に対して、

$$\mu(\{\sup_{1\le k\le n_0}\|P_kx\| > \frac{N}{2}\}) < \varepsilon,\quad \mu(\{\|P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\}) < \varepsilon$$

が成り立つ。

また、$\dfrac{N}{2} > \varepsilon$ となるように N をとれるので、(iii) より、

$$\mu(\{\sup_{n_0<k\le n}\|P_kx - P_{n_0}x\| > \frac{N}{2}\}) < \mu(\{\sup_{n_0<k\le n}\|P_kx - P_{n_0}x\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

となる。よって、これらを式に代入すれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある自然数 M と n_0 が存在して、$N > M\,, n > n_0$ ならば、

$$\mu(\{\sup_{1\le k\le n}\|P_kx\| > N\}) < 3\varepsilon$$

が成り立つ。

(i) $\Rightarrow$ (ii) は Baxendale [2] を参照
(ii) $\Rightarrow$ (iii) は Baxendale [2] を参照
(iv) $\Rightarrow$ (vi) は Gong [4] を参照
(v) $\Leftrightarrow$ (vi) は Dudley-Feldman-LeCam [3] を参照 □

定理 3.2 μ を H 上の回転準不変シリンダー測度とする。このとき、定理 3.1 の (i) ～ (vi) はすべて同値である。

系 1 γ を H 上の Gauss シリンダー測度とすると、定理 3.1 の (i) ～ (vi) はすべて同値である。

系 2 μ を H 上の回転不変シリンダー測度とすると、定理 3.1 の (i) ～ (vi) はすべて同値である。

4 ℓ^2 空間上のいくつかの例

ここでは、Hilbert 空間を具体的な ℓ^2 空間とし、具体的にシリンダー測度とノルムを構成して、定理 3.1 の条件との関係を調べる。

$(\ell^2)^*$ を弱位相 $\sigma((\ell^2)^*, \ell^2)$ をもった ℓ^2 の代数的双対空間とし、$\mathcal{I}$ を $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ を含む ℓ^2 の代数的基とする。ただし、$e_n = (0,0,\dots,0,\underset{\mathbf{n}\,番目}{1},0,\dots)$ とする。$(\cdot,\cdot)$ を $(\ell^2)^*$ と ℓ^2 の natural pairing とする。

測度の構成

$(\ell^2)^*$ 上に次のような a, b をとり、これに対し、Dirac 測度 δ_a , δ_b を考える。それから導入される ℓ^2 上のシリンダー測度を μ_a , μ_b とする。

$$
\begin{array}{ll}
a \in (\ell^2)^* \text{ s.t } (a, e_n) = 1,\ \ n = 1,2,\dots & (a, e_\alpha) = 0,\ \ e_\alpha \in \mathcal{I}\backslash\{e_n\}_{n=1,2,\dots} \\
b \in (\ell^2)^* \text{ s.t } (a, e_n) = n,\ \ n = 1,2,\dots & (a, e_\alpha) = 0,\ \ e_\alpha \in \mathcal{I}\backslash\{e_n\}_{n=1,2,\dots}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_a(\{x \in \ell^2; (<\xi_1, x>, <\xi_2, x>, \dots, <\xi_n, x>) \in D\}) \\
&\qquad = \delta_a(\{x \in (\ell^2)^*; ((\xi_1, x), (\xi_2, x), \dots, (\xi_n, x)) \in D\})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu_b(\{x \in \ell^2; (<\xi_1, x>, <\xi_2, x>, \dots, <\xi_n, x>) \in D\}) \\
&\qquad = \delta_b(\{x \in (\ell^2)^*; ((\xi_1, x), (\xi_2, x), \dots, (\xi_n, x)) \in D\})
\end{aligned}
$$

ただし、$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \ell^2$, $D \in \mathcal{B}(\mathbf{R^n})$ とする。

ノルムの構成

まず、open,convex,absorbing,circled な集合、U_1, U_2, U_3 を次のように定義する。非負実数列 $\{\beta_n\}$,$\{\lambda_n\}$ を次のように定める。$\{\beta_n\}$ は正の実数列で単調増加で、$\beta_n \to$

∞ $(n \to \infty)$ とし、$\{\lambda_n\}$ は $\lambda_{2m} = 0$、$\lambda_{2m-1} > 0$ で、$\{\lambda_{2m-1}\}$ は単調増加列で、$\lambda_{2m-1} \to \infty$ $(m \to \infty)$ とする。

Γ_1 を $\{\pm\beta_n(e_1 + e_2 + \ldots + e_n); n = 1, 2, \ldots\}$ の convex hull、
Γ_2 を $\{\pm\lambda_n(e_1 + e_2 + \ldots + e_n); n = 1, 2, \ldots\}$ の convex hull、
Γ_3 を $\{\pm\lambda_n(e_1 + 2e_2 + \ldots + ne_n); n = 1, 2, \ldots\}$ の convex hull

