数理解析研究所講究録
1187 巻 2001 年 37-48



# 連続型最小カット問題の relaxation と Gale の feasibility theorem

札幌医科大学医学部　野澤亮平 (Ryôhei Nozawa)
School of Medicine, Sapporo Medical University

Gale は [3] において, ある種の条件を満たすネットワーク上の流れ (flow) が存在するための必要十分条件をそのネットワークの cut を用いて述べた。この種の定理を Gale の feasibility theorem と呼ぶことにする。

通常の（有限離散な）ネットワークでは, よく知られた max-flow min-cut theorem を用いて証明でき, 逆に Gale の feasibility theorem から max-flow min-cut theorem を証明できるという意味で同値の関係にある。(cf. Ford and Fulkerson [1] 。)

どちらの定理も直感的には通常の Euclidean domain で容易に意味付けができ, そのような “一般化” を厳密に取り扱う方法として測度を用いたもの (cf. [2]) とベクトル場を用いたもの (cf. [7, 8]) などがある。

このうち, ベクトル場を用いた方法では利用する関数空間に関連して領域のなめらかさや flow に対する付加的な条件が必要になる。また, 領域の境界の作用により, 直接的に定式化される min-cut problem では最適解の存在が多くの場合に保証されないので, それを補うのに min-cut problem の変形として relaxation が考えられる。最も単純な形の Gale の feasibility theorem はこれを用いても証明できる。

ここでは, これら各種の定式化に対応した Gale の feasibility theorem を抽象化して統一的に扱うことを試みる。さらに Gale の feasibility theorem から, 先に述べた relaxation を含む各種の max-flow min-cut theorem を導く。

なお, ベクトル場を用いた方法による max-flow, min-cut problems については [10, 4, 6] などを参照されたい。

## 1. 通常のネットワークにおける Gale の feasibility theorem

ネットワーク $N$ は有限個または可算無限個の点 (node) の集合 $\mathcal{N}$, その 2 点を両端点とする線分 (arc) の集合 $\mathcal{A}$, および線分の容量を表す $\mathcal{A}$ 上の非負値関数 $c(x,y)$ の組で表される： $N=(\mathcal{N},\mathcal{A},c(x,y))$

$\mathcal{N}$ の互いに交わらない二つの部分集合 $S,T$ をそれぞれ source, sink とする supply – demand problem (SD) は, $S$ および $T$ 上で与えられた非負値関数 $a(x),b(x)$ に対して次のように述べられる。

$$
\begin{array}{llll}
\text{(SD)} & \text{Find} & \text{a flow function } f(x,y) & \text{on } \mathcal{A} \\
 & \text{satisfying} & f(x,\mathcal{N})-f(\mathcal{N},x)\le a(x) & \text{for all } x\in S, \\
 & & f(x,\mathcal{N})-f(\mathcal{N},x)=0 & \text{for all } x\in \mathcal{N}-(S\cup T) \\
 & & f(\mathcal{N},x)-f(x,\mathcal{N})\ge b(x) & \text{for all } x\in T, \\
 & & 0\le f(x,y)\le c(x,y) & \text{for all } (x,y)\in\mathcal{A}.
\end{array}
$$

この解が存在するための必要十分条件として次の条件 (G) が知られている。

$$\text{Condition(G)} \quad b(T\cap\overline{X})-a(S\cap\overline{X})\le c(X,\overline{X}) \quad \text{for all } X\subset\mathcal{N}$$

ここで $\overline{X}$ は $X$ の補集合で, $a(S\cap\overline{X})=\sum_{x\in S\cap\overline{X}}a(x)$, $c(X,\overline{X})=\sum_{x\in X}\sum_{y\in\overline{X}}c(x,y)$ などである。ただし, $a(\emptyset)=b(\emptyset)=0$, $c(\emptyset,\mathcal{N})=c(\mathcal{N},\emptyset)=0$ とする。

一方, max - flow min-cut theorem とは, 次の 2 組の最大最小の問題の値が等しいことを主張する定理である。

$$
\begin{array}{lll}
\text{(MF)} & \text{Maximize} & \displaystyle\sum_{x\in S}(f(x,\mathcal{N})-f(\mathcal{N},x)) \quad \text{subject to} \\
 & & f(x,\mathcal{N})-f(\mathcal{N},x)=0 \quad \text{for all } x\in\mathcal{N}-(S\cup T), \\
 & & 0\le f(x,y)\le c(x,y) \quad \text{for all } (x,y)\in\mathcal{A} \\
\text{(MC)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{x\in X}\sum_{y\in\overline{X}}c(x,y) \quad \text{subject to } X\subset\mathcal{N},\ S\subset X,\ T\subset\overline{X}
\end{array}
$$

以下においてこの種の問題の拡張をいくつか述べる。

**2.** Gale の feasibility theorem の測度論的な定式化 ([2])

$(\Omega,\Sigma)$ を可測空間とし, $(\Omega\times\Omega,\Sigma\otimes\Sigma)$ 上の正測度 $\tau$ を容量関数に対応するものとみなし, $(\Omega,\Sigma,\tau)$ をネットワークと考えたとき, $(\Omega,\Sigma)$ 上の与えられた signed measure $\mu$ を用いて, supply – demand problem (SDM) は次のように一般化される。

$$
\begin{array}{llll}
\text{(SDM)} & \text{Find} & \text{a bimeasure } \eta \text{ on } \Omega\times\Omega & \\
 & \text{satisfying} & \mu(U)\le\eta(U,\overline{U})-\eta(\overline{U},U) & \text{for all } U\in\Sigma, \\
 & & \eta(U,V)\le\tau(U\times V) & \text{for all } U,V\in\Sigma,\ U\cap V=\emptyset, \\
 & & \eta(U,V)\ge 0 & \text{for all } U,V\in\Sigma,\ U\cap V=\emptyset.
\end{array}
$$

