数理解析研究所講究録
1190 巻 2001 年 182-189

Double loop algebraの表現論とその応用

斉藤 義久 (Yoshihisa Saito)

広島大学大学院理学研究科

1 はじめに

$\mathfrak{g}$を半単純 Lie algebra とする。$\mathfrak{g}$に 1 変数 Laurent 多項式環を tensor してできる Lie algebra $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{\pm}]$ は loop algebra と呼ばれる。さらに $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{\pm}]$ を中心拡大して (場合によっては degree operator も付け加える) 出来る Lie algebra を affine Lie algebra という。現在、affine Lie algebra が数理物理学における中心的研究対象であることは、いまさら言うまでもないことであろう。

数学的には affine Lie algebra は Kac-Moody Lie algebra の中の、特別な性質をもつクラスと見るのが普通である。Kac-Moody Lie algebra とは半単純 Lie algebra の持つ性質のうち、三角分解可能という点に着目し、三角分解が可能なように Lie algebra のクラスをできるだけ広げたもの、と言うこともできるであろう。affine Lie algebra の表現論を調べる際には、Kac-Moody Lie algebra の一般論を踏まえた上で、affine 特有の性質を用いて構造を詳細に見ていくのが今までの立場であったし、それによって大きな成功を収めたことも良く知られている。しかしこのような立場は本当に正しいのであろうか。歴史的に見れば Kac-Moody Lie algebra よりも affine Lie algebra の方が先にあったのであって、それを Kac-Moody Lie algebra の中のよいクラスとみるのは、一つの見方に過ぎない。言い方を換えれば、affine Lie algebra を含むような Lie algebra の拡張の方向として、Kac-Moody は unique な訳ではない。

今回紹介する Double loop algebra は affine Lie algebra を含む拡張であって、Kac-Moody Lie algebra とは別の方向を与えるものである。$\mathfrak{g}$に 2 変数 Laurent 多項式環[1]を tensor して中心拡大を行ったものを Double loop algebra (あるいは elliptic Lie algebra) と呼ぶ。上にも述べたように Kac-Moody Lie algebra は三角分解が可能という点が特筆すべき性質であるが、Double loop algebra は三角分解が出来ない。したがって今まで知られていた表現論的手法が殆ど役に立たず、この algebra を調べたいという強い motivation が無かったこともあって、あまり研究がされて来なかった。ここ数年数学、物理の両面で Double loop algebra は数々の対象と結び付き始めており、状況は変化しつつある。特に共形場理論、特異点論との関係は密接になって来つつある[2]。

---

[1] $\mathfrak{g}$に (2変数以上の) 多変数 Laurent 多項式環を tensor して中心拡大をするという立場もあるが、そちらについては今回は触れないことにする。

[2] 他分野との関係、応用に関しては今回は割愛する。この点に関しては別の機会に紹介させて頂くことにしたい。

表現論に関してはまだ何もわかっていないとしか言えない状況ではあるが、今回はその中でも比較的構造が良くわかっている頂点表現について紹介したい。頂点表現の定義そのものは affine Lie algebra の場合の、いわゆる Frenkel-Kac construction のまね以上のものではないが、その構造に関して Double loop algebra 特有の現象 ($SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性) を見ることが出来る。この $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性の意味を理解することが出来た時、Double loop algebra の表現論をコントロールできるようになると考えている。

お詫び　講演のタイトルと実際の講演の内容が異なるものになってしまい(講演内容がタイトルに比べて非常に特殊な場合に限定した話題になってしまい)、大変申し訳なく思っております。この場を借りてお詫び致します。

2 準備

この節では話の中心となる Double loop algebra および $SL(2,\mathbb{Z})$ 対称性について述べる。

2.1 Double loop algebra の定義

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の ADE 型の有限次元単純 Lie algebra、$\mathfrak{h}$ をその Cartan subalgebra、$(\cdot,\cdot)$ を $\mathfrak{g}$ の non-degenerate symmetric invariant bilinear form とする。

