数理解析研究所講究録
1186 巻 2001 年 106-118

時間に依存するファジィ集合族を用いた最適制御に関する一考察

信州大学工学部　遠藤　登 (Noboru Endo)
信州大学工学部　河邊　淳 (Jun Kawabe)
信州大学工学部　和崎克己 (Katsumi Wasaki)
信州大学工学部　師玉康成 (Yasunari Shidama)

1　まえがき

1965 年に Zadeh の提唱したファジィネスの概念 [1] は現在広く応用され，自動制御分野においてもファジィ制御として定着している．ファジィ制御は系の正確な数学的モデルを知らなくても，ある程度の性能を持った制御器を構成できることからその有用性が広く認められている．しかしながら，制御器の構成法については種々の方法が提案されてはいるものの，理論的考察はまだ十分に行われてはいない [2].

筆者らは個々の問題に対する制御器の構成法から離れて，ファジィ集合族のコンパクト性から導かれるファジィ最適制御の最適解の存在性などの研究を続けている．結果，ファジィ集合族を有界変動関数の空間の部分集合に取ることで，そのコンパクト性から最適解の存在が得られることを報告している [3]．しかしながら，通常の制御問題では，系の特性が時間的に変化していくことから，メンバシップ関数の集合も時間とともに変化すると考えられる．このような系に対しては，時間に対して固定されたメンバシップ関数を持つ，これまでの結果では十分に対応できない．ファジィ制御規則を学習によって自動生成する適応ファジィ制御 [4] や再帰型ファジィ制御なども開発されているが，その理論的考察はまだ十分に行われていない [5].

本論文では，何らかの if-then 型ファジィ推論により得られたメンバシップ関数を時間に依存する関数と見なし，そのコンパクト性や重心計算で与えられる非ファジィ化の連続性を議論している．これらの結果を利用して，オープンループ制御系に限定した最適解の存在性の考察を行う．

本論文の結果は，筆者らの従来の結果と比較して，メンバシップ関数が時間に依存するため，制御系の特性が時間的に変化する場合にも最適解の存在性を保証している．すなわち，時間的に特性が変化する制御問題の適応ファジィ制御や再帰型ファジィ制御などへの理論的分析になっているとともに，最適なメンバシップ関数の学習アルゴリズムの存在を示している．さらに，通常ファジィ制御では，if-then 型の制御規則を用い，制御入力を決定するが，

本論文の結果はこのような制御規則の前件部には全く依存しない．このことは本論文の結果を広い範囲の制御に適用できることを示している．

2 問題の記述

議論の見通しをよくするため次のような線形系の最適制御問題を考える．

系の方程式が

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + f(t);\ x(0) = x_0 \tag{1}$$

で与えられ，評価関数は次の 2 次形式

$$J(u) = \int_0^T \{l(x(t)) + |u(t)|^2\}dt \tag{2}$$

で与えられるものとする．ここで $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ $(t \in [0,T])$ であり，A は n 次正方定行列，b は n 項定列ベクトルとする．また $f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ は連続関数，$l : R \to R$ は正値連続関数とする．さらに，$K > 0$ は定数として，$u(t)$ に関しては制約条件

$$|u(t)| \le K \quad a.e.\ t \in [0,T] \tag{3}$$

が設定されているものとする．次節以降，この問題について $u(t)$ が時間 t に依存するファジィ集合の重心計算で与えられる場合を考察する．

3 時間に依存するファジィメンバシップ関数族のコンパクト性

以下では,$a, b \in R$ に対し $L^2[a,b], C[a,b]$ の記号はそれぞれ区間 $[a,b]$ 上で 2 乗 Lebesgue 可積分関数全体, 区間 $[a,b]$ 上で連続な関数全体からなる関数空間を表すとし,R^n のノルムは l^1 ノルム, すなわち

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad (\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n)$$

とする．

前節で与えた問題を考察するため次のような時間 $t \in [0,T]$ に依存する，区間 $[-L,L]$ 上のメンバシップ関数の集合 V を考える：

$$V := \left\{ \mu \in L^2([0,T]\times[-L,L]) \ :\ \begin{array}{c} 0 \le \mu(t,z) \le 1 \text{ a.e. } (t,z), \\ \operatorname{ess\,inf}_{t\in[0,T]} \int_{-L}^{L} \mu(t,z)dz > 0 \end{array} \right\},$$

ただし，$\operatorname{ess\,inf}_{t\in[0,T]}|\mu(t)| := \sup\{m > 0 : |\mu(t)| \ge m \text{ a.e. } t \in [0,T]\}$ とする．

