数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 1-10

A Saddle Point of the Fractional Game

秋田県立大学　経営システム工学　木村　寛 (YUTAKA KIMURA)[1]
秋田県立大学　経営システム工学　星野　満博 (MITSUHIRO HOSHINO)[2]
秋田県立大学　経営システム工学　矢戸　弓雄 (YUMIO YATO)[3]
新潟工科大学　情報電子工学　田中　謙輔 (KENSUKE TANAKA)[4]

1 Introduction

分数形 2 人ゼロ和ゲーム (GP) を次の集合

$$(N, X, Y, f, g, G) \tag{1.1}$$

で与える. ここで,

1. $N := \{1, 2\}$ を Player の集合.
2. E を Banach 空間とし, 各々の Player I,II は戦略集合 $X, Y \subset E$ から, それぞれ戦略 $x \in X, y \in Y$ を選ぶものとする.
3. $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$. ただし, $\boldsymbol{R}_+ = (0, \infty)$.
4. $G = f/g : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, つまり, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して, $G(x, y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ と定義し, Player I の**損失関数** (loss function) とする. よって, 今 2 人ゼロ和ゲームより, Player II の損失関数は $-G$ である.

また,

$$\overline{\theta} := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y), \qquad \underline{\theta} := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) \tag{1.2}$$

とおく.

$\overline{\theta}$ は Player I の **minimal worst loss** と呼ばれ, $\underline{\theta}$ は Player II の **maximal worst gain** といわれる.

一般には, $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$ が成り立ち, $\overline{\theta} \neq \underline{\theta}$ のとき, **dualty gap** が存在しているという.

[1] 〒 015–0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84–4 E–mail: yutaka@akita-pu.ac.jp
[2] 〒 015–0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84–4 E–mail: hoshino@akita-pu.ac.jp
[3] 〒 015–0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84–4 E–mail: yato@akita-pu.ac.jp
[4] 〒 945–1195 新潟県柏崎市藤橋 1719 番地 E–mail: tanaka@iee.niit.ac.jp

Definition 1.1 ゲーム (GP) が **game value** (in short, a value) をもつとは

$$\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^* \tag{1.3}$$

が成り立つときをいう．また，この θ^* をゲーム (GP) の **value** とよぶ．

Definition 1.2 $y^* \in Y$ がゲーム (GP) の **max-inf** であるとは，

$$\overline{\theta} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) = \inf_{x \in X} G(x, y^*) \tag{1.4}$$

が成り立つことをいい，また，$x^* \in X$ がゲーム (GP) の **mini-sup** であるとは，

$$\underline{\theta} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x, y) = \sup_{y \in Y} G(x^*, y) \tag{1.5}$$

が成り立つことをいう．

Proposition 1.1 ゲーム (GP) が次の (1)(2) のどちらか一方，

(1) $x^* \in X$ が (GP) の mini-sup;

(2) $y^* \in Y$ が (GP) の max-inf,

を満たしているならば，$\overline{\theta} = \underline{\theta}$ が成り立つ．

この Proposition 1.1 の証明は 参考文献 [1] 参照．

Definition 1.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の **saddle point** であるとは，次が成り立つことをいう．

$$\sup_{y \in Y} G(x^*, y) = G(x^*, y^*) = \inf_{x \in X} G(x, y^*). \tag{1.6}$$

このとき，次が成り立つ．

Proposition 1.2 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP) の saddle point であるための必要十分条件は，$x^* \in X$ が (GP) の mini-sup かつ，$y^* \in Y$ が (GP) の max-inf であることである．

参考文献 [1] 参照．

我々は，ゲーム (GP) において game value や saddle point を求めることに興味があるが，分数形ゲームにおいて直接それらの解を求めることは困難である．そこで，パラメータ $\theta \in R$ を (GP) に導入し，(GP) から新しくパラメトリックゲーム (GP_θ) を構成して，ゲームの均衡解を求める．

