数理解析研究所講究録
1189巻 2001年 17-22

シフト作用素の数域半径による正値三角多項式の係数の評価

山形大学大学院 理工学研究科 植田 靖典 (Yasunori Ueda)
Graduate School of Science and Engineering
Yamagata Univ.

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線形作用素Tの数域半径 (numerical radius) は,

$$w(T) := \sup_{\|\xi\|=1} |\langle T\xi, \xi\rangle|$$

で与えられる. U. Haagerup, P. de la Harpe は [2] に於いて, 巾零な $T(\neq 0)$ の数域半径について研究し, 特に N 次元シフト作用素

$$S_N = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の場合について, 以下の結果を得ている.

Theorem A

$w(S_N) = \cos\frac{\pi}{N+1}$ であり, unit vector $\alpha \in \mathbb{C}^N$ について,

$$\langle S_N\alpha, \alpha\rangle = \cos\frac{\pi}{N+1} \Leftrightarrow \alpha = e^{i\varphi}\xi_0 \text{ for some } \varphi \in [0, 2\pi)$$

ここに,

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cdot \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{N+1} \\ \sin\frac{2\pi}{N+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{N\pi}{N+1} \end{bmatrix}$$

又，[2] に於いては Theorem A の応用として，Fejér-Riesz による正値三角多項式の係数評価に関する古典的結果 [1] に対し，S_N の数域半径に注目した新しいアプローチが為され，以下が得られている。

Theorem B

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \alpha_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

を正値 (i.e. $\tau(e^{i\theta}) \geqq 0$ for all $\theta \in [0, 2\pi)$) かつ $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_{N-1} \neq 0$ なる三角多項式とし，$N \geqq 2$ とするとき，

$$|\alpha_1| \leqq \alpha_0 \cos\frac{\pi}{N+1}.$$

更に上で等号の成立するとき，

$$\tau(e^{i\theta}) = \frac{2\alpha_0}{N+1}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{N+1}\right)e^{ik\theta}\right|^2.$$

さて，[2] に於いては Theorem B で与えられた三角多項式 τ に関して係数 α_1 のみ評価しているが，他の係数 α_k $(1 \leqq k \leqq N-1)$ について，その評価及び等号成立に伴う τ の form の特徴付けに関する結果が得られたので，それらについて以下に述べる．尚，τ が正値のときは，$\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$ $(1 \leqq k \leqq N-1)$ であるゆえ，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N-1}$ について調べれば十分である。$k \geqq 2$ の場合の α_k を評価する際，Theorem A と同様の結果を $(S_N)^k$ について考察する必要がある。

Lemma C

$N \geqq 2$，$1 \leqq n \leqq N-1$ とする。

(i) $w((S_N)^n) = \cos\dfrac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1}$，ここで $\left(\frac{N}{n}\right)$ は、以下により定める：

$$\left(\frac{N}{n}\right) := \begin{cases} \dfrac{N}{n} & \cdots\ n \text{ が } N \text{ を割り切るとき} \\ \left[\dfrac{N}{n}\right]+1 & \cdots\ n \text{ が } N \text{ を割り切らないとき} \end{cases}$$

(ii) unit vector $\alpha \in \mathbb{C}^N$について,

$$\langle (S_N)^n \alpha, \alpha \rangle = \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1}$$

$$\iff \alpha = P(\beta_1(\xi_1 \otimes \iota_1) + \cdots + \beta_r(\xi_1 \otimes \iota_r))$$

for some $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ with $\sum_{s=1}^r |\beta_s|^2 = 1$.

ここで, rは関係式

$$N = \left(\left(\frac{N}{n}\right)-1\right)\cdot n + r, \quad 1 \leq r \leq n$$

によって一意的に決まる自然数とし, Pは$\mathbb{C}^{\left(\frac{N}{n}\right)} \otimes \mathbb{C}^n$から$\mathbb{C}^N$へのcanonical projection,

$$\iota_p = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ <p \\ \\ \\ \\ \end{array} \in \mathbb{C}^n, \quad \xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{N}{n}\right)+1}} \cdot \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1} \\ \sin \frac{2\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{\left(\frac{N}{n}\right)\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{\left(\frac{N}{n}\right)}$$

である.

上の結果について, nがNを割り切る場合は$\mathbb{C}^{\left(\frac{N}{n}\right)} \otimes \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^N$ゆえ, このときは$P = id_{\mathbb{C}^N}$と考える. 又, $n=1$の場合はTheorem Aとなる.

主定理の証明に際しては次に挙げる, Fejér - Riesz [1] による結果が本質的に重要である. これは[2]に於いて, Theorem Bを示す際にも用いられている.

Lemma D (Fejér - Riesz).

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

を$a_0 \neq 0$なる正値三角多項式とするとき, 正巾のみからなる三角多項式

$$g(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

が存在して，$\tau(e^{i\theta}) = |f(e^{i\theta})|^2$ for all $\theta \in [0, 2\pi)$.