このメンバシップ関数の集合 V の非ファジィ化としては次の重心計算

$$M : \mu \in V \mapsto M(\mu) := \frac{\int_{-L}^{L} z\mu(t,z)dz}{\int_{-L}^{L} \mu(t,z)dz}$$

を用いることにする．この写像 M は $L^2([0,T]\times[-L,L])$ の部分集合 V から $L^2[0,T]$ への写像になっている．実際，

$$
\begin{aligned}
|M(\mu)(t)| &= \left|\frac{\int_{-L}^{L} z\mu(t,z)dz}{\int_{-L}^{L}\mu(t,z)dz}\right| \\
&\leq \frac{\int_{-L}^{L}|z||\mu(t,z)|dz}{\int_{-L}^{L}|\mu(t,z)|dz} \\
&\leq \frac{L\int_{-L}^{L}|\mu(t,z)|dz}{\int_{-L}^{L}|\mu(t,z)|dz} = L \quad (a.e.\ t\in[0,T]) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

であるから $M(\mu)\in L^2[0,T]$ となる．

系 (1),(2) には制御量 $u(t)$ として V から選んだ μ に重心計算 M を施した $M(\mu)(t)$ が用いられるが，これは制約条件 (3) を満たさなければならない．そこで V の部分集合として $|M(\mu)(t)|$ が $[0,T]$ 上ほとんどいたるところで正数 K で抑えられるような次の集合を考えよう．

$$V^K := \{\mu\in V;\ |M(\mu)(t)|\leq K \ \ a.e.t\in[0,T]\}$$

この V^K について次の補題が成り立つ．

補題 3.1. $L^2[0,T]$ の部分集合 U を

$$U := \{u\in L^2[0,T];\ |u(t)|\leq K\ a.e.t\in[0,T]\}$$

により定義すると，$M(V^K)=U$.

Proof. 定義より $M(V^K)\subset U$ は明らかであるから，$U\subset M(V^K)$ のみ証明する．そのため関数 $O(z):R\to R$ を次のように定義する: $0<\delta<L-K$ なる δ を任意に固定し，

$$
O(z) := \begin{cases}
0 & z<-\delta \\
1+\frac{1}{\delta}z & -\delta\leq z\leq 0 \\
1-\frac{1}{\delta}z & 0\leq z\leq\delta \\
0 & z>\delta
\end{cases}
$$

任意に $u\in U$ をとり固定する．このとき

$$\mu(t,z) := O(z-u(t))$$

と置くと，明らかに $\mu\in L^2([0,T]\times[-L,L],R)$. さらに，ほとんどすべての $t\in[0,T]$ に対して，$L-u(t)>L-K>\delta$ かつ $-L-u(t)<-L+K<-\delta$ なので，

$$
\begin{aligned}
\int_{-L}^{L}\mu(t,z)dz &= \int_{-L}^{L} O(z-u(t))dz \\
&= \int_{-L+K}^{L-K} O(z)dz \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} O(z)dz = \delta > 0
\end{aligned}
$$

であるから

$$\operatorname{ess\,inf}_{t\in[0,T]}\int_{-L}^{L}\mu(t,z)dz > 0.$$

よって $\mu \in V$. さらに

$$\int_{-\delta}^{\delta} O(z)dz = \delta, \qquad \int_{-\delta}^{\delta} zO(z)dz = 0$$

であることに注意すると

$$M(\mu)(t) = \frac{\int_{-L}^{L} z\mu(t,z)dz}{\int_{-L}^{L}\mu(t,z)dz} = \frac{\int_{-L-u(t)}^{L-u(t)}(z+u(t))O(z)dz}{\int_{-L-u(t)}^{L-u(t)} O(z)dz} \tag{5}$$

ここで，ほとんどすべての $t \in [0,T]$ に対して，(5) 式より

$$M(\mu)(t) = \frac{\int_{-\delta}^{\delta}(z+u(t))O(z)dz}{\int_{-\delta}^{\delta} O(z)dz} = u(t) \quad \text{a.e. } t \in [0,T]$$

となる．したがって，U の定義より $|M(\mu)(t)| \le K$ となり，$\mu \in V^K$．よって(3) 式により $u = M(\mu) \in M(V^K)$ となり，$U \subset M(V^K)$ が示された． **q.e.d.**