$A=\mathbb{C}[s^{\pm1},t^{\pm1}]$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 変数 Laurent 多項式環とし、$\mathfrak{g}$ の A による拡大 $\mathfrak{g}\otimes A$ を考える。ただし交換関係は

$$[X\otimes f, Y\otimes g]:=[X,Y]\otimes fg,\quad X,Y\in\mathfrak{g}, f,g\in A$$

とする。このとき新しい Lie algebra $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ および $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ を以下で定義する。

Definition $\Omega_A^1=Ads\oplus Adt$ を A 上の 1-form のなす空間とし、

$$\bar{\cdot}:\Omega_A^1\longrightarrow\Omega_A^1/dA$$

を canonical projection とする。このとき

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}:=\mathfrak{g}\otimes A\oplus\Omega_A^1/dA$$

を toroidal Lie algebra と呼ぶ。ただし交換関係は

$$[X\otimes f, Y\otimes g]:=[X,Y]\otimes fg+(X,Y)\overline{(df)g},\quad X,Y\in\mathfrak{g}, f,g\in A,$$

$$c\in\Omega_A^1/dA \text{ は center の元}$$

と定義する。さらに

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}:=\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}\oplus\mathbb{C}s\partial_s\oplus\mathbb{C}t\partial_t$$

とし、交換関係を

$$[s\partial_s, X\otimes s^kt^l]=kX\otimes s^kt^l,\quad [t\partial_t, X\otimes s^kt^l]=lX\otimes s^kt^l,$$

$$[s\partial_s, \overline{s^{k-1}t^l ds}] = k\overline{s^{k-1}t^l ds}, \quad [s\partial_s, \overline{s^k t^{l-1} ds}] = l\overline{s^k t^{l-1} ds},$$
$$[s\partial_s, t\partial_t] = 0$$

で定める。$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ を elliptic Lie algebraと呼ぶ。また $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の可換な subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ を

$$\mathfrak{h}_{\mathrm{el}} := \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\overline{s^{-1}ds} \oplus \mathbb{C}\overline{t^{-1}dt} \oplus \mathbb{C}s\partial_s \oplus \mathbb{C}t\partial_t$$

とする。

$\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の可換な subalgebraであるので、$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ に関する root 分解を考えることができる。

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}} = \oplus_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^*} (\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha.$$

ただし $(\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{el}} \mid [H, X] = \alpha(H)X\}$。通常と同様に rootの集合 R を

$$R := \{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathrm{el}}^* \mid (\mathfrak{g}_{\mathrm{el}})_\alpha \neq \{0\}\} \setminus \{0\}$$

とすると、Rは齋藤(恭司)による elliptic root systemになっていることがわかる。より詳しく $\mathfrak{g}$ が A_n, D_n, E_n 型であることに応じてそれぞれ $A_n^{(1,1)}, D_n^{(1,1)}, E_n^{(1,1)}$ 型の elliptic root systemになっている。また vertex algebraの手法を用いることにより、root systemのデータから $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ を再構成することもできる。このような理由によって $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ を elliptic Lie algebraと呼んでいる。詳しくは [K-Sai],[SY] 等を参照されたい。

$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の中には2つの affine Lie algebra $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s, s^{-1}] \oplus \mathbb{C}\overline{s^{-1}ds} \oplus \mathbb{C}s\partial_s$, $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\overline{t^{-1}dt} \oplus \mathbb{C}t\partial_t$, が自然に埋め込まれている。この埋め込みの image を $\hat{\mathfrak{g}}_s$, $\hat{\mathfrak{g}}_t$ と書くことにする。

2.2 $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の基本関係式

調べるべき代数の生成元と基本関係式による表示を知ることは、構造論、表現論を展開する上で非常に役立つことが多い。現時点で $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の生成元と基本関係式による表示はおもに次の2つが知られている。

- Moody-Eswara Rao-横沼による 無限個 の生成元と 無限個 の基本関係式による表示。
- 齋藤(恭司)-吉井による 有限個 の生成元と 有限個 の基本関係式による表示。

