数理解析研究所講究録
1189 巻 2001 年 58-65

正作用素の complexity とスペクトル順序

大阪教育大学　藤井　正俊　(Masatoshi Fujii)
Department of Mathematics,
Osaka Kyoiku University
大阪教育大学　藤井　淳一　(Jun Ichi Fujii)
Departments of Arts and Sciences (Information Science),
Osaka Kyoiku University

有限有向グラフ G の **complexity** は、その隣接行列 $A=A(G)$ について、藤井(正)・中村・瀬尾・綿谷 [5] によって、定められた:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\langle A^n x,x\rangle}{n}\qquad \text{ただし、}x=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

ここでは $\langle A^n x,x\rangle$ はすべての n-path の数を表し, その対数値の平均の極限であるが、これは、著者の一人が以前定めたグラフのエントロピーの有限なケースと一致している [3]。この概念を援用して、正作用素の complexity を、単位ベクトル x について

$$\kappa(A;x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\langle A^n x,x\rangle}{n}.$$

と定める (便宜上、正作用素の可逆性を仮定しておく)。Jensen の不等式 (cf. [1]) を繰り返し使うと,

$$\langle(\log A)x,x\rangle\le\log\langle Ax,x\rangle\le\frac{\log\langle A^n x,x\rangle}{n}\le\frac{\log\langle A^{n+1}x,x\rangle}{n+1}\le\log\|A\|$$

から極限を決める数列が有界で単調増加である事が分かるので, この極限の存在は保証され, 同時に上界・下界も得られる:

$$\langle(\log A)x,x\rangle\le\kappa(A;x)\le\log\|A\|$$

下界に関する等号条件は単純である:

Theorem 1. 次は同値:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \langle(\log A)x, x\rangle = \kappa(A; x), & \\
(2) & \log\langle Ax, x\rangle = \kappa(A; x), & \\
(3) & \langle(\log A)x, x\rangle = \log\langle Ax, x\rangle, & \\
(4) & \langle A^\alpha x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle^\alpha, & \text{for some } 0 < \alpha \neq 1, \\
(5) & f(\langle Ax, x\rangle) = \langle f(A)x, x\rangle & \text{for all strictly cancave function } f, \\
(6) & x \text{ は } A \text{ の固有ベクトル.} &
\end{array}
$$

さて、$\log\langle A^n x, x\rangle^{1/n} = \log\|A\|$ の同値条件については、$\|A\|$ が A の固有値で，x がその固有ベクトルであれば良いが、問題は上界についての等号条件である。これを調べるうちに実際はいろんな事が同時にわかってきた。今回はその報告である。

まず最初にいくつかの簡単な例によって，どんな性質を持っているか（いないか？）をみる。基本的に、数 $a, b > 0$ について

$$\lim_{n\to\infty}(a^n + b^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(ta^n + sb^n)^{1/n} = \max\{a, b\}$$

$(t, s > 0)$ である事が本質的な計算である。

作用素を変数と見ると，可換な場合は単調性を保存する事はすぐわかるが、一般には駄目である：

作用素について単調でない例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leq B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

として、$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は、$r = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \in \sigma_p(B)$ に対する B の固有ベクトルとすると、$b \neq 0$ より

$$\langle A^n x, x\rangle^{1/n} = (|a|^2 + |b|^2 2^n)^{1/n} \longrightarrow 2$$

より、

$$\kappa(A; x) = \log 2 > \log r = \kappa(B; x)$$

また、共通の固有ベクトルについては凹関数になっているが，これも一般には成立しない：

作用素について凹でない例:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{A+B}{2} = 3, \qquad \|A\| = \|B\| = 3 + \sqrt{2}$$

$$\kappa(A; x) = \kappa(B; x) = \log \|A\|.$$

ここで、x は中点のスカラー作用素の固有ベクトルなので,

$$\kappa((A+B)/2; x) = \log 3 < \log \|A\|.$$

また、連続性も成立しないが，その例を見る前にベクトルについての不連続性を見てみよう：

ベクトルについて連続でない例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ x_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \\ \sin\varepsilon \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon > 0)$$

とすると、十分小さい ε について

$$\kappa(A; x_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \log(\cos\varepsilon + 2^n \sin\varepsilon)^{1/n} = \log 2$$

であるが、x_0 は 1 に対する固有ベクトルだから

$$\kappa(A; x_0) = \log 1 = 0$$

同様にして，次の例が得られる：

作用素について連続でない例:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon > 0)$$

とすると、x_0 の分解において、A_ε の両固有ベクトル成分は非負でないから，十分小さい ε について

$$\kappa(A_\varepsilon; x_0) = \log\|A_\varepsilon\| = \log\frac{3+\sqrt{1+4\varepsilon}}{2} > \log 2$$

であるが、x_0 は 1 に対する A_0 の固有ベクトルだから

$$\kappa(A_0; x_0) = \log 1 = 0.$$

以上の例から complexity の値域は、x が関係する固有値の最大値の対数である事が予想されるが，そのとおりである。実際，離散的な場合には：

$A = \sum_j t_j E_j$ $(t_j \uparrow)$ のとき、

$$\begin{aligned}\kappa(A; x) &= \log\Big(\max\{t_j \mid E_j x \neq 0\}\Big)\\ &= \log\left(\min\left\{t_j \;\middle|\; \sum_{k=1}^{j} E_k x = x\right\}\right.\end{aligned}$$

また、一般には

Theorm 2.

$$\begin{aligned}\kappa(A; x) &= \max_t\{\ \log t \mid E(t,\infty)x \neq 0\ \}\\ &= \min_t\{\ \log t \mid E[0,t]x = x\ \}.\end{aligned}$$