$\tau(\Omega\times\Omega)$ および $\mu$ の全変動が有限のとき, この解が存在するための必要十分条件として先の (G) に対応するのは次の条件 (GM) である。

$$\text{Condition(GM)} \quad \mu(U)\le\tau(U\times\overline{U}) \text{ for all } U\in\Sigma$$

測度論による定式化は離散ネットワークの問題の一般化である。離散ネットワークの問題を測度論による形で表すには次のように対応させればよい。

- $\Omega=\mathcal{N}$, $\mathcal{A}\subset\Omega\times\Omega$, $\Sigma$ は $\mathcal{N}$ の部分集合全体
- $\tau(U\times V)=c(V,U)$
- $\mu(U)=b(T\cap U)-a(S\cap U)$
- $\eta(U,V)=f(V,U)$

〔注〕 離散ネットワークにおける supply – demand problem (SD) において, $x\in\mathcal{N}-(S\cup T)$ に対する条件『$f(\mathcal{N},x)-f(x,\mathcal{N})=0$』は, 『$f(x,\mathcal{N})-f(\mathcal{N},x)\le 0$』で置き換えても, flow の存在に関しては同値である。

**3.** Gale の feasibility theorem のベクトル場を用いた定式化（[7]）

ここでは $\Omega$ を $R^n$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は Lipschitz 連続とする。このとき, 境界の外向き単位法線ベクトル $\nu$ がほとんどすべての点で存在する。容量関数にあたるものとして, $\Omega$ の各点に $R^n$ の閉凸集合を対応させる集合値写像 $\Gamma$ をとる。このとき, $\partial\Omega$ の互いに交わらない可測集合 $A, B$ をそれぞれ source, sink とする supply – demand problem (SDC) は, $A, B$ 上で与えられた非負値可測関数 $a(x), b(x)$ に対して

$$\begin{array}{lll}\text{(SDC)} & \text{Find} & \text{a vector field } \sigma \quad \text{on } \Omega \\ & \text{satisfying} & \sigma(x) \in \Gamma(x) \quad \text{for all } x \in \Omega, \quad -\operatorname{div}\sigma = 0 \text{ on } \ \Omega \\ & & \sigma \cdot \nu = 0 \text{ on } \ \partial\Omega - (A \cup B), \quad -\sigma \cdot \nu \leq a \text{ on } \ A, \ \sigma \cdot \nu \geq b \text{ on } \ B\end{array}$$

となる。いま $\beta(v, x) = \sup_{w \in \Gamma(x)} v \cdot w$ とおき, $\partial S \cap \Omega$ が適当になめらかな $\Omega$ の部分集合 $S$ の境界上の単位法線ベクトルを $\nu_S$ として $C(S) = \int_{\partial S \cap \Omega} \beta(-\nu_S, \cdot) ds$ とおけば, この問題に解が存在するための必要十分条件は

$$\text{Condition(GC)} \quad C(S) \geq \int_{B \cap \partial S} b ds - \int_{A \cap \partial S} a ds \quad \text{for all S} \subset \Omega$$

となることが予想される。しかし, この場合, 測度論によるものより厳密な取り扱いが複雑になる。ここでは, flow $\sigma$ の class を, 本質的有界かつ Lebesgue 可測なベクトル場とし, cut $S$ としては, その特性関数が有界変動であるような可測集合をとる。このとき, 超関数の意味の $\operatorname{div}\sigma$ が $L^n(\Omega)$ に属すれば, 拡張された意味で $\partial\Omega$ 上の法線方向成分 $\sigma \cdot \nu$ が $L^\infty(\partial\Omega)$ の関数として定義される（cf. [5]）。また, cut $S$ の reduced boundary $\partial^* S$ を真の境界 $\partial S$ の代わりに用いることによって, 条件 (GC) も厳密に扱うことができる。

**4.** Abstract formulation と離散および測度論的な feasibility problem への応用

以上の問題に現れる必要十分条件はすべてネットワークの（点集合の）部分集合を用いて述べられるが, 部分集合の特性関数を含む関数族に条件を拡張することができ, そのような拡張は, 単純な形に抽象化できる。2 組の paired spaces $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}^* \rangle$, $\langle \mathcal{F}, \mathcal{F}^* \rangle$ と, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ の部分集合 $K, X$ および $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への写像 $T$ を用いて

$$\text{(FP)} \qquad \text{Find } \sigma \in K \text{ satisfying } \ T(\sigma) \in X$$

を考える。以下においては, $\mathcal{E}, \mathcal{E}^*, \mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ の各空間上で, 常に双対性から定まる弱位相を考えるものとする。

命題 1. $T(K) - X$ が閉凸集合のとき, (FP) に解が存在するためには

$$\text{Condition(GA)} \quad \sup_{\sigma \in K} \langle T(\sigma), u \rangle \geq \inf_{\varphi \in X} \langle \varphi, u \rangle \qquad \text{for all } u \in \mathcal{F}^*$$

が成り立つことが必要十分である。

証明. (FP) が解をもてば (GA) が成り立つことは容易にわかる。逆に, (FP) が解をもたなければ $T(K) - X$ は $\mathcal{F}$ の原点を含まないから $T(K) - X$ と $\mathcal{F}$ の原点とに対して分離定理を適用すれば (GA) が成り立たないことがわかる。（証明終わり）

以下, 先に述べたいくつかの feasibility theorem をこの命題の応用として証明しよう。

応用 1. (cf. Yamasaki and Oettli [9]) $N = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, c(x,y))$ は 1 節で述べたようなネットワークとする。ここでは $\mathcal{N}$ は可算無限集合とし, 任意の $x \in \mathcal{N}$ に対して $\{y \in \mathcal{N};\ (x,y) \in \mathcal{A},\ \text{or}\ (y,x) \in \mathcal{A}\}$ が有限集合であるとする。すなわち局所有限な可算無限ネットワークの場合を考える。