両者は無限個か有限個かという点で決定的に異なる。今回は後の都合上前者を紹介する。

Definition $\mathfrak{g}$ を ADE型の Lie algebra、$\hat{\mathfrak{g}}$ を付随する affine Lie algebra、$(a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の Cartan matrix とする。このとき以下の生成元と基本関係式で定義される Lie algebraを $\mathfrak{t}$ と記す。

生成元：$H_{i,k}, E_{i,k}, F_{i,k}$ $(0 \le i \le n, k \in \mathbb{Z}), c, d_1, d_2$

基本関係式：　c は central element,

$$[H_{i,k}, H_{j,l}] = k a_{ij} \delta_{k+l,0} c, \quad [H_{i,k}, E_{j,l}] = a_{ij} E_{j,k+l}, \quad [H_{i,k}, F_{j,l}] = -a_{ij} F_{j,k+l},$$

$$[E_{i,k}, F_{j,l}] = \delta_{i,j}\{H_{i,k+l} + k\delta_{k+l,0}c\}, \quad [E_{i,k}, E_{i,l}] = [F_{i,k}, F_{i,l}] = 0,$$
$$(\mathrm{ad}E_{i,0})^{-a_{ji}+1}E_{j,k} = 0, \quad (\mathrm{ad}F_{i,0})^{-a_{ji}+1}F_{j,k} = 0 \quad (i \neq j),$$
$$[d_1, E_{i,k}] = kE_{i,k}, \quad [d_1, F_{i,k}] = kF_{i,k}, \quad [d_1, H_{i,k}] = kH_{i,k},$$
$$[d_2, E_{i,k}] = \delta_{i,0}E_{i,k}, \quad [d_2, F_{i,k}] = -\delta_{i,0}F_{i,k}, \quad [d_2, H_{i,k}] = 0, \quad [d_1, d_2] = 0.$$

このとき次が知られている。

Proposition 2.1

$$\mathfrak{t} \cong \mathfrak{g}_{el}.$$

この命題により $\mathfrak{g}_{el}$ の無限個の生成元と無限個の基本関係式による表示が得られたことになる。

2.3 $SL(2,\mathbb{Z})$対称性

2変数 Laurant 多項式環 $A = \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ への $SL(2,\mathbb{C})$ の作用を

$$\phi_g : s^k t^l \mapsto s^{ak+bl} t^{ck+dl}$$

で定める。ただし $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$ とする。この作用は自然に $\mathfrak{g}_{el}$ の automorphism に延びる。これを同じ記号 ϕ_g で表すことにする。

一般に $\pi : \mathfrak{g}_{el} \to V$ をが $\mathfrak{g}_{el}$ の表現とする。このとき上の $SL(2,\mathbb{C})$-作用を用いて新しい表現 $\pi^g := \pi \circ \phi_g : \mathfrak{g}_{el} \to V$ が定義できる。すなわち $\mathfrak{g}_{el}$ においては $SL(2,\mathbb{C})$-作用で表現を'捻る'ことにより、同じ表現空間 V の上に新しい表現を作ることができるのである。

3 頂点表現

3.1 表現の構成

以下 $\mathfrak{g}$ は A 型であると仮定する。これは記述を簡単にするためであって以下に述べる結果は D,E 型でも全て成り立つ。(ただし多少の modify は必要である。)

$\mathcal{H}$ を
生成元：$h_{i,k}, K \quad (0 \leq i \leq n, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$
基本関係式： K は central element,

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = ka_{ij}\delta_{k+l,0}K$$

で定義される Lie algebra とする。ただし $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の Cartan matrix である。

$\mathcal{H}^+$ を $h_{i,k}$ $(k > 0), K$ で生成される $\mathcal{H}$ の subalgebra とし、$\mathcal{H}^+$ の1次元表現 $\mathbb{C}_{vac} = \mathbb{C}|vac\rangle$ を

$$h_{i,k}|vac\rangle = 0, \quad K|vac\rangle = |vac\rangle$$

で定める。このとき Fock representation $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}^+}^{\mathcal{H}} \mathbb{C}_{vac}$$