以下，この論文では Hilberth 空間 $L^2[0,T]$ 上には弱位相 $\sigma(L^2, L^2)$ が導入されているとする．

定理 3.1. $M(V^K)$ は $L^2[0,T]$ 上の弱位相に関してコンパクト距離付け可能である．

Proof. 補題 3.1 より $M(V^K) = U$ であり，

$$S := \{u \in L^2[0,T]; \|u\|_{L^2}^2 \le K\sqrt{T}\}$$

とおくと $U \subset S$ であることに注意しておく．Banach-Alaoglu の定理により S は $L^2[0,T]$ 上の弱位相 $\sigma(L^2, L^2)$ に関してコンパクトとなる．また，Hilbert 空間 $L^2[0,T]$ は可分なので，$L^2[0,T]$ 上の弱位相の S 上への相対位相は距離付け可能となる [6]．さらに U は明らかに凸であるから，U が弱位相で閉であることと強位相で閉であることは一致する [6]．よって,$M(V^K) = U$ がコンパクト距離付け可能であることを示すには,$M(V^K)$ が $L^2[0,T]$ 上の強位相について閉集合であることを示せばよい．

$L^2([0,T])$ 上で収束する $M(V^K)$ の点列 $\{v_m\}$ を任意に選ぶ．すなわち

$$\|v_m - v\|_{L^2} \to 0 (m \to \infty), \;\; v \in L^2([0,T]).$$

このとき，v にほとんど至るところで収束する $\{v_m\}$ の部分列 $\{v_{m_k}\}$ が存在する [7]．すなわち

$$v_{m_k}(t) \to v(t) \;\; (a.e.t).$$

また，$\{v_{m_k}\} \subseteq U$ であるから

$$|v_{m_k}(t)| \le K \;\; (a.e.t).$$

したがって

$$|v(t)| \leq K \ \ (a.e.t)$$

が成り立ち $v \in U$ である．したがって補題 3.1 により $v \in M(V^K) = U$．以上によって，$M(V^K)$ は弱位相についてコンパクト距離付け可能である． **q.e.d.**

4 最適制御の存在性

時間に依存するファジィ集合族を持つファジィ制御に対し，前節までの議論から次の結果を得る．

定理 4.1. 問題 (1)–(3) の $u(t)$ を時間 t に依存するファジィ集合族 V^K の要素の重心値で与えられるとする．このとき，$L > K$ ならばこの問題には最小解が存在する．すなわち，$J(u)$ を最小にする u が集合 $M(V^K)$ 上に存在する．

Proof. 系 (1) の解 $x(t)$ を積分表現すれば

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\{bu(\tau) + f(\tau)\}d\tau$$

である．ここで，写像 $\rho : M(V^K) \to \mathbb{R}^n$ を以下のように定義する：

$$\rho(u)(t) \ \ := \ \ \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

このとき，$u \in M(V^K)$ に対する系 (1) の解は

$$x_u(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau + \rho(u)(t) \tag{6}$$

で与えられる．写像 ρ は次の性質を満たす．

補題 4.1. (1) ρ は $M(V^K)$ から $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ への写像である．
(2) $\rho : M(V^K) \to C([0,T];\mathbb{R}^n)$ は $L^2[0,T]$ 上の弱位相の $M(V^K)$ への相対位相と $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ 上の各点位相に関して連続である．

Proof. (1) t, τ が閉区間 $[0,T]$ 上を動くことから

$$E := \sup\{||e^{A(t-\tau)}b||; t, \tau \in [0,T]\} < \infty$$

と置くと，$t > t'$ なる任意の $t, t' \in [0,T]$ に対して

$$\begin{aligned}
||\rho(u)(t) - \rho(u)(t')|| &= \left\| \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau - \int_0^{t'} e^{A(t'-\tau)}bu(\tau)d\tau \right\| \\
&= \left\| \int_0^{t'} (e^{At} - e^{At'})e^{-A\tau}bu(\tau)d\tau + \int_{t'}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \|e^{At} - e^{At'}\| \int_0^{t'} \|e^{-A\tau}b\||u(\tau)|d\tau + \int_{t'}^t \|e^{-A(t-\tau)}b\||u(\tau)|d\tau \\
&\leq \|e^{At} - e^{At'}\|E \int_0^{t'} |u(\tau)|d\tau + E\int_{t'}^t |u(\tau)|d\tau
\end{aligned}$$

制約条件(3) 及び(4) 式より

$$\leq \|e^{At} - e^{At'}\|EKT + EK|t - t'|$$

となる．行列 A のノルムを $\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ で定めると，上式と次の不等式

$$\|e^{At} - e^{At'}\| \leq \|A\|e^{\|A\|T}|t - t'|, \quad \forall t, t' \in [0, T]$$