- $\mathcal{E}$ は $\mathcal{A}$ 上の実数値関数全体, $\mathcal{E}^*$ は $\mathcal{A}$ 上の実数値関数で, 有限個の点を除いて 0 となる関数全体
- $\mathcal{F}$ は $\mathcal{N}$ 上の実数値関数全体, $\mathcal{F}^*$ は $\mathcal{N}$ 上の実数値関数で, 有限個の点を除いて 0 となる関数全体
- $T(f)(x) = f(\mathcal{N}, x) - f(x, \mathcal{N})$ とおく
- $K = \{f \in \mathcal{E};\ 0 \leq f(x,y) \leq c(x,y)\ \text{for all}\ (x,y) \in \mathcal{A}\}$ とする
- $X = \{g \in \mathcal{F};\ g \geq -a\ \text{on}\ S,\ g \geq b\ \text{on}\ T,\ g = 0\ \text{elsewhere}\}$ とする

このとき, $T$ は $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への（それぞれの弱位相に関して）連続な線形写像で, $K$ は $\mathcal{E}$ の 凸集合, $X$ は $\mathcal{F}$ の閉凸集合である。さらに $u \in \mathcal{F}^*$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sup_{f\in K}\sum_{x\in\mathcal{N}}(f(\mathcal{N},x)-f(x,\mathcal{N}))u(x) = \sum_{x,y\in\mathcal{N}} c(x,y)(u(y)-u(x))^+\\
&\inf_{g\in X}\sum_{x\in\mathcal{N}} g(x)u(x) = \sum_{x\in T} b(x)u(x) - \sum_{x\in S} a(x)u(x)\ \text{if}\ u \geq 0\ \text{on}\ S\cup T\\
&\inf_{g\in X}\sum_{x\in\mathcal{N}} g(x)u(x) = -\infty\ \text{otherwise}
\end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $(u(y)-u(x))^+ = \max(0, u(y)-u(x))$ である。

1 節で述べた (SD) がこの設定で (FP) と一致することはすぐわかる。さらに, $c(x,y)$ がすべての $(x,y) \in \mathcal{A}$ に対して有限値でありさえすれば $K$ は compact なので, $T(K) - X$ は閉凸集合となり, 命題の仮定を満たすから, (SD) に解があるための必要十分条件は命題 1 により $\sup_{\sigma\in K}\langle T(\sigma), u\rangle \geq \inf_{\varphi\in X}\langle \varphi, u\rangle$ がすべての $u \in \mathcal{F}^*$ に対して成り立つことである。ところで, この条件 (GA) は $u$ を $\mathcal{N}$ の部分集合に対する特性関数に制限すれば条件 (G) に一致することは, 上の式からすぐわかる。(G) から (GA) を導くことは, 次に述べる測度論的な場合とほぼ同様であるからここでは省略する。

応用 2. 測度論的 supply – demand problem (SDM) の場合に命題を適用する。$\Omega, \Sigma, \tau, \mu$ を 2 節に述べたものとする。

- $\mathcal{E}$ は $(\Omega\times\Omega, \Sigma\otimes\Sigma)$ 上の有限な signed measure 全体, $\mathcal{E}^*$ は $(\Omega\times\Omega, \Sigma\otimes\Sigma)$ 上の可測単関数全体
- $\mathcal{F}$ は $(\Omega, \Sigma)$ 上の有限な signed measure 全体, $\mathcal{E}^*$ は $(\Omega, \Sigma)$ 上の可測単関数全体
- $T(\eta)(U) = \eta(U\times\Omega) - \eta(\Omega\times U)$ for $U \in \Sigma$ とする

- $K = \{\eta \in \mathcal{E};\ 0 \leq \eta \leq \tau\}$ とおく
- $X = \{\lambda \in \mathcal{F};\ \lambda \geq \mu\}$ とおく

このとき, $\lambda \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{F}^*$ に対して $\langle \lambda, g\rangle = \int_\Omega g d\lambda$ によって, $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^*$ は paired space と見なせる。 $\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}^*$ も同様である。各空間上の弱位相に関して, $T$ は連続で, $X$ は閉凸集合である。また, 任意の $\eta \in K$ は $\tau$ に関して絶対連続であるから, 非負かつ 1 以下の密度関数をもち, $\{\varphi \in L^\infty(\Omega;\tau);\ 0 \leq \varphi \leq 1\}$ は 通常の意味で weak* compact であることから $K$ が compact であることもいえる。

よって, (SDM) にも命題が適用できて, (GA) は解が存在するための必要十分条件であることがわかる。そこで, この設定による (GA) と (GM) が同値であることを示せばよいが, それは次の補題による。なお, ここでの設定では flow にあたる $\eta$ は $(\Omega \times \Omega, \Sigma \otimes \Sigma)$ 上の有限な signed measure であり, 2 節のような bimeasure ではないので, $\eta(U,V)$ ではなく $\eta(U \times V)$ と記している。

補題 1. 上の設定で, 条件 (GA) は

$$\sup_{0\leq\eta\leq\tau} \sum_{i=1}^{l} r_i(\eta(A_i \times \Omega) - \eta(\Omega \times A_i)) \geq \inf_{\lambda\geq\mu} \sum_{i=1}^{l} r_i \lambda(A_i) \tag{1}$$

が任意の $r_1, \cdots, r_l \in R$ と互いに交わらない任意の $A_1, \cdots, A_l \in \Sigma$ に対して成り立つこととなり, これは 条件 (GM) と同値である。