よってはじめに，(GP) に対するパラメトリックゲーム (GP_θ) を構成する．

2 A Two-Person Parametric Game

分数形2人ゼロ和パラメトリックゲーム (GP_θ) を次の集合で与える:

$$(N, X, Y, f, g, \theta, F_\theta) \tag{2.1}$$

ここで,

1. $N := \{1, 2\}$ を Player の集合.
2. E を Banach 空間とし, 各々の Player I,II は戦略集合 $X, Y \subset E$ から, それぞれ戦略 $x \in X, y \in Y$ を選ぶものとする.
3. $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$.
4. $\theta \in \boldsymbol{R}$.
5. $F_\theta = f - \theta g : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ と定義し, Player I の損失関数とする. つまり, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して $F_\theta(x, y) = f(x, y) - \theta g(x, y)$ である. また, 今2人ゼロ和ゲームより, Player II の損失関数は $-F_\theta$ である.

また,

$$\overline{F}_\theta := \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y), \qquad \underline{F}_\theta := \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\theta(x, y) \tag{2.2}$$

とおく.

(GP) における定義と同様にして, 次の定義を与える.

Definition 2.1 ゲーム (GP_θ) が game value (in short, a value) をもつとは

$$\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta =: F_\theta^* \tag{2.3}$$

が成り立つときをいう. また F_θ^* をゲーム (GP_θ) の value とよぶ.

Definition 2.2 $y^* \in Y$ がゲーム (GP_θ) の max-inf であるとは,

$$\overline{F}_\theta = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y) = \inf_{x \in X} F_\theta(x, y^*) \tag{2.4}$$

が成り立つことをいい, また, $x^* \in X$ がゲーム (GP_θ) の mini-sup であるとは,

$$\underline{F}_\theta = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\theta(x, y) = \sup_{y \in Y} F_\theta(x^*, y) \tag{2.5}$$

が成り立つことをいう.

Definition 2.3 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_θ) の saddle point であるとは, 次が成り立つことをいう.

$$\sup_{y \in Y} F_\theta(x^*, y) = G(x^*, y^*) = \inf_{x \in X} F_\theta(x, y^*). \tag{2.6}$$

Proposition 2.1 $(x^*, y^*) \in X \times Y$ がゲーム (GP_θ) の saddle point であるための必要十分条件は, $x^* \in X$ が (GP_θ) の mini-sup かつ $y^* \in Y$ が (GP_θ) の max-inf であることである.

Proof. Proposition 1.2 と同様. □

Definition 2.4 $X, Y \subset E$ を空でない集合, $\varphi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ とする. このとき任意の $y \in Y$ に対して $\varphi(\cdot, y)$ が **convexlike** であるとは, 任意の $x_1, x_2 \in X$ と α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ に対して, ある $x_0 \in X$ が存在して,

$$\varphi(x_0, y) \leq \alpha\varphi(x_1, y) + (1 - \alpha)\varphi(x_2, y), \qquad \forall y \in Y \tag{2.7}$$

が成り立つことである.

Lemma 2.1 Y をコンパクト凸集合とし, $\varphi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ は次の (1)(2) を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y) : X \to \boldsymbol{R}$, convexlike;

(2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot) : Y \to \boldsymbol{R}$, upper semicontinuous, concave.

このとき, 次が成り立つ.

$$\exists y^* \in Y, \quad s.t. \quad \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y) = \inf_{x \in X} \varphi(x, y^*) = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x, y). \tag{2.8}$$

Ky Fan's system Th. を用いることにより示される. 参考文献 [1] 参照.

Corollary 2.1 X, Y をコンパクト凸集合とし, $\phi : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ は次の (1)(2) を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y, \varphi(\cdot, y) : X \to \boldsymbol{R}$, lower semicontinuous, convex;

(2) $\forall x \in X, \varphi(x, \cdot) : Y \to \boldsymbol{R}$, upper semicontinuous, concave.

このとき, saddle point $(x^*, y^*) \in X \times Y$ が存在する.

Theorem 2.1 $X \subset E$ はある部分集合, $Y \subset E$ をコンパクトな凸部分集合とし, $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$ は条件 (1)(2)(3)(4) を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y)$,convex;

(2) ${}^\forall x \in X, y \mapsto f(x, y)$,upper semicontinuous, concave;

(3) ${}^\forall y \in Y, x \mapsto g(x, y)$,concave;

(4) ${}^\forall x \in X, y \mapsto g(x, y)$,lower semicontinuous, convex.

