数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 134-137

q-変形ハイポ正規作用素について

九州芸術工科大学　太田　昇一 (Schôichi Ôta)
Department of Art and Information Design,
Kyushu Institute of Design

0. ヒルベルト空間上の稠密な定義域を持つ閉作用素 T で

$$TT^* = qT^*T$$

を満たす作用素は、q-正規作用素といわれる（ここで q は 1 ではない正数）。閉作用素 T が q-正規なるための条件は

$$D(T) = D(T^*)$$

$$\|T^*\eta\| = \sqrt{q}\,\|T\eta\| \qquad (\eta \in D(T))$$

である。この作用素 T に関して：

イ)　自明でない T は必ず非有界になる。

ロ)　T と qT はユニタリー同値になる。

ハ)　T のスペクトラムは十分大きい：

$$|\sigma(T)|_2 = \infty$$

（ただし、$|\bullet|_2$ は 2 次元ルベーグ測度）

ニ)　$T = T_1 + iT_2$ を Cartesian 分解とすると、T_1, T_2 は必ず閉対称作用素になり、各解析的要素の集合は一致する。

といった性質がある（参照：pp. 53-57［数理研講究録 1131］)。この作用素が満たす代数的な関係式は量子群の理論に現れている。それに関係して非有界表現を将来研究する際には、上記の代数的な関係式に支配された（を満たす）ヒルベルト空間上の作用素を研究することが必要不可欠になる。

一方、量子群の理論に関連して、調和振動子の q-変形の一つとして

$$xx^* - qx^*x = 1$$

なる関係に基づくものがあります。これを含むクラスとして、稠密な定義域を持ち、 $D(T) \subseteq D(T^*)$

かつ $\|T^*\eta\| \le \sqrt{q}\,\|T\eta\| \quad (\eta \in D(T))$

を満たす作用素（q-変形ハイポ正規という）を考える。この q-変形ハイポ正規作用素は有界になる場合（この時は、必ず q は1より大きくなる）が起こりますし、有界作用素の立場からも興味ある現象が起きている。例えば、有界作用素の場合と同じように q-変形ハイポ正規と q-正規の間に、q-クエーサイ正規という概念が自然に導入されるが、有界な q-クエーサイ正規作用素は必ずクエーサイ零因子になる。

1. q-変形ハイポ正規は以下のような性質を持ちます。

定理　$0<q<1$ とし、non-trivial な閉作用素 T が q-変形ハイポ正規と仮定する。この時以下のことが成り立つ：

（1）　T は非有界である。

（2）　T のスペクトラム $\sigma(T)$ は 0 を含み、点スペクトラムは 0 だけからなるか、空集合である。

（3）　T のスペクトラムの大きさについては

$$|\sigma(T)|_2 > 0$$

（参考：$q>1$ の場合は $\sigma(T)=\{0\}$ なる q-変形ハイポ正規作用素がある）。

次に、q-変形ハイポ正規作用素 T の Cartesian 分解 $T=T_1+iT_2$ を考える：即ち、T_1 と T_2 は以下のように与えられる

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \qquad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

（この時、T_1 と T_2 はそれぞれ symmetric 作用素で定義域は一致しており、それぞれ T の実部、虚部といわれる）。

定理　$0<q<1$ とする。この時、閉 q-変形ハイポ正規作用素 T の実部、虚部は常に閉作用素である。

2.　よく知られているように、T_1 と T_2 をヒルベルト空間 H 上の（非有界又は有界）正規作用素とし、B を H 上の有界作用素とするとき、

$$BT_1 \subset T_2 B \;\Rightarrow\; BT_1^* \subset T_2^* B$$

が成り立つ（Fuglede-Putnam の定理）。

ここに、記号 $T_1 \subset T_2$ の意味は T_2 が T_1 の作用素としての拡張になっていることを示す。

しかし、T_1 と T_2 が q-正規作用素ならば、一般に上記は成り立たない。実際、$T_1 = T_2$ として、q-正規 bilateral weighted shift を考えると、有界作用素 B がスカラーでなければ、上の二つの式は同時には成り立たない。

一方、H 上の q-正規作用素 T の極分解を

$$T = U|T|$$

としたとき、

$$K_T = (U^*)^2$$

とすると、K_T は H 上の部分的等距離作用素になり、次の関係式を満たす事が示せる：

$$K_T(qT) = TK_T \quad 、$$
$$K_T(qT^*) \subset T^* K_T \quad 。$$

次に$\{K_T\}'$をK_Tの可換子とする。

命題　Tをヒルベルト空間H上のq-正規作用素とし、Bを$\{K_T\}'$の元とする。このとき

$$B(qT) \subset TB \;\Rightarrow\; B(qT^*) \subset T^* B$$

が成り立つ。

しかし、狭いクラスの作用素でしか上記の関係が成り立たない事が以下の定理より判る。

定理　Tをヒルベルト空間H上のq-正規作用素とするとき、

$$B(qT) \subset TB, \text{ and } \; B(qT^*) \subset T^* B$$

を満たすH上の有界作用素BはK_Tの可換子$\{K_T\}'$に属する。