数理解析研究所講究録
1190 巻 2001 年 9-21



# 放物型概均質ベクトル空間の $b$ 関数の量子化

紙田敦史　(広島大理)
Atsushi KAMITA　(Hiroshima University)

## §0. Introduction

可換放物型と呼ばれる概均質ベクトル空間は単純 Lie 代数の内部に実現され, 表現論と密接に関係する. 特に $b$ 関数は既約性などと関係がある ([18] など). 一方, 簡約代数群上の加群の $q$ 類似が量子包絡環上の加群として構成できる事が知られている. さらに可換放物型概均質ベクトル空間 $(L, V)$ に対しては座標環の $q$ 類似 $A_q(V)$ も構成された (広島大の谷崎氏, 森田氏との共同研究 [8]). この結果得られた $A_q(V)$ は [3], [15], [17], [19] により研究されたものと同じである. [8] における $A_q(V)$ の構成は量子包絡環の PBW 型の基底を用いるものであり, $(L, V)$ が正則の場合は基本相対不変式 $f$ の $q$ 類似 $f_q$ の構成法も含む.

本稿の目的は $f$ に対応する $b$ 関数の $q$ 類似の構成である. $b$ 関数 $b(s)$ は $(L, V)$ の双対空間 $(L, V^*)$ の相対不変式 ${}^tf$ に対応する定数係数微分作用素 ${}^tf(\partial)$ により ${}^tf(\partial)f^{s+1} = b(s)f^s$ で定義される. そこで $g \in A_q(V)$ に対し, 線形写像 ${}^tg(\partial)$ を $A_q(V)$ 上の自然な非退化対称形式を用いて定義し, 量子 $b$ 関数 $b_q(s)$ を

$$ {}^tf_q(\partial)f_q^{s+1} = b_q(s)f_q^s \quad (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) $$

により定める. $b(s) = \prod_j (s + a_j)$ のとき $b_q(s)$ は (定数倍を除いて)

$$ b_q(s) = \prod_j q_0^{s+a_j-1}[s + a_j]_{q_0} $$

となる. ただし $q_0$ は $(L, V)$ が $B, C$ 型の単純 Lie 代数に付随するときは $q_0 = q^2$, その他のときは $q_0 = q$ であり, $[n]_{q_0} = \dfrac{q_0^n - q_0^{-n}}{q_0 - q_0^{-1}}$ である. この結果は各 type 毎に計算

することにより得られたものである．なお $A$ 型に対する $b$ 関数の $q$ 類似についてはCapelli identity の $q$ 類似による結果 [14] がある．

本稿を通して以下の記号を用いる．$\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 代数とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする．root 系を $\Delta$ で表し，positive root 全体，simple root 全体のなす集合をそれぞれ $\Delta^+$, $\{\alpha_i\}_{i\in I_0}$ とする．ここで $I_0$ は index set である．また Weyl 群を $W$ で表す．$w_0$ を $W$ の最長元とする．$i \in I_0$ に対応する simple coroot, simple reflection をそれぞれ $h_i \in \mathfrak{h}$, $s_i \in W$ で表す．$\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ 上の反代数射 $x \mapsto {}^t x$ を ${}^t h_i = h_i$, ${}^t x_\alpha = x_{-\alpha}$ により定める．ここで $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ は Chevalley basis である．$(\ ,\ )$ を $(\alpha, \alpha) = 2$ ($\alpha$ : short root) をみたす invariant symmetric bilinear form とする．このとき

$$d_i = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}, \qquad a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

と定める．

## §1．量子包絡環

$\mathfrak{g}$ の量子包絡環を $U_q(\mathfrak{g})$ で表す．これは $E_i, F_i, K_i^{\pm 1}$ $(i \in I_0)$ で生成され，以下の基本関係式をもつ $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である:

$$\begin{aligned}
&K_iK_j = K_jK_i, \qquad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1,\\
&K_iE_jK_i^{-1} = q_i^{a_{ij}}E_j, \qquad K_iF_jK_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}}F_j,\\
&E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},\\
&\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_i^{1-a_{ij}-s}E_jE_i^s = 0 \quad (i \neq j),\\
&\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_i^{1-a_{ij}-s}F_jF_i^s = 0 \quad (i \neq j).
\end{aligned}$$

