数理解析研究所講究録
1189巻 2001年 23-30

行列多項式の数域

Numerical Range of a Matrix Polynomial

中里　博 Hiroshi Nakazato

弘前大学理工学部 Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要

We discuss the numerical range of a matrix polynomial.

The main result of this paper was obtained by a joint work of Mao-Ting Chien and Hiroshi Nakazato.

1　行列多項式の定義

H 複素ヒルベルト空間とし、H における有界線形作用素 $A_n, \ldots, A_1, A_0$ (ただし $A_n \neq 0$) に対し、

$$P(\lambda) = \lambda^n A_n + \ldots + \lambda A_1 + A_0$$

により作用素多項式 operator polynomial $P(\lambda)$ を定める。H が有限次元の場合が、行列多項式 matrix polynomial である。この分野では、"Matrix Polynomials"という本が、I. Gohberg, P. Lancaster, L.Rodman によって1982年に Academic Press より出版されている。二重振り子の問題、微分方程式への応用などがあると言われている。さて、行列多項式 $P(\lambda)$ の数域 $W(P)$ を、

$$\begin{aligned} W(P) &= \{t \in \mathbf{C} :< P(t)\xi, \xi >= 0 \,\mathrm{for\,some}\, \xi \in H, \xi \neq 0\} \\ &= \{t \in \mathbf{C} : 0 \in W(P(t))\} \end{aligned}$$

で定める。

2 不定計量空間における数域などとの関連

$W(P)$ は、複素数平面の空でない閉集合である。$0 \notin W(A_n)$ であることと、$W(P)$ が、有界であることが同値 (Chi-Kwong Li, Rodman) であることが知られている。$W(P)$ の連結成分の個数は、$2n$ 個以下であり、特に $W(A_n)\backslash\{0\}$ が連結ならば、連結成分の個数は、n 個以下である (Li-Rodman)。多項式の次数 $n=1$ で、A_1 が正定値 Hermite 行列の場合

$$W(\lambda A_1 - A_0) = W(\lambda I - A_1^{-1/2} A_0 A_1^{-1/2}) = W(A_1^{-1/2} A_0 A_1^{-1/2})$$

が成り立つ。このような数域を、一般化する形で、$S = A_1$ を、可逆で、S も $-S$ も正定値ではないような Hermite 行列とする。このとき、不定計量

$$[x, y]_S = < S x, y >$$

を用いて

$$W_S(B) = \{[B x, x]/[x, x] : [x, x] \neq 0\}$$

が定義され、Krein 空間における数域と呼ばれる。

$$W_S^+(B) = \{[B x, x]/[x, x] : [x, x] > 0\},$$

$$W_S^-(B) = \{[B x, x]/[x, x] : [x, x] < 0\}$$

が問題とされることもある。ここで、

$$[B x, x]/[x, x] = < S Bx, x > / < Sx, x >$$

であることより、$(0, 0) \notin W(S, S B)$ の場合、

$$W_S(B) = W(S - S B)$$

となる。さて、$\dim H = m$ のとき、数域 $W(B) = W(\lambda I - B)$ は凸領域となるが、それは次のように与えられる。

$$f(x, y) = \det(I_m + (x/2)(B + B^*) + (-i y/2)(B - B^*)) = 0$$

の双対曲線を、$g(x, y) = 0$ とするとき、$W(B)$ は、集合

$$\{x + i y : (x, y) \in \mathbf{R}^2, g(x, y) = 0\}$$

の凸包である。S が、不定の Hermite 行列の場合 $W(\lambda S - A_0)$ は、それ自体凸であるか、2 個の凸集合の和集合となる。$W(\lambda S - A_0)$ の境界上の点 $x_0 + i y_0$ ただし $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ に対しては、$\tilde{g}(x_0, y_0) = 0$ が成り立つ。ここで、$\tilde{g}(x, y) = 0$ は、次のような代数曲線の双対曲線である。

$$\tilde{f}(x,y) = \det(S + (x/2)(A_0 + A_0^*) + (-i\,y/2)(A_0 - A_0^*)) = 0.$$

多項式の次数 $n = 1$ のとき, $0 \notin W(A_1)$ ならば、$W(A_1\lambda - A_0)$ が、単連結 simply connected であると予想される。最近 Psarrakos 氏より、そのことを証明したとの話を聞いた。$0 \in W(A_1)$ の場合は、例えば

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とし、$A_0 = I_2$ とするとき、$W(A_1\lambda - A_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z| \geq 1\}$ となるから、これは単連結ではない。$n = 2$ で、$m = \dim H = 2$ であって、$W(P)$ が連結かつ単連結ではない次のような例が、Psarrakos ら によって構成されている:

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & 4i\,\lambda \\ -4i\,\lambda & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix},$$

に対し、

$$W(P) = R_1 \cup R_2,$$
$$R_1 = [-\sqrt{(13+\sqrt{161})/2}, -\sqrt{(13-\sqrt{161})/2}] \cup [\sqrt{(13-\sqrt{161})/2}, \sqrt{(13+\sqrt{161})/2}],$$
$$R_2 = \{x + iy : (x,y) \in \mathbf{R}^2, 32 - 47x^2 + 16x^4 - 48y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4 \leq 0\}.$$

ここで、R_1 は、実多項式 $< P(\lambda)\xi, \xi >$ の実根であって、R_2 は、この多項式の虚根およびその極限である。R_2 は、環状の閉領域であってその境界は

$$\{x + iy : (x,y) \in \mathbf{R}^2, 32 - 47x^2 + 16x^4 - 48y^2 + 32x^2y^2 + 16y^4 = 0\}.$$

により与えられる。

3 $\dim H = 2$ の場合：2次元球面上の関数としての行列多項式

ここで、 H の次元が 2 の場合、即ち 2×2 行列の多項式の数域を考える場合、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が、$M_2(\mathbf{C})$ の基底であって、Hermite 行列

$$A = \begin{pmatrix} a+d & b+ic \\ b-ic & a-d \end{pmatrix}$$

($a,b,c,d \in \mathbf{R}$) および

$$\xi = (\cos\theta, \sin\theta\exp(i\eta))^T$$

に対し、

$$< A\xi, \xi >= a + d(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2b\sin\theta\cos\theta\cos\eta - 2c\sin\theta\cos\theta\sin\eta$$

$$= a + d\cos(2\theta) + b\sin(2\theta)\cos(\eta) - c\sin(2\theta)\sin(\eta)$$

となる。このように、複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$ の元と ξ をみて、

$$X = \sin(2\theta)\cos(\eta),\ Y = -\sin(2\theta)\sin(\eta),\ Z = \cos(2\theta)$$

と置けば、$(X,Y,Z) \in \mathbf{R}^3$ に対し、$X^2+Y^2+Z^2=1$ であって、$\mathbf{CP}^1$ とこのような実2次元の単位球面を同一視でき、

$$< A\xi, \xi >= a + bX + cY + dZ$$

となる。このような見方により、2×2 行列多項式 $P(\lambda)$ に対し、$< P(\lambda)\xi, \xi >$ を、λ および、$(X,Y,Z) \in \mathbf{S}^2$ を変数とする関数とみることができる。

次数 $n=1$ の場合を特に考える。この場合、$A_1 = I$ のとき、$W(I-A_0) = W(A_0)$ である。同時数域 $W(A_1, A_0)$ が、$(0,0)$ を含めば $W(A_1\lambda - A_0) = \mathbf{C}$ となる。逆は成り立たない。$(0,0) \notin W(A_1, A_0)$ のとき、

$$W(\lambda A_1 - A_0) = \{\frac{< A_0\xi, \xi >}{< A_1\xi, \xi >} : \xi \in \mathbf{C}^2, ||\xi|| = 1\}$$

が成り立つ。$(0,0) \notin W(A_1, A_0)$ であって、$W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ となる例としては、次のようなものがある：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

この場合

$$\{\frac{X+iY}{Z} : (X,Y,Z) \in \mathbf{R}^3, Z \neq 0, X^2+Y^2+Z^2=1\} = \mathbf{C}$$

より、$W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ が言える。A_1 が、Hermite 行列のとき、$W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ となるための必要十分条件は、$(0,0) \in W(A_1, A_0)$ 即ち　$\xi \in \mathbf{C}^2$ で、$\xi \neq 0$ かつ $< A_1\xi, \xi >=<$

$A_0\xi, \xi >= 0$ となるものがあることが同値であることはわかっているが、一般にどのように $W(\lambda A_1 - A_0) = \mathbf{C}$ を特徴づけるべきかは未解決である。

定理 (cf.[Ch-N]) $\dim H = 2$, $n = 1$ とする。領域 $W(A_1\lambda - A_0)$ が、$\mathbf{C}$ とならないとき、その境界 Γ は、４次以下の代数曲線上にある。その代数曲線は、既約ならば、有理曲線であるか楕円曲線である。特に A_1, A_0 に対し、

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & p \end{pmatrix}$$

ならば、$W(A_1\lambda - A_0)$ の境界 Γ は、有理曲線である。すなわち、実数値のふたつの有理関数 $\phi(t)$, $\psi(t)$ を用いて Γ は、$\{(\phi(t), \psi(t) : t \in \mathbf{R}\}$ と表示できる。