により

$$\|\rho(u)(t) - \rho(u)(t')\| \leq EK(\|A\|Te^{\|A\|T} + 1)|t - t'|$$

が成り立つ．したがって $\rho(u) \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ である．

(2) $t \in [0, T]$，$u_n, u \in M(V^K)$ で,u_n は u に弱収束しているとする．このとき，

$$\begin{aligned}\|\rho(u_n)(t) - \rho(u)(t)\| &= \left\|\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu_n(\tau)d\tau - \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right\| \\ &= \left\|\int_0^t e^{A(t-\tau)}b(u_n(\tau) - u(\tau))d\tau\right\|\end{aligned}$$

閉区間 $[0, t]$ の定義関数を $\chi_{[0,t]}(\tau)$ とすると

$$= \left\|\int_0^T \chi_{[0,t]}(\tau)e^{A(t-\tau)}b(u_n(\tau) - u(\tau))d\tau\right\|$$

$\chi_{[0,t]}(\tau)e^{A(t-\tau)}b$ の第 i 成分 $(i = 1, \ldots, n)$ を $h_t^i(\tau)$ とおくと

$$= \sum_{i=1}^n \left|\int_0^T h_t^i(\tau)(u_n(\tau) - u(\tau))d\tau\right| \to 0.$$

以上により ρ が $L^2[0, T]$ 上の弱位相の $M(V^K)$ 上への相対位相と $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ 上の各点位相に関して連続となることがわかる． **q.e.d.**

さて，$u_n, u \in M(V^K)$ で u_n が u に弱収束しているとする．このとき，補題 4.1 より，$\rho : M(V^K) \to C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ は弱位相と各点収束位相に関して連続なので，(6) 式より，各点 $t \in [0, T]$ に対して $x_{u_n}(t) \to x_u(t)$ となる．したがって，Lebesgue の有界収束定理 [7] より

$$\int_0^T l(x_{u_n}(t))dt \to \int_0^T l(x_u(t))dt \qquad (n \to \infty).$$

また，u_n が u に弱収束していることから

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

が成り立つ．したがって

$$\|u\|^2 \leq (\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|)^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2.$$

これより

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} J(u_n) &= \liminf_{n\to\infty}\int_0^T \{l(x_{u_n}(t)) + |u_n(t)|^2\}dt \\ &= \int_0^T l(x_u(t))dt + \liminf_{n\to\infty}\|u_n\|^2 \\ &\geq \int_0^T l(x_u(t))dt + \|u\|^2 \\ &= J(u)\end{aligned}$$

となり，評価関数 $J(u)$ は $M(V^K)$ 上で弱下半連続である．

定理 3.1 により $M(V^K)$ は $L^2[0,T]$ 上の弱位相に関してコンパクト距離付け可能であるから，J は $M(V^K)$ 上で最小値を持つ [6]. **q.e.d**

5 おわりに

ファジィメンバシップ関数を時間に依存する関数と見なし，重心計算を施した集合の L^2 空間上の弱位相に関するコンパクト性を証明した．重心計算によって与えられる関数から制御を構成する関数が L^2 空間上の弱位相と連続関数空間上の各点収束位相に関して連続であることを証明した．これらの結果を用いて，オープンループに限定した系のファジィ最適制御の存在性を証明した．フィードバック系に対する最適制御の存在性及び具体的な構成法は今後の課題である．

参考文献

[1] L.A.Zadeh, "Fuzzy Sets", Information and Control, vol.8, pp.338-353, 1965.

[2] 師玉康成，楊　毓光，江口正義，山浦弘夫，"ファジィ集合族のコンパクト性とファジィ最適制御の存在"，日本応用数理学会論文誌, vol.6, no.1, pp.1-14, 1996.

[3] 楊　毓光, 和崎克己, 江口正義, 師玉康成, 木村盛茂, "NBV 空間のファジィ集合族のコンパクト性とファジィ制御への応用", 信学論 (A), vol.J82-A, no.4, pp.523-529, 1999.

[4] 菅野道夫, "ファジィ制御", 日刊工業新聞社, 1988.

[5] 日本ファジィ学会編, "ファジィ制御", 日刊工業新聞社, 1993.

[6] N.Dunford,J.T.Schwartz, "Linear Operators I", Interscience John Wiley, New York, 1958.

[7] 伊藤清三, "ルベーグ積分入門", 裳華堂, 1958.