とし、B_1 を ℓ^2 上の開単位球、B_2 を開集合 $\{x = (x_n) \in \ell^2; \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x_n}{n})^2} < 1\}$ とし、
$U_1 = \Gamma_1 + B_1$, $U_2 = \Gamma_2 + B_1$, $U_3 = \Gamma_3 + B_2$ とする。
このとき、U_1, U_2, U_3, B_2 の gauge として、$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_4$ を定義する。

μ_a と $\|\cdot\|_2$ は、1984 年、D.F.L の意味で可測になるが Gross の意味では可測にならない例として作られ、1999 年、この測度とノルムは定理 3.1 の条件の (iii) から (vi) は満たすが (i)、(ii) は満たさないことが示された。μ_b と $\|\cdot\|_3$ は、1998 年、γ に関しては両方の意味で可測になるが、μ_b については D.F.L の意味で可測になり、Gross の意味で可測にはならない例として作られた。1984 年の例と γ との関係、1998 年の例と定理 3.1 の条件との関係の結果を紹介する。

定理 4.1 $\|\cdot\|_2$ は γ-可測ではない。

証明 ℓ^2 上の正規直交基底を次のように定義する。

$$f_1 = e_1,$$

$$f_2 = \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}},\ f_3 = \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}},$$

$$f_4 = \frac{e_4 + e_5}{\sqrt{2}},\ f_5 = \frac{e_4 - e_5}{\sqrt{2}},\ f_6 = \frac{e_6 - e_7}{\sqrt{2}},$$

$$f_7 = \frac{e_6 + e_7}{\sqrt{2}},\ f_8 = \frac{e_8 - e_9}{\sqrt{2}},\ f_9 = \frac{e_{10} - e_{11}}{\sqrt{2}},\ f_{10} = \frac{e_{12} - e_{13}}{\sqrt{2}},\ \ldots$$

$$\vdots$$

$$f_{\frac{1}{2}n(n+1)+1} = \frac{e_{2n} + e_{2n+1}}{\sqrt{2}},$$

$$f_{\frac{1}{2}n(n+1)+2} = \frac{e_{n(n-1)+2} - e_{n(n-1)+3}}{\sqrt{2}},\ \ldots\ \ldots\ f_{\frac{1}{2}n(n+1)+n} = \frac{e_{n(n+1)} - e_{n(n+1)+1}}{\sqrt{2}},$$

$$\vdots$$

P_m を $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の張る ℓ^2 の有限次元空間部分空間への直交射影とすると、明らかに、P_m は I に強収束する。
任意の N, k に対して、
$f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_{j+k}$ がすべて $\dfrac{e_i - e_{i+1}}{\sqrt{2}}$ の形のものになるような $j > N$ がとれる。

このとき、$f_{j+1}, f_{j+2}, \ldots, f_{j+k}$ の張る空間を F とすると、$F \cap \Gamma_2=\{0\}$ となるので、$\|P_{j+k}x - P_j x\|_2 = |P_{j+k}x - P_j x|$ が成り立つ。

$\{x \in \ell^2; |P_{j+k}x - P_j x| > \varepsilon_0\}$

$=\{x \in \ell^2; \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |< f_{j+i}, x >|^2} > \varepsilon_0\}$

$=\{x \in \ell^2; \sqrt{{x_{j+1}}^2 + {x_{j+2}}^2 + \ldots + {x_{j+k}}^2} > \varepsilon_0\}$

$=\ell^2 \setminus \{x \in \ell^2; \sqrt{{x_{j+1}}^2 + {x_{j+2}}^2 + \ldots + {x_{j+k}}^2} \leq \varepsilon_0\}$

$\supset \ell^2 \setminus \{x \in \ell^2; |x_{j+1}| \leq \varepsilon_0$かつ $|x_{j+2}| \leq \varepsilon_0$かつ$\ldots |x_{j+k}| \leq \varepsilon_0\}$

$\left(\int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^k < \varepsilon_0$ となるように k をとると、

$\gamma(\{x \in \ell^2; |P_{j+k} - P_j x| > \varepsilon_0\}) \geq 1 - \varepsilon_0$

このことから、ある $\varepsilon_0 > 0$、任意の N に対して、$n > m > N$ で、

$\gamma(\{x \in \ell^2; \|P_n x - P_m x\|_2 > \varepsilon_0\} \geq 1 - \varepsilon_0$ を満たすものが存在する。

従って、γ について定理の 3.1 の (i) の条件が成り立たないことが示された。そこで、系 1 により、$\|\cdot\|_2$ は γ-可測でないといえる。 □