2×2 行列の多項式 $P(\lambda)$ の数域 $W(P)$ を求めるにあたって大抵の場合に有効である方法について述べる。先ほど述べた

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & 4i\,\lambda \\ -4i\,\lambda & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix},$$

の場合に内部を含む閉領域 R_2 の境界の方程式を求める方法を述べよう。

$$\xi = (\cos\theta, \sin\theta\exp(i\,\eta))^T$$

に対し、

$$X = \sin(2\theta)\cos(\eta),\ Y = -\sin(2\theta)\sin(\eta),\ Z = \cos(2\theta)$$

と置くとき、上記の $P(\lambda)$ に対し

$$< P(\lambda)\xi, \xi >= \lambda^2 + (3/2) + 4\lambda Y - (1/2)Z$$

であって、ここで、$\lambda = U + iV$ と置けば、方程式 $< P(\lambda)\xi, \xi >= 0$ は、

$$U^2 - V^2 + \frac{3}{2} + 4Y\,U - \frac{1}{2}Z = 0, \tag{1}$$

$$2U\,V + 4Y\,V = 2V\,(U + 2Y) = 0, \tag{2}$$

なる連立方程式で表わされる。ここで、(1) と $Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ から Y を消去して

$$8+12U^2+4U^4-12V^2-8U^2V^2+4V^4+48U\,Y+32U^3Y-32U\,V^2Y+Y^2+64U^2Y^2 = 0, \tag{3}$$

が得られ、(2)　において $V \neq 0$ として、$U + 2Y = 0$ を $(2)'$ とすれば、$(2)'$ と (3) より、Y を消去すれば、

$$32 - 47U^2 + 16U^4 - 48V^2 + 32U^2V^2 + 16V^4 = 0$$

が得られる。

この場合　$< P(\lambda)\xi, \xi >= \lambda^2 + 4Y\lambda - (Z/2) + (3/2) = 0$ は、λ に関する２次方程式だから解の公式より

$$\lambda = -2Y + \epsilon\sqrt{4Y^2 + (Z/2) - (3/2)}$$

$(\epsilon = 1, -1)$ であり、ここで $(Y, Z) \in \mathbf{R}^2$, $Y^2 + Z^2 \leq 1$ である。ここで根号の中味が ≥ 0 となるのは、$(1 - \sqrt{161})/16 \leq Z \leq (1 + \sqrt{161})/16$ であって、Y に対しては $Y \geq \sqrt{(3 - Z)/8}$ または $Y \leq -\sqrt{(3 - Z)/8}$ となるときである。このような Y, Z に対応する λ は実数であるが、上記のような (Y, Z) の集合が２つの連結集合から成るのに対応して２つの区間からなる。(Y, Z) を、$(-Y, Z)$ で置き換えることにより、２個の区間はもう一方を、-1 倍したものであることがわかる。区間の端点は、$Y^2 + Z^2 = 1$ なる (Y, Z) で実現される。一方の区間の上端（最大値）は $\lambda = \sqrt{(13 + \sqrt{161})/2}$ で、下端は、$\sqrt{(13 - \sqrt{161})/2}$ である。

さて、２次の多項式の別の例

$$P(\lambda) = \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 - 5i & (2 - 3i) + i\,(4 - 3i) \\ (2 - 3i) - i\,(4 - 3i) & 1 - 5i \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 6 + 6i & (3 - i) + i\,(-2 + 5i) \\ (3 - i) - i\,(-2 + 5i) & 6 + 4i \end{pmatrix}.$$

を考えよう。上記のような ξ および X, Y, Z に対して, $\lambda = U + iV$ とすると、$< P(\lambda)\xi, \xi >= 0$ は、

$$\lambda^2 + \lambda\,\{(2 - 5i) + (2 - 3i)\,X + (4 - 3i)\,Y + Z\} + (6 + 5i) + (3 - i)\,X + (-2 + 5i)\,Y + i\,Z = 0,$$

即ち次のような連立方程式で表わされる。

$$U^2 - V^2 + (2X + 4Y + Z + 2)\,U + (3X + 3Y + 5)\,V + (3X - 2Y + 6) = 0, \qquad (\sharp)$$
$$2UV + (-3X - 3Y - 5)\,U + (2X + 4Y + Z + 2)\,V + (-X + 5Y + Z + 5) = 0. \qquad (\flat)$$