Theorem

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \alpha_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

を正値三角多項式とし，$\alpha_0 \neq 0$，$\alpha_{N-1} \neq 0$ and $N \geqq 2$ とするとき，$1 \leqq n_0 \leqq N-1$ に対し，

$$|\alpha_{n_0}| = \alpha_0 \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1}$$

$\Longleftrightarrow$ $(r-1)$ 次の正巾から成る三角多項式 p，$\varphi \in [0, 2\pi)$ が存在して，

$$\tau(e^{i\theta}) = \alpha_0 \, |(p\,\Psi)(e^{i(\theta-\varphi)})|^2, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

ここで r は等式 $N = ((N/n_0)-1)\cdot n_0 + r$，$1 \leqq r \leqq n_0$ を満たし，Ψ は

$$\Psi(e^{i\theta}) := \left(\frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{(N/n_0)-1} \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1} e^{in_0 j\theta}$$

で与えられる多項式とする．更に，上が成り立つとき，$n \neq n_0$ なる $1 \leqq n \leqq N-1$ に対して，

$$|\alpha_n| < \alpha_0 \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1} .$$

(Proof)

Lemma D により，$f(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\theta}$ で，

$$\tau(e^{i\theta}) = |f(e^{i\theta})|^2 = \sum_{0 \leqq k, l \leqq N-1} c_k \overline{c_l} e^{i(k-l)\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

なるものをとる．

$$S^{(n)} := \begin{cases} (S_N)^n & \cdots \text{if } 1 \leqq n \leqq N-1 \\ I_N & \cdots \text{if } n = 0 \\ (S_N^*)^{|n|} & \cdots \text{if } -(N-1) \leqq n \leqq -1 \end{cases},$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

とそれぞれおくと，

$$\tau(e^{i\theta}) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \langle S^{(n)}\alpha, \alpha\rangle e^{in\theta}.$$

よって,

$$\alpha_n = \langle (S_N)^n \alpha, \alpha\rangle \quad \text{for } 1 \leqslant n \leqslant N-1.$$

Lemma C-(i) により, $\alpha_0 = \|\alpha\|^2 \neq 0$ に注意して,

$$|\alpha_n| = \|\alpha\|^2 \left|\left\langle (S_N)^n \frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right\rangle\right| \leqslant \alpha_0 \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n}\right)+1}$$

以後, 簡単の為 $\alpha_0 = 1$, $\mathrm{Arg}(\alpha_{n_0}) = 0$ と仮定する(必要ならば, τ の代わりに $e^{i\theta} \mapsto \tau(e^{i(\theta - \arg(\alpha_{n_0})/n_0)})$ を考えればよい).

$$\alpha_{n_0} = \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1}$$

とすれば, Lemma C-(ii) より $\sum_{s=1}^{r} |\beta_s|^2 = 1$ なる $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{C}$ が存在して, $\alpha = P\left(\sum_{s=1}^{r} \beta_s (\xi_1 \otimes \iota_s)\right)$. ここで P は $\mathbb{C}^{(N/n_0)} \otimes \mathbb{C}^{n_0}$ から $\mathbb{C}^N$ への canonical projection, unit vector $\xi_1 \in \mathbb{C}^{(N/n_0)}$ の第 k-成分は,

$$\left(\frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{k\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \left(\frac{N}{n_0}\right)$$

である. 従って,

$$c_j = \begin{cases} \beta_s \left(\frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1} & \cdots \text{ if } j = s-1+jn_0, \\ & \quad 0 \leqslant j \leqslant (N/n_0)-1 \text{ and } 1 \leqslant s \leqslant r \\ 0 & \cdots \text{ otherwise} \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \tau(e^{i\theta}) &= \left|\sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\theta}\right|^2 \\ &= \frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1} \left| \sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant (N/n_0)-1 \\ 1 \leqslant s \leqslant r}} \beta_s \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1} e^{i(s-1+jn_0)\theta} \right|^2 \\ &= \frac{2}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1} \left| \left(\sum_{s=0}^{r} \beta_s e^{i(s-1)\theta}\right) \left(\sum_{j=0}^{(N/n_0)-1} \sin \frac{(j+1)\pi}{\left(\frac{N}{n_0}\right)+1} e^{in_0 j\theta}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

$\alpha_{N-1} \neq 0$ より, 最高次の係数を比較して, $\beta_r \neq 0$ を得る.

次に,

$$\alpha_{n_1} = \cos \frac{\pi}{\left(\frac{N}{n_1}\right) + 1}$$

とすると, 直前の議論とLemma C-(ii)により,

$$\alpha = P'\left(\sum_{s=1}^{r'} \beta'_s (\xi'_1 \otimes \iota'_s)\right) \text{ for some } \beta'_1, \ldots, \beta'_{r'} \in \mathbb{C}$$
$$\text{with } \beta'_{r'} \neq 0 \text{ and } \sum_{s=1}^{r'} |\beta'_s|^2 = 1$$

となる. ここで P' は $\mathbb{C}^{(N/n_1)} \otimes \mathbb{C}^{n_1}$ から $\mathbb{C}^N$ へのcanonical projection, r' は等式

$$N = \left(\left(\frac{N}{n_1}\right) - 1\right) \cdot n_1 + r', \quad 1 \leqslant r' \leqslant n_1$$

により決まる. よって,

$$P\left(\sum_{s=1}^{r} \beta_s (\xi_1 \otimes \iota_s)\right) = \alpha = P'\left(\sum_{s=1}^{r'} \beta'_s (\xi'_1 \otimes \iota'_s)\right)$$

であるから成分を比較することにより $n_0 = n_1$ を得る. 則ち, 等号を成り立たしめる $1 \leqslant n_0 \leqslant N-1$ は唯一つとなり, 定理が示された.

参考文献

[1] L. Fejér, Über trigonometrische polynome, J. reine angew Math. 146 (1916), 58–82.

[2] U. Haagerup and P. de la Harpe, The numerical radius of a nilpotent operator on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 115 (1992), 371–379.