証明. 任意の $u \in \mathcal{F}^*$ は $r_1, \cdots, r_l \in R$ と互いに交わらない $A_1, \cdots, A_l \in \Sigma$ を用いて $u = \sum_{i=1}^l r_i \chi_{A_i}$ と表される。これより (GA) が条件 (1) と書き換えられることはすぐわかる。条件 (1) において, $l = 1, r_1 = 1, A_1 = U$ とすれば, 条件 (1) の右辺は $\mu(U)$ であり, $U \times \overline{U}$ 上で $\tau$ に等しく $\overline{U} \times U$ 上で 0 であるような $K$ に属する signed measure を考えると, 条件 (1) の左辺は $\tau(U \times \overline{U})$ に等しいことがわかる。よって条件 (1) から条件 (GM) が導かれる。

次に条件 (GM) から条件 (1) が導かれることを示す。まず,

$$\inf_{\lambda\geq\mu} \sum_{i=1}^{l} r_i \lambda(A_i) = \begin{cases} \sum_{i=1}^l r_i \mu(A_i) & r_1, \cdots, r_l \geq 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。よって各 $r_i$ は非負とし, $0 < r_1 < \cdots < r_l$ としてよい。$r_0 = 0$ とおき, $A_0 = \Omega - \sum_{i=1}^l A_i$ とすると,

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq\eta\leq\tau} \sum_{i=1}^{l} r_i(\eta(A_i \times \Omega) - \eta(\Omega \times A_i)) &= \sup_{0\leq\eta\leq\tau} \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l} r_i(\eta(A_i \times A_j) - \eta(A_j \times A_i)) \\ &= \sup_{0\leq\eta\leq\tau} \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l} (r_j - r_i)\eta(A_j \times A_i) = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=i+1}^{l} (r_j - r_i)\tau(A_j \times A_i) \end{aligned}$$

となる。$N_i = \{x \in \Omega;\ u(x) \geq r_i\} = A_i \cup \cdots \cup A_l$, $N_0 = \Omega, N_{l+1} = \emptyset$ とおくと

$$\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=i+1}^{l} (r_j - r_i)\tau(A_j \times A_i) = \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=i+1}^{l} (r_j - r_i)\tau((N_j - N_{j+1}) \times (N_i - N_{i+1}))$$

である。 ここで各 $i=1,\ldots,l$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=i+1}^{l}(r_j-r_i)\tau((N_j-N_{j+1})\times(N_i-N_{i+1}))\\
&\quad=\sum_{j=i+1}^{l}(r_j-r_i)\tau(N_j\times(N_i-N_{i+1}))-\sum_{j=i+2}^{l+1}(r_{j-1}-r_i)\tau(N_j\times(N_i-N_{i+1}))\\
&\quad=\sum_{j=i+1}^{l}(r_j-r_{j-1})\tau(N_j\times(N_i-N_{i+1}))
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=i+1}^{l}(r_j-r_i)\tau(A_j\times A_i)=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=i+1}^{l}(r_j-r_{j-1})\tau(N_j\times(N_i-N_{i+1}))\\
&\quad=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=0}^{j-1}(r_j-r_{j-1})\tau(N_j\times(N_i-N_{i+1}))=\sum_{j=1}^{l}(r_j-r_{j-1})\tau(N_j\times(\Omega-N_j))
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{l}r_i\mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{l}r_i\mu(N_i-N_{i+1})\\
&=\sum_{i=1}^{l}r_i\mu(N_i)-\sum_{i=1}^{l}r_i\mu(N_{i+1})=\sum_{i=1}^{l}(r_i-r_{i-1})\mu(N_i)
\end{aligned}$$

となるので, 条件 (GM) の $U$ を各 $N_1,\cdots,N_l$ として条件 (GM) を適用すると

$$\sum_{i=1}^{l}r_i\mu(A_i)\le\sum_{j=1}^{l}(r_j-r_{j-1})\tau(N_j\times(\Omega-N_j))$$

がわかる。よって条件 (GM) から条件 (1) が導かれる。(証明終わり)

**5.** Abstract formulation のベクトル場による feasibility problem への応用

$\Omega$ は $R^n$ の有界領域で, その境界 $\partial\Omega$ は Lipschitz 条件を満たすとする。$\Omega$ の各点 $x$ に対して $\Gamma(x)$ は $R^n$ の原点を含む有界閉凸集合とし, そのグラフ $\{(x,w);\ w\in\Gamma(x),\ x\in\Omega\}$ が有界可測であるとする。

応用 1. ここでは, 3 節で述べた問題の一般化も考慮して, 以下のように定める。

- $\mathcal{E}=L^\infty(\Omega;R^n)$, $\mathcal{E}^*=L^1(\Omega;R^n)$
- まず $\mathcal{F}^*=W^{1,1}(\Omega)$ とし, $W^{1,1}(\Omega)$ のノルム位相に関する双対空間を $\mathcal{F}$ とする。ただし,$W^{1,1}(\Omega)=\{u\in L^1(\Omega);\ \nabla u\in L^1(\Omega;R^n)\}$ で, $W^{1,1}(\Omega)$ のノルムは $u$ および $\nabla u$ の $L^1$ - ノルムの和とする。
- $\sigma\in\mathcal{E}$, $u\in\mathcal{F}^*$ に対し, $\langle T\sigma,u\rangle=\int_\Omega\sigma\cdot\nabla u dx$ とすることにより, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への線形写像 $T$ を定義できる。

- $K = \{\sigma \in \mathcal{E};\ \sigma(x) \in \Gamma(x)$ a.e. $x \in \Omega\}$ とする
- $X$ は $L^n(\Omega)\times L^\infty(\partial\Omega)$ の通常の weak* 位相に関する閉凸集合で, $\{F \in L^n(\Omega);\ (F,f) \in X$ for some $f \in L^\infty(\partial\Omega)\}$ は $L^n(\Omega)$ で有界とする。