ここで、この連立方程式の各々の左辺は、X, Y, Z に関しては１次式であることに注目し、この連立方程式を、X, Y について解くことを考える。(U, V) が、円 $6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13 = 0$ 上にないならば、

$$X = \frac{H_1(U, V : Z)}{6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13},$$
$$Y = \frac{H_2(U, V : Z)}{6U^2 + 6V^2 - U + 34V + 13},$$

と表わせる。ここで、

$$H_1(U, V : Z) = -40 + 38U - 19U^2 + 3U^3 - 38V - 4UV + 4U^2V - 9V^2 + 3UV^2 + 4V^3 - 2Z$$

$$-U\,Z+3U^2\,Z+V\,Z+3V^2Z,$$

$$H_2(U,V:Z)=-21-15U+3U^2-3U^3-14V-6U\,V-2U^2\,V+5V^2-3U\,V^2-2V^3-3Z$$
$$-3U\,Z-3U^2\,Z-6V\,Z-3V^2\,Z.$$

これらを $X^2+Y^2+Z^2-1$ に代入して、

$$k_2(U,V)\,Z^2+k_1(U,V)\,Z+k_0(U,V)$$

という Z の 2 次式を作る。ここで、$k_j(U,V)$ は、U,V についての有理式であり、それを $(6U^2+6V^2-U+34V+13)^2$ 倍したもの $K_j(U,V)$ は、多項式となる。これに対応する判別式 すなわち

$$K_1(U,V)^2-4K_2(U,V)\,K_0(U,V)$$

を因数分解すると、

$$-4\,(6U^2+6V^2-U+34V+13)^2\,H(U,V)$$

となる。ここで、$H(U,V)$ は、次のような 6 次多項式である。

$$H(U,V)=1895-2442U+2971U^2-1684U^3+670U^4-132U^5+18U^6+2844V-1928U\,V$$
$$+670U^2\,V+342U^3\,V-164U^4\,V+36U^5\,V+964V^2-500U\,V^2+412U^2\,V^2-224U^3\,V^2+57U^4\,V^2$$
$$-66V^3+238U\,V^3-264U^2\,V^3+72U^3\,V^3-202V^4-92U\,V^4+60U^2V^4-100V^5+36U\,V^5+21V^6.$$

これが、多項式 $P(\lambda)$ の数域の境界を記述する。即ち、

$$\partial W(P)=\{U+i\,V:(U,V)\in\mathbf{R}^2,H(U,V)=0\}.$$

このように計算される原理について考える。数域 $W(P)$ の点 $\lambda=U+i\,V$ は、($\sharp$), ($\flat$) の左辺ような X,Y,Z についての 1 次式の零点として記述される直線または平面

$$\phi_{11}(U,V)\,X+\phi_{12}(U,V)\,Y+\phi_{13}(U,V)\,Z+\phi_{10}(U,V)=0,$$
$$\phi_{21}(U,V)\,X+\phi_{22}(U,V)\,Y+\phi_{23}(U,V)\,Z+\phi_{20}(U,V)=0$$

が単位球面 $\{(X,Y,Z)\in\mathbf{R}^3:X^2+Y^2+Z^2=1\}$ と共有点 (X_0,Y_0,Z_0) を持つような $(U,V)\in\mathbf{R}^2$ に対する $U+i\,V$ の集合である。このことより、($\sharp$), ($\flat$) を X,Y につい解いたものを $X^2+Y^2+Z^2-1=0$ に代入したとき、Z^2 の係数も Z^0 の係数も 0 でない 2 次方程式が導かれるならば、$W(P)$ の内点においては、この判別式が正であり、$W(P)$ の境界点がこのような内点の極限ならば、境界点を特徴づける方程式が、判別式 $=0$ として得られると考えられる。しかしながら、2 次多項式の例として最初に考えた例では、$V=0$

に対応する $< P(\lambda)\xi, \xi >= 0$ の解の特徴づけには、X, Y, Z の 1 次式は 1 つしか登場しないから、このような方法は適用できない。

References

[Ch-N] M. T. Chien, H. Nakazato: The numerical range of linear pencils of 2×2 matrices. preprint, 2000.

[G-L-R] I. Gohberg, P. Lancaster, L.Rodman : "Matrix Polynomials", Academic Press, 1982.

[L-R] C.K. Li, L. Rodman: "Numerical range of matrix polynomials", SIAM J. Matrix Anal. Appl. vol. 15 (1994), pp. 1256-1265.

[P-T] P. J. Psarrakos, M. J. Tsatsomeros : "On the relation between the numerical range and the joint numerical range of matrix polynomials", the Electronic Journal of Linear Algebra, vol. 6 (2000), pp. 20-30.