と定義する。

Remark 1 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{H}$-module として既約ではない。実際 $\delta = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_i$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の null root とし

$$\delta(k) := \sum_{i=0}^{n} a_i h_{i,k}$$

とする。$\mathcal{H}_\delta$ を $\delta(k)$ $(k \neq 0)$ たちから生成される $\mathcal{H}$ の subalgebra とすると、$\mathcal{H}_\delta$ は可換であり、従って $\mathcal{H}_\delta|vac\rangle$ は $\mathcal{F}$ の $\mathcal{H}$-submodule となる。

$$\overline{\mathcal{F}} := \mathcal{F}/\mathcal{H}_\delta|vac\rangle$$

とするとこれは既約になっている。

Q を $\hat{\mathfrak{g}}$ の root lattice とし、$\mathbb{C}\{Q\}$ をその twisted group algebra とする。すなわち $\mathbb{C}\{Q\}$ は e^{α_i} $(0 \le i \le n)$ で生成される algebra であって、$e^{\alpha_i}e^{\alpha_j} = (-1)^{a_{ij}} e^{\alpha_j} e^{\alpha_i}$ を基本関係式にするものである。$\alpha = \sum m_i \alpha_i$ に対し、$e^\alpha = (e^{\alpha_0})^{m_0} \cdots (e^{\alpha_n})^{m_n}$ と書くことにする。

Λ_i $(0 \le i \le n)$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の fundamental weights とし、$\lambda \in \oplus_{i=0}^{n} \mathbb{Z}\Lambda_i$ に対して $|\lambda\rangle$ で生成される rank 1 の左 $\mathbb{C}\{Q\}$-module $\mathbb{C}\{Q\}|\lambda\rangle$ を考える。$\mathbb{C}\{Q\}|\lambda\rangle$ に対し $\hat{\mathfrak{h}}$ の作用を

$$h(e^\alpha|\lambda\rangle) = \langle h, \alpha + \lambda\rangle e^\alpha|\lambda\rangle, \quad (h \in \hat{\mathfrak{h}})$$

と定義する。さらに

$$V(\lambda) := \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}\{Q\}|\lambda\rangle$$

とおく。また $h_{i,0}, d_s, d_t \in \mathrm{End}(V(\lambda))$ $(0 \le i \le n)$ を

$$h_{i,0}(v \otimes e^\alpha|\lambda\rangle) = \langle h_i, \alpha + \lambda\rangle v \otimes e^\alpha|\lambda\rangle,$$

$$d_s(v \otimes e^\alpha|\lambda\rangle) = \left\{ -\sum_{l=1}^{N} k_l - \frac{(\alpha|\alpha)}{2} - (\alpha|\lambda) \right\} v \otimes e^\alpha|\lambda\rangle,$$

$$d_t(v \otimes e^\alpha|\lambda\rangle) = m_0(v \otimes e^\alpha|\lambda\rangle)$$

と定義する。ただし第2式において $v = h_{i_1,-k_1} \cdots h_{i_N,-k_N}|vac\rangle$, 第3式において $\alpha = \sum m_i \alpha_i$ とする。

以上の準備の下に次の定理が成り立つ。

Theorem 3.1 *(1)* 以下のようにして $V(\lambda)$ に $\mathfrak{g}_{el}$*-module* の構造を入れることができる。

$$c \mapsto id, \quad H_{i,k} \mapsto h_{i,k}, \quad d_1 \mapsto d_s, \quad d_2 \mapsto d_t,$$

$$E_i(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_{i,k} z^{-k-1}$$

$$\mapsto \exp\left(\sum_{k \ge 1} \frac{h_{i,-k}}{k} z^k\right) \exp\left(-\sum_{k \ge 1} \frac{h_{i,k}}{k} z^{-k}\right) e^{\alpha_i} z^{h_{i,0}},$$

$$
\begin{aligned}
F_i(z) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_{i,k} z^{-k-1} \\
&\mapsto \exp\left(-\sum_{k\geq 1} \frac{h_{i,-k}}{k} z^k\right) \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{h_{i,k}}{k} z^{-k}\right) e^{-\alpha_i} z^{-h_{i,0}}.
\end{aligned}
$$