ここで, $(F,f) \in L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega)$ と $u \in W^{1,1}(\Omega)$ に対して $\langle (F,f),u\rangle = \int_\Omega Fudx + \int_{\partial\Omega} f\gamma uds$ とおくことにより, $(F,f)$ は $\mathcal{F}$ の要素と見なせるから, $X$ は $\mathcal{F}$ の凸集合と見なせる。ただし, $\gamma u$ は $u$ の $\partial\Omega$ 上の trace で, ここでは $\{\gamma u;\ u \in W^{1,1}(\Omega)\} = L^1(\partial\Omega)$ であることを用いた。このとき, $K$ は $\mathcal{E}$ の compact 凸集合で, $T$ は $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への連続線形写像である。

補題 2. $X$ は $\mathcal{F}$ の閉凸集合である。

証明. $\{(F_i, f_i)\} \subset X$ が $\varphi \in \mathcal{F}$ に $\mathcal{F}$ の位相で収束するとすると,

$$\langle (F_i, f_i), u\rangle = \int_\Omega F_i udx + \int_{\partial\Omega} f_i\gamma uds \to \langle \varphi, u\rangle$$

が任意の $u \in W^{1,1}(\Omega)$ で成り立つ。ここで $\varphi \in X$ を示したいが, 仮定により $\{F_i\}$ のある部分ネットがある $F \in L^n(\Omega)$ に弱収束するので $\{F_i\}$ 自身が $F$ に弱収束すると仮定してよい。すると,

$$\int_{\partial\Omega} f_i\gamma uds \to \langle \varphi, u\rangle - \int_\Omega Fudx$$

が成り立つ。

この右辺の定める $\mathcal{F}$ の要素を $\tilde{\varphi}$ とおくと, $\langle \tilde{\varphi}, u\rangle$ は $\gamma u$ にのみ関係するから, $\tilde{\varphi}$ は $W^{1,1}(\Omega)/W_0^{1,1}(\Omega)$ 上の連続線形汎関数とみなせ, $W^{1,1}(\Omega)/W_0^{1,1}(\Omega) \cong L^1(\partial\Omega)$ だからある $f \in L^\infty(\partial\Omega)$ を用いて

$$\langle \tilde{\varphi}, u\rangle = \int_{\partial\Omega} f\gamma uds$$

と表される。ただし, $W_0^{1,1}(\Omega)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ の $W^{1,1}(\Omega)$ での閉包である。

このとき $f_i \to f$ が成り立ち, $X$ は $L^n(\Omega) \times L^\infty(\partial\Omega)$ の閉凸集合だから $(F,f) \in X$ であり, $(F,f)$ を $\mathcal{F}$ の要素とみて $\varphi$ と一致するから $\varphi \in X$ となり, $X$ は $\mathcal{F}$ の閉集合である。(証明終わり)

以上により, この場合も命題 1 の仮定が満たされ, ベクトル場を用いた feasibility problem

$$\text{(FPC)}\quad \text{Find } \sigma \in L^\infty(\Omega; R^n) \text{ such that } \sigma(x) \in \Gamma(x) \text{ a.e. } x \in \Omega,\ (-\operatorname{div}\sigma, \sigma\cdot\nu) \in X$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\text{(GC}'\text{)}\qquad \sup_{\sigma\in K}\int_\Omega \sigma\cdot\nabla udx \geq \inf_{(F,f)\in X}\left(\int_\Omega Fudx + \int_{\partial\Omega} f\gamma udx\right)$$

が任意の $u \in W^{1,1}(\Omega)$ に対して成り立つことであることが導かれる。

さて, この (GC$'$) を, (GC) のような特性関数だけを用いたものに置き換えるには, $X$ に制限が必要なのはもちろんであるが, $\Gamma$ にも連続性の条件が必要である。

補題3．$\Gamma$ が $\Omega$ から $R^n$ の compact set からなる族への写像として, Hausdorff の位相に関して連続であるとする。このとき,

$$X = \{(F, f) \in \mathcal{F};\ F = 0 \text{ on } \Omega,\ f = 0 \text{ on } \ \partial\Omega - (A \cup B),\ f \geq -a \text{ on } A, f \geq b \text{ on } \ B\}$$

とすると, (FPC) は3節の (SDC) の形であり, さらに, 上の条件 (GC′) は次の (GC) と同値である。

$$\text{Condition(GC)} \quad C(S) \geq \int_{B\cap\partial^* S} bds - \int_{A\cap\partial^* S} ads \quad \text{for all S} \subset \Omega \text{ with } \chi_S \in BV(\Omega)$$

ここで, $BV(\Omega)$ は, 超関数の意味の偏導関数が有界変動測度と見なせるような $\Omega$ 上の可積分関数全体で, $\chi_S \in BV(\Omega)$ となる $S \subset \Omega$ に対して定まる reduced boundary $\partial^* S$ を用いて $C(S) = \int_{\partial^* S\cap\Omega} \beta(-\nu_S, \cdot)ds$ とする。$S$ 上の外向き単位法線ベクトルも Federer の意味で定まるので, これを $\nu_S$ とし, $\beta(v, x) = \sup_{w\in\Gamma(x)} v \cdot w$ である。

証明. $u \in W^{1,1}(\Omega)$ に対して

$$\sup_{\sigma\in K} \int_\Omega \sigma \cdot \nabla u dx = \int_\Omega \beta(\nabla u, x)dx$$

と表されることは, 集合値写像の measurable selection に関する定理から示される。

まず, $\cap_{x\in\Omega}\Gamma(x)$ が原点の近傍を含むとする。このとき $\Gamma$ に関する連続性の条件のもとでは, [6, Lemma 2.6] により $u \in BV(\Omega)$ に対して

$$\sup_{\sigma\in K\cap C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega \sigma \cdot \nabla u dx = \int_\Omega \beta(\nabla u/|\nabla u|, x)d|\nabla u|$$