このとき, 任意の $\theta \geq 0$ に対して, 次が成立する.

$$\exists y^* \in Y, \quad s.t. \quad \overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta = \inf_{x \in X} F_\theta(x, y^*). \tag{2.9}$$

(*i.e.,* $y^* \in Y$ はゲーム (GP_θ) の max-inf.)

Proof. 任意の $x \in X$ に対して，関数 $F_\theta(x, \cdot) : Y \to \boldsymbol{R}$ は条件 (2)(4) より，u.s.c. かつ concave である．一方，任意の $y \in Y$ を固定したとき，関数 $F(\cdot, y) : X \to \boldsymbol{R}$ は (1)(3) より，convex となる．よって, Lemma 2.1 より,

$$\exists y^* \in Y, \quad s.t., \quad \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\theta(x, y) = \inf_{x \in X} F_\theta(x, y^*) = \inf_{x \in X} \max_{y \in Y} F_\theta(x, y). \tag{2.10}$$

ゆえに, $\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta$ である. □

$\overline{F}_\theta$ と，$\overline{\theta}$ の関係について，次の Lemma が成り立つ.

Lemma 2.2 $\overline{F}_\theta$ について次が成りたつ.

(a) $\overline{F}_\theta$ は θ に関して非増加関数;

(b) $\overline{F}_\theta < 0$ ならば, $\theta \geq \overline{\theta}$;

(c) $\overline{F}_\theta > 0$ ならば, $\theta \leq \overline{\theta}$;

(d) $\theta > \overline{\theta}$ ならば, $\overline{F}_\theta \leq 0$;

(e) $\theta < \overline{\theta}$ ならば, $\overline{F}_\theta \geq 0$.

さらに Y がコンパクト, 任意の $x \in X$ に対して $y \mapsto f(x, y)$ が連続, $y \mapsto g(x, y)$ が連続ならば,

(f) $\overline{F}_\theta < 0 \Longleftrightarrow \theta > \overline{\theta}$;

(g) $\overline{F}_{\overline{\theta}} \geq 0$.

Proof. (a) $\forall \theta_1, \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$, $\forall (x, y) \in X \times Y$ に対して, $f(x, y) - \theta_1 g(x, y) > f(x, y) - \theta_2 g(x, y)$ であることより，$F_{\theta_1}(x, y) > F_{\theta_2}(x, y)$ が成り立つ．よって,

$$\overline{F}_{\theta_1} = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta_1}(x, y) \geq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta_2}(x, y) = \overline{F}_{\theta_2}. \tag{2.11}$$

ゆえに, $\overline{F}_\theta$ は非増加関数である.
(b) $\overline{F}_\theta < 0$ であることより,

$$\exists \bar{x} \in X \qquad s.t. \qquad \sup_{y \in Y} F_\theta(\bar{x}, y) < 0. \tag{2.12}$$

ゆえに, $\sup_{y \in Y} G(\bar{x}, y) \leq \theta$ なので，$\overline{\theta} \leq \theta$.
(c) $\overline{F}_\theta > 0$ であることより, 任意の $x \in X$ に対して,

$$\exists \bar{y} \in Y \qquad s.t. \qquad F_\theta(x, y) > 0. \tag{2.13}$$

ゆえに, $\sup_{y\in Y} G(x,y) > \theta$ なので, $\overline{\theta} \geq \theta$.
(d) $\theta > \overline{\theta} = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} G(x,y)$ より，$\theta > \sup_{y\in Y} G(\bar{x},y)$ なる $\bar{x}\in X$ が存在する．ゆえに，すべての $y \in Y$ について，

$$\theta > G(\bar{x},y) \tag{2.14}$$

なので,

$$0 > F_\theta(\bar{x},y), \qquad \forall y \in Y. \tag{2.15}$$

したがって,

$$0 \geq \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y) = \overline{F}_\theta.$$