ここで $q_i = q^{d_i}$ であり，$[m]_t = \dfrac{t^m - t^{-m}}{t - t^{-1}}$, $[m]_t! = \prod_{s=1}^{m}[s]_t$, $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = \dfrac{[m]_t!}{[n]_t![m-n]_t!}$ である．$U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q(\mathfrak{b}^\pm)$, $U_q(\mathfrak{h})$, $U_q(\mathfrak{n}^\pm)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
&U_q(\mathfrak{b}^+) = \langle E_i, K_i^{\pm 1} \mid i \in I_0\rangle, \quad U_q(\mathfrak{b}^-) = \langle F_i, K_i^{\pm 1} \mid i \in I_0\rangle, \quad U_q(\mathfrak{h}) = \langle K_i^{\pm 1} \mid i \in I_0\rangle,\\
&U_q(\mathfrak{n}^+) = \langle E_i \mid i \in I_0\rangle, \qquad U_q(\mathfrak{n}^-) = \langle F_i \mid i \in I_0\rangle.
\end{aligned}$$

また $U_q(\mathfrak{g})$ 上の反代数射 $x \mapsto {}^t x$ を次で定める:

$$ {}^tK_i = K_i, \qquad {}^tE_i = F_i, \qquad {}^tF_i = E_i. $$

さらに $U_q(\mathfrak{g})$ の Hopf 代数構造を

$$ \begin{array}{lll} \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i, & \Delta(E_i) = E_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes E_i, & \Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + K_i \otimes F_i, \\ \epsilon(K_i) = 1, & \epsilon(E_i) = \epsilon(F_i) = 0, & \\ S(K_i) = K_i^{-1}, & S(E_i) = -E_iK_i, & S(F_i) = -K_i^{-1}F_i, \end{array} $$

で定め, 随伴表現 $\mathrm{ad} : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}(q)}(U_q(\mathfrak{g}))$ を次で定める:

$$ \mathrm{ad}(x)y = \sum_i x_i^{(1)} y S(x_i^{(2)}) \quad (\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}). $$

$U_q(\mathfrak{h})$ の随伴作用による $U_q(\mathfrak{n}^-)$ の weight $\mu$ に対応する weight space を $U_q(\mathfrak{n}^-)_\mu$ で表す.

Lusztig により $U_q(\mathfrak{g})$ の自己同型 $T_i \ (i \in I_0)$ が次のように定義された ([11]):

$$ \begin{aligned} T_i(K_j) &= K_j K_i^{-a_{ij}}, \\ T_i(E_j) &= \begin{cases} -F_iK_i & (i = j) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-q_i)^{-k} E_i^{(-a_{ij}-k)} E_j E_i^{(k)} & (i \neq j), \end{cases} \\ T_i(F_j) &= \begin{cases} -K_i^{-1}E_i & (i = j) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{-a_{ij}} (-q_i)^{k} F_i^{(k)} F_j F_i^{(-a_{ij}-k)} & (i \neq j). \end{cases} \end{aligned} $$

ここで $E_i^{(k)} = \dfrac{1}{[k]_{q_i}!}E_i^k$, $F_i^{(k)} = \dfrac{1}{[k]_{q_i}!}F_i^k$ である. この自己同型を用いて PBW 型の基底が構成できる. また $w \in W$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_t}$ に対して, 自己同型 $T_w$ を $T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_t}$ と定める. これは $w$ の最短表示のとり方に依存しない.

以下の条件を満たす双線形形式 $(\ ,\ ) : U_q(\mathfrak{b}^-) \times U_q(\mathfrak{b}^+) \to \mathbb{C}(q)$ が一意的に存在することが知られている ([4], [20]):

$$ \begin{array}{ll} (y, xx') = (\Delta(y), x' \otimes x), & (yy', x) = (y \otimes y', \Delta(x)), \\ (K_i, K_j) = q^{-(\alpha_i, \alpha_j)}, & (F_i, E_j) = -\delta_{ij}(q_i - q_i^{-1})^{-1}, \\ (F_i, K_j) = 0, & (K_i, E_j) = 0. \end{array} $$

ただし, $(y_1 \otimes y_2, x_1 \otimes x_2) = (y_1, x_1)(y_2, x_2)$ である.

また $y \in U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\mu}$ に対し $r_i'(y) \in U_q(\mathfrak{n}^-)_{-(\mu-\alpha_i)}$ を次で定義する ([4]):

$$\Delta(y) \in K_\mu \otimes y + \sum_{i \in I_0} K_{\mu-\alpha_i} F_i \otimes r_i'(y) + \Bigg( \bigoplus_{\substack{0<\nu\leq\mu \\ \nu\neq\alpha_i}} K_{\mu-\nu} U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\nu} \otimes U_q(\mathfrak{n}^-)_{-(\mu-\nu)} \Bigg).$$

このとき

$$(y, xE_i) = (F_i, E_i)(r_i'(y), x) \quad (x \in U_q(\mathfrak{n}^+)) \tag{1.1}$$

となる.