となり, reduced boundary の性質から $\chi_S \in BV(\Omega)$ のとき

$$\int_\Omega \beta(\nabla\chi_S/|\chi_S|, x)d|\nabla\chi_S| = \int_{\partial^* S\cap\Omega} \beta(-\nu_S, \cdot)ds$$

である。そこで, $C(\nabla u) = \int_\Omega \beta(\nabla u/|\nabla u|, x)d|\nabla u|$ として, $\sup_{\sigma\in K} \int_\Omega \sigma \cdot \nabla u dx$ のかわりに $C(\nabla u)$ を考えると, [6, Lemma 2.10] により条件 (GC′) は $u \in BV(\Omega)$ まで拡張できる。

一方, $A \cup B$ 上で $\gamma u \geq 0$ ならば

$$\inf_{(F,f)\in X} \left(\int_\Omega Fudx + \int_{\partial\Omega} f\gamma uds\right) = \inf_{(F,f)\in X} \left(\int_{A\cup B} f\gamma uds\right) = \int_B b\gamma uds - \int_A a\gamma uds$$

であり, $u = \chi_S \in BV(\Omega)$ の場合には

$$\int_{B\cap\partial^* S} bds - \int_{A\cap\partial^* S} ads$$

に一致する。従って, 条件 (GC′) を $u = \chi_S$ に制限すると 条件 (GC) が得られる。

$\cap_{x\in\Omega}\Gamma(x)$ が原点の近傍を含まないときには, $\Gamma(x) + \overline{B(0, r)}$ $(r > 0)$ を考え, $r \downarrow 0$ とすることにより (GC′) と解の存在の同値性を使ってやはり (GC′) から (GC) を示すことができる。

次に, 条件 (GC) から条件 (GC$'$) を導く。$u \in BV(\Omega)$ に対して $N_t = \{x \in \Omega;\ u(x) \geq t\}$ とおくと, ほとんどすべての $t$ で $\chi_{N_t} \in BV(\Omega)$ であることが知られている。[6, Proposition 2.4] により $C(\nabla u) = \int_{-\infty}^{\infty} C(N_t)dt$ が成り立つ。また, $\{x \in A \cup B;\ \gamma u(x) < 0\}$ の測度が正ならば条件 (GC$'$) の右辺は $-\infty$ であるから $A \cup B$ 上で $\gamma u(x) \geq 0$ a.e. であるとしてよく, そのとき

$$\int_B b\gamma u ds - \int_A a\gamma u ds = \int_0^{\infty} \left( \int_{B\cap\partial^* N_t} bds - \int_{A\cap\partial^* N_t} ads \right)$$

が成り立つ（cf. [6, Lemma 4.6]）。各 $N_t$ $(t > 0)$ に対して条件 (GC) を適用して

$$\begin{aligned} C(\nabla u) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(N_t)dt \geq \int_0^{\infty} C(N_t)dt \\ &\geq \int_0^{\infty} \left( \int_{B\cap\partial^* N_t} bds - \int_{A\cap\partial^* N_t} ads \right) = \int_B b\gamma u ds - \int_A a\gamma u ds \end{aligned}$$

が得られる。これで条件 (GC$'$) が示されたことになる。（証明終わり）

応用 2. 条件 (GC) の変形について述べる。これは, min – cut problem の relaxation と関連している。以下のようにおく。

- $\mathcal{E} = L^{\infty}(\Omega; R^n) \times L^{\infty}(\partial\Omega)$, $\mathcal{E}^* = L^1(\Omega; R^n) \times L^1(\partial\Omega)$.
- $\mathcal{F}^* = W^{1,1}(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ とし, $W^{1,1}(\Omega)$ の通常のノルム位相に関する双対空間を $W^{1,1}(\Omega)^*$ として, $\mathcal{F} = W^{1,1}(\Omega)^* \times L^{\infty}(\partial\Omega)$ とする。
- $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への線形写像 $T$ を $\langle T(\sigma,\psi),(u,\varphi)\rangle = \int_\Omega \sigma\cdot\nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \psi(\gamma u - \varphi)ds$ によって定める。($(\sigma,\psi) \in \mathcal{F}$, $(u,\varphi) \in \mathcal{F}^*$)
- 与えらた $\alpha, \beta \in L^{\infty}(\partial\Omega)$ に対して, $K = \{(\sigma,\psi) \in \mathcal{E};\ \sigma(x) \in \Gamma(x)$ a.e. $x \in \Omega,\ \alpha \leq \psi \leq \beta$ a.e. on $\partial\Omega\}$ とおく

$X$ を $L^n(\Omega) \times L^{\infty}(\partial\Omega) \times L^{\infty}(\partial\Omega)$ の凸集合で, $\mathcal{F}$ の部分集合とみなしたときに閉集合であるとする。このとき, 以上の設定を (FP) に適用すると, 条件 (CA) は

$$\text{(GCR}'\text{)} \qquad \begin{aligned} &\sup_{(\sigma,\psi)\in K} \left( \int_\Omega \sigma\cdot\nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \psi(\gamma u - \varphi)dH_{n-1} \right) \\ &\leq \inf_{(F,f,g)\in X} \left\{ \int_{\partial\Omega} Fudx + \int_{\partial\Omega} f\gamma u ds + \int_{\partial\Omega} g\varphi ds \right\} \quad \text{for all } (u,\varphi) \in \mathcal{F}^* \end{aligned}$$

となる。この場合, $\sigma\cdot\nu$ にも制約をもつ feasibility problem を表すことになるが, $M = \sup\{|w|;\ w \in \cup_{x\in\Omega}\Gamma(x)\}$ に対して $\alpha = -M, \beta = M$ ならば, $\sigma\cdot\nu$ に関する制約は実質上意味をもたない。