ただし $V(\lambda)$ は既約 $\mathfrak{g}_{el}$-*module* ではない。
(2) $\overline{V(\lambda)} := \overline{\mathcal{F}} \otimes \mathbb{C}\{Q\}|\lambda\rangle$ とすると、同様に $\mathfrak{g}_{el}$-*module* の構造を入れることができ既約である。

Remark 2 (1) $V(\lambda)$ の構成法は affine Lie algebra の level 1 の表現を構成する Frenkel-Kac construction と全く同様である。ただし affine の Cartan matrix が退化しているために表現は既約にはならない。
(2) $\lambda = \sum n_i \Lambda_i$ とする。このとき $V(\lambda)$ および $\overline{V(\lambda)}$ は $\hat{\mathfrak{g}}_s, \hat{\mathfrak{g}}_t$-module でもあるが、より詳しく

- $\hat{\mathfrak{g}}_s$-module として level 1、
- $\hat{\mathfrak{g}}_t$-module として level $\sum n_i$

となっている。

3.2 頂点表現への $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用

$\hat{\mathfrak{g}}$-module に対してその "affine 化" を定義する。一般に V を $\hat{\mathfrak{g}}$-module とし

$$
V_{\mathrm{aff}} := V \otimes \mathbb{C}[z, z^{1}]
$$

とおく。$\hat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の subalgebra $\hat{\mathfrak{g}}_s$ と同一視することによって V_{aff} に自然に $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$-module の作用を定義できる；

$$
\begin{gathered}
X \otimes s^k t^l (v \otimes z^m) = \{(X \otimes s^k)(v)\} \otimes z^{m+l}, \\
\overline{s^{-1}ds}(v \otimes z^m) = \{\overline{d \log s}(v)\} \otimes z^m, \quad \overline{t^{-1}dt}(v \otimes z^m) = 0, \\
s\partial_s(v \otimes z^m) = \{s\partial_s(v)\} \otimes z^m, \quad t\partial_t(v \otimes z^m) = m(v \otimes z^m).
\end{gathered}
$$

ここで $X \in \mathfrak{g}, v \in V$ である。これ以外の $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の元の作用は上の定義から定まる。
このとき以下の定理が成り立つ。

Theorem 3.2 $\mathfrak{g}$ を A 型の *simple Lie algebra*、λ を任意の $\hat{\mathfrak{g}}$ の *dominant integral weight* とする。このとき $\hat{\mathfrak{g}}$ の *level 1* の *dominant integral weight* λ_1 と $\in SL(2,\mathbb{Z})$ が存在して、$\mathfrak{g}_{el}$-*module* の同型

$$
\overline{V(\lambda)} \cong (L(\lambda_1)_{\mathit{aff}})^g
$$

が成り立つ。ただし $L(\lambda_1)$ は *highest weight* λ_1 の $\hat{\mathfrak{g}}$ の既約 *integral module* である。

従って「頂点表現は affine Lie algebra の level 1 の既約表現を affine 化して、それを $SL(2,\mathbb{Z})$ の元で捻ったものである」ということができる。

3.3 表現の character

頂点表現は構造が非常に詳しく調べることができるため、character を直接計算することもできるが、Theorem 3.2 を用いても計算することができる。

$SL(2,\mathbb{Z})$は $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}$ に作用しているので、その dual である $\mathfrak{h}_{\mathrm{el}}{}^*$ にも自然に作用する。この作用を $(\cdot)^g$ と書くことにする。