上で定めた双線形形式と線形写像 $r_i'$ は後で $b$ 関数の $q$ 類似の構成に用いる.

## §2. 可換放物型概均質ベクトル空間とその $q$ 類似

この節では可換放物型概均質ベクトル空間およびその座標環の $q$ 類似の構成について述べる.

$I_0$ の部分集合 $I$ に対し

$$\Delta_I = \Delta \cap \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i, \quad \mathfrak{l}_I = \mathfrak{h} \oplus \Bigg( \bigoplus_{\alpha \in \Delta_I} \mathfrak{g}_\alpha \Bigg), \quad \mathfrak{n}_I^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_I} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \quad W_I = \langle s_i \mid i \in I \rangle$$

とする. また $L_I$ を $\mathfrak{l}_I$ に対応する代数群とする. 以下 $I$ は $\mathfrak{n}_I^+ \neq 0$, $[\mathfrak{n}_I^+, \mathfrak{n}_I^+] = 0$ となるもののみを考える. この条件は次と同値である:

$$I = I_0 \setminus \{i_0\}$$
$$\Big( i_0 \text{ は } \mathfrak{g} \text{ の highest root } \theta = \sum_{i \in I_0} m_i \alpha_i \text{ において } m_{i_0} = 1 \text{ となるもの} \Big).$$

このとき $(L_I, \mathfrak{n}_I^+)$ は概均質ベクトル空間となる. その座標環を $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ であらわす. Killing 形式により $(\mathfrak{n}_I^+)^* \simeq \mathfrak{n}_I^-$ なので, $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ は $S(\mathfrak{n}_I^-) = U(\mathfrak{n}_I^-)$ と同一視される.

$\mathfrak{n}_I^+$ の $L_I$-orbit は有限個でそれらを $C_1, C_2, \ldots, C_r, C_{r+1}$ とする. ここで index は closure relation

$$\{0\} = C_1 \subset \overline{C_2} \subset \cdots \subset \overline{C_r} \subset \overline{C_{r+1}} = \mathfrak{n}_I^+$$

をみたすようにつける. 以下 non-open orbit の個数を $r$ で表す. $1 \leq p \leq r$ に対し, $\overline{C_p}$ の定義イデアルを $\mathcal{I}(C_p)$ とし, その $m$ 次斉次部分を $\mathcal{I}^m(C_p)$ とする. このとき次のことが知られている ([21]):

(i) $\mathcal{I}^m(C_p) = 0$ $(m < p)$.
(ii) $\mathcal{I}^p(C_p)$ は既約 $\mathfrak{l}_I$ 加群.
(iii) $\mathcal{I}(C_p) = \mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]\mathcal{I}^p(C_p)$.

$f_p$ を $\mathcal{I}^p(C_p)$ の highest weight vector とし, その weight を $\lambda_p$ とする. 概均質ベクトル空間 $(L_I, \mathfrak{n}_I^+)$ が正則のとき, orbit $C_r$ に対応する highest weight vector $f_r$ が基本相対不変式であり, その weight は $\lambda_r = -2\varpi_{i_0}$ となる. ただし $\varpi_{i_0}$ は $\alpha_{i_0}$ に対応する基本 weight である. 以下, 本稿を通して $I = I_0 \setminus \{i_0\}$ は $(L_I, \mathfrak{n}_I^+)$ が正則となるものとする. そのような $\mathfrak{g}$ と $i_0$ は図 1 の Dynkin diagram で与えられる (頂点 ∘ が $i_0$ に対応している).