また, $T(\sigma,\psi) \in X$ は $(-\mathrm{div}\,\sigma, \sigma\cdot\nu - \psi, -\psi) \in X$ と同値であり, $\tilde{X} \subset L^n(\Omega) \times L^{\infty}(\partial\Omega)$ が与えられたとして $X = \{(F,f,g); f = 0,\ (F,g) \in \tilde{X}\}$ を考えると, 先に述べた (FPC) の形になる。さらに, 条件 (GCR$'$) は, $\gamma u = \varphi$ であるような $(u,\varphi)$ に制限すると (GC$'$) に一致する。

**6.** Abstract max-flow problem

抽象化された feasibility theorem に対応する max-flow problem とその双対は形式的に次のようになる。

$$\text{(MFA)} \qquad \text{Maximize} \quad r \text{ subject to } \ \sigma \in K,\ T(\sigma) \in rX$$
$$\text{(MFA}^*\text{)} \qquad \text{Minimize} \quad \sup_{\sigma\in K}\langle T(\sigma), u\rangle \text{ subject to } \ u \in \mathcal{F},\ \inf_{\varphi\in X}\langle \varphi, u\rangle \geq 1$$

(MFA), (MFA*) の値をそれぞれ $MFA$, $MFA^*$ と記す。

命題 2．(FP) において, $X$ を任意の正の数 $t$ に対する $tX$ で置き換えて, (FP) の解の存在と条件 (GA) の同値性が成立するならば, $MFA = MFA^*$ が成り立ち, この値が有限ならば (MFA) は最適解をもつ。

証明. $\sigma \in K,\ T(\sigma) \in rX,\ u \in \mathcal{F},\ \inf_{\varphi\in X}\langle \varphi, u\rangle \geq 1$ とすると,

$$r \leq r \inf_{\varphi\in X}\langle \varphi, u\rangle = \inf_{\varphi\in rX}\langle \varphi, u\rangle \leq \langle T(\sigma), u\rangle$$

により $MFA \leq MFA^*$ である。

$MFA \geq MFA^*$ を示す。$MFA^* \geq r$ とする。$\inf_{\varphi\in rX}\langle \varphi, u\rangle \leq \sup_{\sigma\in K}\langle T(\sigma), u\rangle$ となり, $rX$ に対して (GA) が成り立つので (FA) に解が存在する。その解を用いて $r \geq MFA$ がわかる。従って $MFA \geq MFA^*$ である。よって $MFA = MFA^*$ であり, この値が有限値ならば $MFA^* = r$ にこの論法を適用して (MFA) に最適解が存在することがわかる。(証明終わり)

以下ではこの命題を用いて, いくつかの max-flow min-cut theorem を導く。

応用 1．測度論に基づく max–flow min–cut theorem

$(\Omega, \Sigma)$ を可測空間とし, $\tau$ を $(\Omega\times\Omega, \Sigma\otimes\Sigma)$ 上の有限な正測度とし, $A, B \in \Sigma$, $A\cap B = \emptyset$ とする。$\mathcal{E}, \mathcal{E}^*, \mathcal{F}, \mathcal{F}^*, T, K$ を 2 節と同じとし,

$$X = \{\lambda;\ \lambda(U) = 0 \text{ for all } U \in \Sigma, U \subset \Omega - (A\cup B), \lambda(A) = 1, \lambda \geq 0 \text{ on } \ A\}$$

とおく。これに (MFA) と (MFA*) を適用して測度論的な max – flow min –cut theorem が得られる:

命題 3．次のふたつの値は等しく, $MFM$ は最適解をもつ。

$$\begin{aligned} MFM &= \sup\{\eta(A\times\Omega) - \eta(\Omega\times A);\ 0 \leq \eta \leq \tau, \\ &\qquad \eta(U\times\Omega) - \eta(\Omega\times U) = 0 \text{ for all } U \in \Sigma \text{ s.t. } U \subset \Omega - (A\cup B), \\ &\qquad \eta(U\times\Omega) - \eta(\Omega\times U) \geq 0 \text{ for all } U \in \Sigma \text{ s.t. } U \subset A\} \\ MCM &= \inf\{\tau(U\times\overline{U});\ U\in\Sigma, U \supset A,\ U\cap B = \emptyset\} \end{aligned}$$

証明. (MFA) から $MFM$ の形が得られることはすぐわかる。一方, 4 節補題 1 でみたように, $g = \sum_{j=1}^{l} r_j \chi_{A_j} \in \mathcal{F}^*$ に対し, $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_l$, $N_j = \{x \in \Omega;\ g(x) \geq r_j\}$ とす

ると, $\sup_{\eta\in K}\langle T(\eta),g\rangle=\sum_{j=1}^{l}(r_j-r_{j-1})\tau(N_j\times(\Omega-N_j))$ である。さらに, $g$ が $B$ 上で恒等的に 0 のとき

$$\inf_{\lambda\in X}\langle\lambda,g\rangle=\inf_A g=\sum_{j=1}^{l}(r_j-r_{j-1})(r_j-r_{j-1})\inf_A \chi_{N_j}$$

が示され, そうでないときは $\inf_{\lambda\in X}\langle\lambda,g\rangle=-\infty$ なので, これを利用すれば (MFA*) から $MCM$ の形も導ける。(証明終わり)

応用 2. ベクトル場による max – flow min –cut theorem

$\mathcal{E},\mathcal{E}^*,\mathcal{F},\mathcal{F}^*,T,K$ を 5 節の応用 1 と同じとし,

$$X=\{(F,f)\in\mathcal{F};\ F=0 \text{ on } \Omega,\ f=0 \text{ on } \ \partial\Omega-(A\cup B),\ \int_A f ds=1\}$$