(e) $\overline{\theta} = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} G(x,y) > \theta$ より, すべての $x \in X$ に対して, $\sup_{y\in Y} G(x,y) > \theta$ である．ゆえに，$G(x,\bar{y}) > \theta$ となる $\bar{y} \in Y$ が存在するので，$F_\theta(x,\bar{y}) > 0$. したがって,

$$\overline{F}_\theta = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y) \geq 0.$$

(f) $(\Rightarrow)$ $\overline{F}_\theta < 0$ であると仮定する．(2.12) から, $\sup_{y\in Y} F_\theta(\bar{x},y) < 0$ なる $\bar{x}\in X$ が存在するので，すべての $y \in Y$ に対して，$G(\bar{x},y) < \theta$ である．ここで, Y がコンパクト, $y \mapsto G(\bar{x},y)$ が連続であることから,

$$\theta > \sup_{y\in Y} G(\bar{x},y). \tag{2.16}$$

したがって，$\theta > \overline{\theta}$.

$(\Leftarrow)$ $\theta > \overline{\theta}$ であると仮定すると，(2.14) から, 任意の $y\in Y$ に対して，$\theta > G(\bar{x},y)$ となる $\bar{x} \in X$ が存在する．ゆえに，任意の $y \in Y$ に対して, $0 > F_\theta(\bar{x},y)$ となる．ここで, Y がコンパクト, $y \mapsto F_\theta(\bar{x},y)$ が連続であることから,

$$0 > \sup_{y\in Y} F_\theta(\bar{x},y) \geq \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_\theta(x,y) = \overline{F}_\theta. \tag{2.17}$$

(g) $\overline{F}_{\overline{\theta}} < 0$ であると仮定すると, Y がコンパクト, $y \mapsto F_{\overline{\theta}}(x,y)$ が連続であることから, $\sup_{y\in Y} F_{\overline{\theta}}(\bar{x},y) < 0$ なる $\bar{x}\in X$ が存在する．ゆえに, 任意の $y\in Y$ に対して, $\overline{\theta} > G(\bar{x},y)$ であるので,

$$\overline{\theta} > \sup_{y\in Y} G(\bar{x},y) \geq \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} G(x,y) = \overline{\theta}.$$

これは矛盾である．したがって，$\overline{F}_{\overline{\theta}} \geq 0$. □

$\underline{F}_\theta$ と $\underline{\theta}$ については以下のことが成りたつ.

Lemma 2.3 $\underline{F}_\theta$ について次が成りたつ.

(a) $\underline{F}_\theta$ は非増加関数;

(b) $\underline{F}_\theta < 0$ ならば, $\theta \geq \underline{\theta}$;

(c) $\underline{F}_\theta > 0$ ならば, $\theta \leq \underline{\theta}$;

(d) $\theta > \underline{\theta}$ ならば, $\underline{F}_\theta \leq 0$;

(e) $\theta < \underline{\theta}$ ならば, $\underline{F}_\theta \geq 0$.

さらに X がコンパクト, 任意の $y \in Y$ に対して $x \mapsto f(x,y)$ が連続, $x \mapsto g(x,y)$ が連続のとき,

(f) $\underline{F}_\theta > 0 \Longleftrightarrow \underline{\theta} > \theta$;

(g) $\underline{F}_{\underline{\theta}} \leq 0$.

Proposition 2.2 $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ のとき, 任意の $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して, 次が成り立つ.

$$\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta = 0. \tag{2.18}$$

Proof. はじめに, 任意の $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して, $\overline{F}_\theta = 0$ であることを示す.
($\geq$) : Lemma 2.2 (e) より明らか.
($\leq$) : 任意の $\theta > \underline{\theta}$ に対して, $\theta > G(x_y, y)$ となる $x_y \in X$ が存在するので,

$$0 > F_\theta(x_y, y), \qquad \forall y \in Y$$

が成り立つ. よって,

$$0 \geq \sup_{y \in Y} F_\theta(x_y, y) \geq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_\theta(x, y) = \overline{F}_\theta$$