したがって、その値域 $K(A)$ は

Theorem 3.

$$K(A) = \log\sigma(A) = \{\log t | t \in \sigma(A)\}$$

となる。また最初の上界の等号条件

$$\kappa(A; x) = \log\|A\|$$

については、

$$E(t,\infty)x \neq 0 \qquad (\forall t < \|A\|).$$

ということになる。

次に、表題にあるように「順序」に目を向けることにする。complexity から、自然に定まる順序 **complexity order** $\underset{\kappa}{<}$ は、

$$A \underset{\kappa}{<} B \rightleftharpoons \kappa(A;x) \leq \kappa(B;x) \quad (\|\forall x\| = 1)$$

によって決める。一方 spectral order $\preceq$ は、次のように決められている [7]：

$$A \preceq B \rightleftharpoons E_A(t,\infty) \leq E_B(t,\infty) \quad (\forall t > 0).$$

この 2 つの順序は同等であるということが直接分かるが，t について

$$\frac{\log\langle A^t x, x\rangle}{t}$$

が単調増加である事から，

$$t\kappa(A;x) = \kappa(A^t;x) \qquad (\forall t > 0)$$

が分かるので，逆に

Olson の定理 [9]:　$A \preceq B \iff A^n \leq B^n \ (\forall n)$

を経由しても同等性が得られる。実際，$A^n \leq B^n$ $(\forall n)$ なら $A \underset{\kappa}{<} B$ となることは、complexity order の定義から分かるし，逆に，complexity order が通常の作用素の順序より強い事を確かめておけば，上記の性質より実際は $A^n \leq B^n$ $(\forall n)$ となることがわかる。

これらの順序はさらに次の不等式関係と同値になる：

$$E_A(t,\infty)A \leq E_B(t,\infty)B \qquad (\forall t > 0).$$

実際，左辺は

$$f(x) = \begin{cases} x & (x > t) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

という単調増加な関数 f に対して $f(A)$ と一致するから，spectral order の性質（cf. [4]）から，$f(A) \leq f(B)$ はすぐ分かり，逆は、

$$E(x,\infty)A^{1/n} = \big(E(x,\infty)A\big)^{1/n} \leq \big(F(x,\infty)B\big)^{1/n} = F(x,\infty)B^{1/n}.$$

より $n \to \infty$ とすれば分かる。

最後にこれらの順序と中村・梅垣 [8] の作用素エントロピーとの関連を見たい。これは、最後の不等式関係を、作用素不等式版の weak majorization とみて思いついたものである（cf. [2, 6]）。通常の majorization から、シャノンのエントロピーの関係式が出るからである。これらの関係を直接計算するのは難しそうなので，少し準備をする。まず、積分表示についての補題を用意する：

Lemma. $A = \displaystyle\int_m^M t dE(t)$ と、$(m-\varepsilon, M]$ 上の連続関数 G について

$$G(A) = \int_m^M \left(\int_x^M \frac{G(t)}{t}\, dE(t) \right) dx.$$

さらに、関数 $g(t) = G(t)/t$ が単調増加なら

$$G(A) = Ag(A) = \int_{m-0}^M AE(x, M] dg(t).$$

前半は $G = G^+ - G^-$ で、$G \geq 0$ を仮定し、分割して積分を近似すれば良い。その際，簡単のため，$0 < m \leq A \leq M \leq 1$ として十分である。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^1 g(t)\, dE(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\, dE(t) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} tg(t)\, dE(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} G(t)\, dE(t) = \int_0^1 G(t)\, dE(t) = G(A),\end{aligned}$$

となって、

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{G(t)}{t}\, dE(t) \right) dx \geq G(A)$$

がわかり、逆に,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g(t)\, dE(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} G\left(\frac{k+1}{n}\right)\, dE(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{k+1}{n}\right) E\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \longrightarrow G(A),$$

より前半の結果が得られる。後半も,

$$\sum_{k=0}^{n-1} Ag\left(\frac{k}{n}\right) E\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} A\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right) E\left(\frac{k}{n}, M\right].$$

で近似すれば良い。//

この補題を利用すれば, $G(t)/t$ が単調増加になるためには凸性があれば、次の結果が得られる：

Theorem 4. G を、$G(0) \leq 0$ となる (連続) 凸関数とすれば、

$$A \underset{\kappa}{<} B \quad \text{ならば、} G(A) \leq G(B).$$

マイナスの関数は凹関数だから、特に $H(x) = -x \log x$ について、作用素エントロピーを考えると、目標にしていた関係式がわかる：

Corollary.

$$A \underset{\kappa}{<} B \quad \text{ならば、} H(A) \geq H(B).$$

参考文献

[1] T.Ando: Topics on operator inequalities, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978.

[2] T.Ando: Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1982.

[3] J.I.Fujii: *Entropy of graphs*, Math. Japon., 38: 39–46 (1993).

[4] M.Fujii and I.Kasahara: *A remark on the spectral order of operators*, Proc. Japan Acad., 47: 986–988 (1971).

[5] M.Fujii, M.Nakamura, Y.Seo and Y.Watatani: *Graphs and Kolmogorov's complexity*, Math. Japon., 44: 113–117 (1996).

[6] E.Kamei: *Majorization in finite factors*, Math. Japon., 28:495–499 (1983).

[7] T.Kato: *Spectral order and a matrix limit theorem*, Linear Multilinear Alg., 8: 15–19 (1979).

[8] M.Nakamura and H.Umegaki: *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Jap. Acad., 37: 149–154 (1961).

[9] M.P.Olson: *The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice*, Proc. Amer. Math. Soc., 28: 537–544 (1971).