とおく。これに (MFA) と (MFA*) を適用するとベクトル場を用いた max-flow min-cut theorem が次のように成り立つ。

命題 4. 次の $MFC$ と $MFC^*$ は等しく, $MFC$ は最適解をもつ。

$$\begin{aligned}MFC &= \sup\{\int_A \sigma\cdot\nu ds;\ \sigma\in\Gamma(x),\ \text{for a.e. } x\in\Omega\\ &\qquad -\operatorname{div}\sigma=0 \text{ a.e. on } \Omega,\ \sigma\cdot\nu=0 \text{ a.e. on } \partial\Omega-(A\cup B)\}\\ MFC^* &= \inf\{C(\nabla u);\ u\in W^{1,1}(\Omega),\ \gamma u=1 \text{ a.e. on } A, \gamma u=0 \text{ a.e. on } B\}\end{aligned}$$

証明. 5 節補題 3 にも記したように $\sup_{\sigma\in K}\int_\Omega\sigma\cdot\nabla u dx=\psi(u)(=C(\nabla u))$ である。また, $\gamma u$ が $A$ 上で定数で, $B$ 上で 0 のとき, $\inf_{(F,f)\in X}(\int_\Omega Fudx+\int_{\partial\Omega}f\gamma udx)$ は $\gamma u$ の $A$ 上での値と等しく, そうでないときは $-\infty$ である。これらから補題が示される。(証明終わり)

$\Gamma$ が連続性の条件を満たすとき, feasibility problem の場合と同様に, 双対問題の $u$ を $BV(\Omega)$ に属する特性関数におきかえて min-cut problem を得る。

応用 3. ベクトル場による max – flow min –cut theorem (a relaxed version)

$\mathcal{E},\mathcal{E}^*,\mathcal{F},\mathcal{F}^*,T,K$ を 5 節の応用 2 と同じとし,

$$\begin{aligned}X=\{(F,f,g)\in\mathcal{F};\ F=0 \text{ on } \Omega,\ f=0 \text{ on } \ \partial\Omega,\\ g=0 \text{ on } \ \partial\Omega-(A\cup B),\ \int_A g ds=1\}\end{aligned}$$

とする。

命題 5. 次の $MFR$ と $MFR^*$ は等しく, $MFR$ は最適解をもつ。

$$\begin{aligned}MFR &= \sup\{\int_A \sigma\cdot\nu ds;\ \sigma\in\Gamma(x) \text{ for a.e. } x\in\Omega,\\ &\qquad -\operatorname{div}\sigma=0 \text{ a.e. on } \Omega,\ \sigma\cdot\nu=0 \text{ a.e. on } \partial\Omega-(A\cup B),\\ &\qquad \alpha\le-\sigma\cdot\nu\le\beta \text{ a.e. on } \partial\Omega\}\\ MFR^* &= \inf\{C(\nabla u)+\int_{\partial\Omega}\alpha(\gamma u-\varphi)^- ds+\int_{\partial\Omega}\beta(\gamma u-\varphi)^+ ds;\\ &\qquad u\in W^{1,1}(\Omega),\ \varphi\in L^1(\partial\Omega),\ \varphi=1 \text{ a.e. on } A, \varphi=0 \text{ a.e. on } B\}\end{aligned}$$

証明. (MFA) がこの設定で $MFR$ の形であることはすぐわかる。また,

$$\sup_{(\sigma,\psi)\in K}\int_\Omega\left(\sigma\cdot\nabla u dx+\int_{\partial\Omega}\psi(\gamma u-\varphi)dH_{n-1}\right)$$
$$=C(\nabla u)+\int_{\partial\Omega}\alpha(\gamma u-\varphi)^- ds+\int_{\partial\Omega}\beta(\gamma u-\varphi)^+ ds$$

であり, $\varphi$ が $A$ 上で定数 $r$ に等しく $B$ 上で $\varphi=0$ ならば

$$\inf_{(F,f,g)\in X}\left(\int_\Omega F u dx+\int_{\partial\Omega} f\gamma u dx+\int_{\partial\Omega} g\varphi dx\right)=\inf_{(F,f,g)\in X}\int_A g\varphi dx=r$$

で, そうでなければ この式の左辺は $-\infty$ となるので (MFA*) も $MFR^*$ の形になることがわかる。(証明終わり)

## 参考文献


[1] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[2] B. Fuchssteiner and W. Lusky. *Convex Cones.* Mathematical Studies 56. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981.

[3] D. Gale. A theorem on flows in networks. *Pacific J. Math.*, 7:1073–1082, 1957.

[4] M. Iri. Theory of flows in continua as approximation to flows in networks. In A. Prekopa, editor, *Survey of Math. Programming*, pages 263 – 278, Amsterdam, The Netherlands, 1979. Mathematical Programming Society, North-Holland.

[5] R. Kohn and R. Temam. Dual spaces of stresses and strains with applications to hencky plasticity. *Appl. Math. Optim.*, 10:1 – 35, 1983.

[6] R. Nozawa. A max–flow min–cut theorem in an anisotropic network. *Osaka J. Math.*, 27:805 – 842, 1990.

[7] R. Nozawa. A continuous version of gale's feasibility theorem. 数理解析研究所講究録, 945:83 – 92, 1996.

[8] R. Nozawa. Gale's feasibility theorem and max – flow problems in a continuous network. 数理解析研究所講究録, 1031:29 – 41, 1998.

[9] W. Oettli and M. Yamasaki. On gale's feasibility theorem for certain infinite networks. *Arch. Math. (Basel)*, 62:378 – 384, 1994.

[10] G. Strang. Maximal flow through a domain. *Mathematical Programming*, 26:123 – 143, 1983.