$\hat{\mathfrak{g}}$-module V の character がわかっていれば、その affine 化 V_{aff} の character は

$$\mathrm{ch}(V_{\mathrm{aff}}) = \mathrm{ch}(V) \times (\delta - function)$$

となることは容易にわかる。従って Theorem 3.2 より頂点表現の character を計算できる。

Corollary 3.3

$$\mathrm{ch}(\overline{V(\lambda)}) = (\mathrm{ch}(L(\lambda_1)) \times (\delta - function))^g.$$

ただし λ_1 および g は *Theorem 3.2* で定めたものとする。

今回は特に頂点表現についてのみ詳しく調べたが、同じ議論は affine の level k の表現から出発してその affine 化を考え、$SL(2,\mathbb{Z})$で捻って構成される表現に対しても成立する。すなわち character を計算できるような $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の表現の family を構成できたことになる。

4 最後に

double loop algebra (elliptic Lie algebra) の研究は始まったばかりでありまだまだ不明な点も多い。一番の問題点は "integrable 表現" あるいはそれに類する良い表現のクラスをどう定義するか？という問題であろう。Kac-Moody の場合は通常の意味で integrable 表現を定義した時、Weyl 群の作用でも表現が閉じており、そのことが表現の構造を調べる際の一つの key point になっていた。

今回は Weyl 群に関しては詳しく述べなかったが、double loop algebra の場合には Weyl 群が自然に $SL(2,\mathbb{Z})$ を含んでしまい、Kac-Moody Lie algebra の場合とは様相が異なる。(Kac-Moody の場合をまねて) 安直に integrability を定義しようとすると、表現が Weyl 群の作用で閉じなくなってしまう。今回の話はこの事実の一例になっている。すなわち頂点表現 $V(\lambda)$(正確には $\overline{V(\lambda)}$) と affine Lie algebra の level 1 の表現の affine 化 $L(\lambda_1)_{\mathrm{aff}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$ の表現としては異なるが、Weyl 群の部分群である $SL(2,\mathbb{Z})$ を通じて結びついている。

この事実をどう解釈すべきかが問題となるが、現時点では「$\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$-module を考えるのではなく、($\mathfrak{g}_{\mathrm{el}}$,Weyl 群)-bimodule を考える」ことにより解決できるのではないかと考えている。つまり Kac-Moody の場合は integrable 表現が偶然 Weyl 群不変でもあったために Lie algebra の表現を考えるだけで十分であったが、double loop algebra の場合には、Weyl 群の作用と両方を見なければいけないというアイデアである。いまのところこれは標語以上のものではないが、現在名古屋大学の粟田、土屋、東京大学の加藤、ICU の清水各氏と共同研究を行っており、いずれ詳しい成果を紹介できることと思う。

References

[EM] S. Eswara Rao and R. Moody, *Vertex representations for N-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebra*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 239-264.

[ISW1] K. Iohara, Y. Saito and M. Wakimoto, *Hirota bilinear forms with 2-toroidal symmetry*, Phys. Lett. A **254**, (1999), 37-46.

[ISW2] K. Iohara, Y. Saito and M. Wakimoto, *Notes on differential equations arising from a representation of 2-toroidal Lie algebras*, Progr. Theort. Phys. Suppl. **135**, (1999), 166-181.

[Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd. ed., Cambr. Univ. Press, 1991.

[K-Sai] K. Saito, *Extended Affine Root Systems I , II, III (with T. Takebayashi) and IV (with D. Yoshii)*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21**,(1985), 75-179, **26**, (1990), 15-78, **33**, (1997), 301-329, **36**, (2000), 385-421.

[MEY] R. Moody, S. Eswara Rao and T. Yokonuma, *Toroidal Lie algebras and vertex representations*, Geom. Dedicata, **35**, (1990), 283-307.

[Y-Sai1] 斉藤 義久, トロイダル代数入門, 「第1回量子群と代数群の表現論」研究集会報告集, 東京理科大学セミナーハウス (1998), 116-132.

[Y-Sai2] 斉藤 義久, トロイダル代数の対称性をもつ広田型双線形微分方程式について, 「第2回量子群と代数群の表現論」研究集会報告集, 上智軽井沢セミナーハウス (1999), 147-166.