定理 4.2 $\|\cdot\|_3$ は μ_b について (iii) を満たす。

証明 P_n を $e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1}$ の張る ℓ^2 の有限次元部分空間への直交射影とする。明らかに、P_n は I に強収束する。

$n > m$ とすると、$(P_n - P_m)$ は $e_{2m+2}, e_{2m+3}, \ldots, e_{2n+1}$ の有限次元部分空間への直交射影となる。

$k = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\lambda_{2m+1}} + \dfrac{1}{\lambda_{2n+1}}}$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
&k\{(2m+2)e_{2m+2} + \ldots + (2n+1)e_{2n+1}\} \\
=&k\{e_1 + 2e_2 + \ldots + (2n+1)e_{2n+1}\} - k\{e_1 + 2e_2 + \ldots + (2m+1)e_{2m+1}\} \\
=&\frac{k}{\lambda_{2n+1}}[\lambda_{2n+1}\{e_1 + 2e_2 + \ldots + (2n+1)e_{2n+1}\}] \\
&\qquad + \frac{k}{\lambda_{2m+1}}[-\lambda_{2m+1}\{e_1 + 2e_2 + \ldots + (2m+1)e_{2m+1}\}]
\end{aligned}
$$

$\dfrac{k}{\lambda_{2n+1}} + \dfrac{k}{\lambda_{2m+1}} = 1$ なので、

$k\{(2m+2)e_{2m+2} + \ldots + (2n+1)e_{2n+1}\} \in \Gamma_3 \subset U_3$

よって、

$\|(2m+2)e_{2m+2} + \ldots + (2n+1)e_{2n+1}\|_3 < \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{\lambda_{2m+1}} + \dfrac{1}{\lambda_{2n+1}}$

$\lambda_{2n+1} \to \infty\,(n \to \infty)$ なので、

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次のような条件を満たす N が存在する。

$$n, m > N \text{ のとき、}$$

$$\|(2m+2)e_{2m+2} + \ldots + (2n+1)e_{2n+1}\|_3 < \varepsilon$$

μ_b は $e_{2m+2}, \ldots, e_{2n+1}$ の張る空間での Dirac 測度 $\delta_{(2m+2)e_{2m+2}+\ldots+(2n+1)e_{2n+1}}$ なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$\lim_{n,m\to\infty} \mu_b(\{x \in \ell^2; \|P_n x - P_m x\|_3 \leq \varepsilon\}) = 1$ □

したがって、$\|\cdot\|_3$ は μ_b について、(i)、(ii) は満たさないが、(iii) ～ (vi) は満たすことが分かった。

$\|\cdot\|_2$ を少し変形した $\|\cdot\|_1$ について、得られた結果を紹介する。

定理 4.3 $\|\cdot\|_1$ は μ_a について iii) を満たす。

証明 P_n を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ の張る ℓ^2 の部分空間への直交射影とする。明らかに、P_n は I に強収束する。また、$n > m$ のとき、$(P_n - P_m)$ は $e_{m+1}, \ldots, e_n$ の張る ℓ^2 の部分空間への直交射影となる。

$k = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\lambda_m} + \dfrac{1}{\lambda_n}}$ とおく。

以下は、定理 4.2 の証明と同様に示せる。 □

$\|\cdot\|_3$、$\|\cdot\|_4$ と μ_a について、定理 3.1 の条件との関係を考える。

定理 4.4 $\|\cdot\|_3$、$\|\cdot\|_4$ は μ_a について (iii) を満たす。

証明 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次の条件を満たす N が存在する。

$$n, m > N \text{ のとき、}$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^2 \leq \varepsilon^2$$

P_n を $e_1, e_2, \ldots, e_n$ の張る ℓ^2 の部分空間への直交射影とすると、P_n は I に強収束する。$n > m$ とすれば、$(P_n - P_m)$ は $e_{m+1}, \ldots, e_n$ の張る ℓ^2 の部分空間への直交射影となる。

μ_a は $e_{m+1}, \ldots, e_n$ の張る空間では Dirac 測度、$\delta_{e_{m+1}+\ldots+e_n}$ である。

ここで、$n > m > N$ とすると、

$\|e_{m+1} + \ldots + e_n\|_4 = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^2} \leq \varepsilon$ なので、

$\mu_a(\{x \in H; \|P_n x - P_m x\|_4 \leq \varepsilon\})$

$= \mu_a(\{y \in (P_n - P_m)\ell^2; \|y\|_4 \leq \varepsilon\})$

$= \delta_{e_{m+1}+\ldots+e_n}(\{y \in (P_n - P_m)\ell^2; \|y\|_4 \leq \varepsilon\})$