より, $\overline{F}_\theta = 0$.
次に, 任意の $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して, $\underline{F}_\theta = 0$ であることを示す.
($\leq$) : Lemma 2.3 (d) より明らか.
($\geq$) : 任意の $\theta < \overline{\theta}$ に対し, $G(x, y_x) > \theta$ を満たす $y_x \in Y$ が存在するので, $F_\theta(x, y_x) > 0$ となる. よって, $\inf_{x \in X} F_\theta(x, y_x) \geq 0$ であることから,

$$\underline{F}_\theta = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_\theta(x, y) \geq 0.$$

したがって, $\overline{F}_\theta = 0$.
以上より, 任意の $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ に対して, $\overline{F}_\theta = \underline{F}_\theta = 0$ である. □

Proposition 2.3 $y^* \in Y$ がゲーム (GP) の max-inf であるとき, 次の (1)(2) が成り立つ.

(1) ゲーム (GP) は value θ^* をもつ;

(2) $\overline{F}_{\theta^*} \leq 0$ ならば, $y^* \in Y$ はゲーム (GP_θ) の max-inf である.

Proof. (1) Proposition 1.1 より明らか.
(2) $\theta^* = \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} G(x, y) = \inf_{x \in X} G(x, y^*)$ であることより, 任意の $x \in X$ に対して, $\theta^* \leq G(x, y^*)$ が成り立つ. このとき, すべての $x \in X$ に対して, $0 \leq F_{\theta^*}(x, y^*)$ であるので,

$$0 \leq \inf_{x \in X} F_{\theta^*}(x, y^*) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} F_{\theta^*}(x, y) = \overline{F}_{\theta^*} \leq 0.$$

したがって,

$$\inf_{x\in X} F_{\theta^*}(x,y^*) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_{\theta^*}(x,y) = \overline{F}_{\theta^*} = 0$$

より, $y^* \in Y$ はゲーム (GP_θ) の max-inf である. □

Corollary 2.2 $(x^*,y^*) \in X \times Y$ はゲーム (GP) の saddle point であるとする. このとき, 次の (1)(2) が成り立つ.

(1) $F_{\theta^*}(x^*,y^*) = 0$;

(2) $(x^*,y^*) \in X \times Y$ はゲーム (GP_{θ^*}) の saddle point.

Theorem 2.2 ゲーム (GP) は value θ^* をもち, $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ を満たしているものとする. このとき, $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であるならば, $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である.

Proof. 仮定 $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ であるここと $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であることから,

$$0 \leq \overline{F}_{\theta^*} = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} F_{\theta^*}(x,y) = \inf_{x\in X} F_{\theta^*}(x,y^*) \leq F_{\theta^*}(x,y^*), \qquad {}^\forall x \in X. \tag{2.19}$$

よって,

$$\theta^* \leq G(x,y^*) \leq \sup_{y\in Y} G(x,y), \qquad {}^\forall x \in X \tag{2.20}$$

より,

$$\theta^* \leq \inf_{x\in X} G(x,y^*) \leq \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} G(x,y) = \overline{\theta} = \theta^*$$

が成り立つ. つまり,

$$\theta^* = \inf_{x\in X} G(x,y^*) = \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} G(x,y).$$

ゆえに, $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である. □

Corollary 2.3 ゲーム (GP) は value θ^* をもち, かつ, $(x^*,y^*) \in X \times Y$ はゲーム (GP_{θ^*}) の saddle point であるとする. このとき, $F_{\theta^*}(x^*,y^*) = 0$ を満たしているならば, $(x^*,y^*) \in X \times Y$ はゲーム (GP) の saddle point である.

3 A Saddle Point of the Fractional Game

Theorem 3.1 $X \subset E$ はある部分集合, $Y \subset E$ をコンパクトな凸部分集合とし, $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$, $g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$ は以下の条件を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y,\ x \mapsto f(x,y)$, convex;

(2) $\forall x \in X,\ y \mapsto f(x,y)$, continuous, concave;

(3) $\forall y \in Y,\ x \mapsto g(x,y)$, concave;

(4) $\forall x \in X,\ y \mapsto g(x,y)$, continuous, convex.

このとき, $\overline{\theta} \geq 0$ ならば, 次の (i)(ii) が成り立つ.

(i) $\overline{\theta} = \underline{\theta} =: \theta^*$;

(ii) ゲーム (GP) の max-inf $y^* \in Y$ が存在する.

Proof. (i) $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$ は明らかであるから, $\overline{\theta} \leq \underline{\theta}$ であることを示す. 今, 仮定より $\overline{\theta} \geq 0$ であることから Lemma 2.2(g) と Theorem 2.1 より,

$$\overline{F}_{\overline{\theta}} = \underline{F}_{\overline{\theta}} \geq 0. \tag{3.1}$$

また, Lemma 2.1 より, $(GP_{\overline{\theta}})$ の max-inf $y^* \in Y$ が存在する. つまり,

$$\underline{F}_{\overline{\theta}} = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y) = \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y^*). \tag{3.2}$$

ここで, (3.1),(3.2) より,

$$0 \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y) = \inf_{x \in X} F_{\overline{\theta}}(x,y^*) \leq F_{\overline{\theta}}(x,y^*), \qquad {}^{\forall}x \in X. \tag{3.3}$$

よって, (3.3) より,

$$\overline{\theta} \leq G(x,y^*), \qquad {}^{\forall}x \in X.$$

ゆえに,

$$\overline{\theta} \leq \inf_{x \in X} G(x,y^*) \leq \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} G(x,y) = \underline{\theta}. \tag{3.4}$$

したがって, $\overline{\theta} = \underline{\theta}$ が成り立つ.

(ii) $\overline{F}_{\theta^*} \geq 0$ と $y^* \in Y$ がゲーム (GP_{θ^*}) の max-inf であることから Theorem 2.2 から $y^* \in Y$ はゲーム (GP) の max-inf である. □

Theorem 3.2 $X, Y \subset E$ はコンパクト凸集合とし, $f : X \times Y \to \boldsymbol{R},\ g : X \times Y \to \boldsymbol{R}_+$ は以下の条件を満たすものとする.

(1) $\forall y \in Y,\ x \mapsto f(x,y)$, continuous, convex;

(2) $\forall x \in X,\ y \mapsto f(x,y)$, continuous, concave;

(3) $\forall y \in Y,\ x \mapsto g(x,y)$, continuous, concave;

(4) $\forall x \in X,\ y \mapsto g(x,y)$, continuous, convex.

このとき, $\overline{\theta} \geq 0$ ならば, ゲーム (GP) の saddle point $(x^*, y^*) \in X \times Y$ が存在する.

Proof. Theorem 3.1, Corollary 2.1 を用いることにより示される. □

References

[1] J.-P.Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory, Revised Edition (North-Holland, Amsterdam 1982).

[2] J.-P. Aubin and A. Cellina, Differential Inclusion, Springer-Verlag, Grundlehren der math, (1984).

[3] J.-P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, A Wiley-Interscience Publication, (1984).

[4] J.-P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis, Birkhäuser Boston, (1990).

[5] J.-P.Aubin, Optima and Equilibria (Springer-Verlag, New York, 1993).

[6] V. Barbu and Th. Precupanu, Convexity and Optimization in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest, Romania, (1986).

[7] R.E.Bruck, A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions in Banach Spaces, Israel J. Math. 32 (1979) 107-116.

[8] Y. Kimura, Y. Sawasaki, and K. Tanaka, A Noncooperative Equilibrium for n-Person Game with Fractional Loss Function, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, World Scientific, (1999) 44-51.

[9] D.G.Luenberger, Optimization by Vector Space Methods (John Wiley & Sons, inc., 1969).

[10] Y. Sawasaki, Y. Kimura, and K. Tanaka, A Two-Person Zero-Sum Game with Fractional Loss Function, Journal of Operations Research Society of Japan, 43-1 (2000) 209-218.

[11] K. Tanaka and K. Yokoyama, On ε-Equilibrium Point in a Noncooperative n-person Game, J. Math. Anal. Appl., 160 (1991) 413-423.

[12] R.T.Rockafellar, Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-89.