$= 1$ □

次に、上で定義したシリンダー測度と４つのノルムについて、定理 3.1(i) から (vi) の条件との関係を表で表す。○印のところは、そのノルム、測度について、条件を満たすところ、×印のところは満たさないところで、空欄のところは現時点では分かっていない。

ノルム	測 度	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
$\\|\cdot\\|_1$	γ						
	μ_a			○	○	○	○
$\\|\cdot\\|_2$	γ	×	×	×	×	×	×
	μ_a	×	×	○	○	○	○
$\\|\cdot\\|_3$	γ	○	○	○	○	○	○
	μ_a			○	○	○	○
	μ_b	×	×	○	○	○	○
$\\|\cdot\\|_4$	γ	○	○	○	○	○	○
	μ_a			○	○	○	○

$\|\cdot\|_4$ は、γ-可測である代表的なノルムであるが、$U_3 = \Gamma_3 + B_2 \supset B_2$ なので、$\|\cdot\|_4$ と μ_a, γ の関係と $\|\cdot\|_3$ と μ_a, γ の関係が同じ結果になっている。

$\|\cdot\|_1$ が γ-可測になるのか、ならないのか、また、$\|\cdot\|_3, \|\cdot\|_4$ が Gross の意味で μ_a-可測になるのか、ならないのか等を考えて、空欄を埋めることが、今後の課題である。

ここで、次のような conjecture を紹介する。

conjecture（Kuo）
$\|\cdot\|$ が γ-可測ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < \infty$ となる $\{e_n\}$ が存在するのか？

これについては、$\|\cdot\|_1$ は $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_1{}^2 < \infty$ となるように $\{\beta_n\}$ がとれるので、$\|\cdot\|_1$ が γ-可測でないとすると、conjecture の直接的な答えではないが、γ-可測と $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|^2 < \infty$ という条件が無関係であるといえる。

また、シリンダー測度 μ で、μ-可測（D.F.L）なノルムをもたないものが存在することは既に知られている。もし、$\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_4$ が μ_a-可測（Gross）でないとすると、μ-可測（Gross）なノルムをもたないようなシリンダー測度 μ が存在する可能性もある。

参考文献

[1] Badrikian and Chevet, S., *Measure clindriques,espaces de Wiener et fonctions aleatoires gaussiennes*, Lecture Notes in Mathmatics No.379, Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[2] Baxendale, P., *Gaussian Measure on Function Spaces*, Amer. J. Math. **98** (1976), 891-952.

[3] Dudley, R. M., Feldman, J. and LeCam, L., *On semi-norms and probabilities,and abstract Wiener Spaces*, Ann. Math. **93** (1971), 372-408.

[4] Gong, F., *A note on generalized Gross and Minlos Theorems*, Dirichet forms and stchastic process (Beijing, 1993), 171-173, de Gruyter, Berlin, 1995.

[5] Gross, L., *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. **164** (1972), 411-426.

[6] Hagihara, R., *Cylinder set measures and measurable norms on Banach space*, 修士論文.

[7] Kuo, H. H., *Gaussian Measure in Banach Space*, Lect. Notes in Math. **463**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975).

[8] Maeda, M., *Some Examples of Measurable Norms*, J. Math. Anal. Appl. **98** (1984), 158-165.

[9] Maeda, M., *Rotationary Invaiant Cylindrical Measure 1*, Kodai. Math. J. **6** (1) (1983), 14-25.

[10] Maeda, M., *Measurable norms and rotationally quasi-invariant cylindrical measures*, Hokkaido Math. J. Vol.XII, No.1 (1983), 92-104.

[11] Maeda-Shibuya-Bandou., 無限次元空間上の可測ノルムの役割について, 数理解析研究所　講究録 **1100**, 27-43.

[12] Minlos, R. A., *Generalized random processes and their extension in measure*, Selected translations in mathmatical statistics and probability, 3, Amer. Math. Soc. Providence.

[13] Linde, W., *Probability in Banach Space-Stable and Infinitely Divisible Distributions*, A Wiley-Interscience Publication.

[14] Prokhorov, Yu. V., *Convergence for random processes and limit theorems in probability theory*, Teor. Veroj. i Prim. **1** (1956), 177-238.

[15] Sazonov, V. V., *Remarks on characteristic functionals*, Theorey of probability and its applications **3** (1958), 201-205.

[16] Schwartz, L., *Radon Measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Tata Institute of Fundamental Reserch Publication, Bombay, 1973.

[17] Yan, J. A., *Generalization of Gross'and Minlos' Theorems*, Lect. Notes in Math. **1372**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, (1989), 395-404.

[18] 山崎　泰郎, 無限次元空間上の測度, 紀伊国屋書店 (1978)