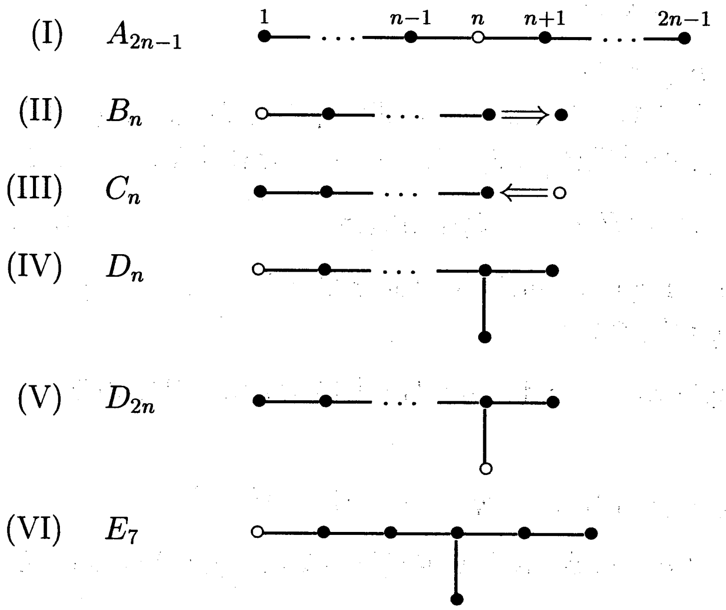


図 1

次に $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ の $q$ 類似について述べる ([8]).
$U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q(\mathfrak{l}_I)$, $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ を次で定義する.

$$U_q(\mathfrak{l}_I) = \langle E_i, F_i, K_j^{\pm} \mid i \in I, j \in I_0 \rangle,$$
$$U_q(\mathfrak{n}_I^-) = U_q(\mathfrak{n}^-) \cap T_{w_I}^{-1} U_q(\mathfrak{n}^-).$$

ここで $w_I$ は Weyl 群の部分群 $W_I$ の最長元である.
$w_I w_0$ の最短表示 $w_I w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ に対して

$$\beta_t = s_{i_1} \cdots s_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}), \qquad Y_{\beta_t} = T_{i_1} \cdots T_{i_{t-1}}(F_{i_t}) \qquad (1 \le t \le k)$$

とおく. このとき次が成り立つ.

**命題 2.1.** (i) $\mathrm{ad}(U_q(\mathfrak{l}_I))\,U_q(\mathfrak{n}_I^-) \subset U_q(\mathfrak{n}_I^-)$.
(ii) $\Delta^+ \setminus \Delta_I = \{\beta_t \mid 1 \le t \le k\}$ であり, $\{Y_{\beta_1}^{n_1} \cdots Y_{\beta_k}^{n_k} \mid n_t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\}$ は $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の基底をなす.
(iii) $Y_\beta$ $(\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I)$ は $w_I w_0$ の最短表示のとり方によらずに定まり, $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の生成元として2次基本関係式をみたす.

この命題によって $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ を $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ の $q$ 類似とみなす.

$f$ を $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の weight vector とし, その weight を $\mu = -\sum_{i \in I_0} m_i \alpha_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ とする. このとき

$$f \in \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m_{i_0}} \in \Delta^+ \setminus \Delta_I} \mathbb{C}(q) Y_{\gamma_1} \cdots Y_{\gamma_{m_{i_0}}}$$

となり, $f$ の斉次次数は $\deg f = m_{i_0}$ となる.

$\mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^+]$ が multiplicity free $\mathfrak{l}_I$ 加群であることよりその部分 $\mathfrak{l}_I$ 加群 $\mathcal{I}(C_p)$, $\mathcal{I}^p(C_p)$ の $q$ 類似となる $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の部分 $U_q(\mathfrak{l}_I)$ 加群 $\mathcal{I}_q(C_p)$, $\mathcal{I}_q^p(C_p)$ が一意に存在する. このとき

$$\mathcal{I}_q(C_p) = U_q(\mathfrak{n}_I^-)\mathcal{I}_q^p(C_p) = \mathcal{I}_q^p(C_p)U_q(\mathfrak{n}_I^-) \tag{2.1}$$

となる ([8]). また $f_{q,p}$ を $\mathcal{I}_q^p(C_p)$ の highest weight vector とすると, $\deg f_{q,p} = p$ であり, $f_{q,r}$ が基本相対不変式 $f_r$ の $q$ 類似である.

**例 2.2.** $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ とし, その simple root の index set $I_0$ を図1 (I) により定める. このとき

$$\mathfrak{l}_I \simeq \{(g_1, g_2) \in \mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{tr} g_1 + \mathrm{tr} g_2 = 0\}, \quad \mathfrak{n}_I^+ \simeq M_n(\mathbb{C})$$

であり, non-open orbit の個数 $r$ は $n$ となる. また基本相対不変式は $f_n(x) = \det x$ となる.

この $q$ 類似は次のようになる. $1 \le i, j \le n$ に対して $\beta_{ij} \in \Delta^+ \setminus \Delta_I$ を $\beta_{ij} = \alpha_{n-i+1} + \cdots + \alpha_n + \cdots + \alpha_{n+j-1}$ とし, $Y_{\beta_{ij}}$ を単に $Y_{ij}$ と書くこととする. このとき $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ は生成元 $Y_{ij}$ $(1 \le i, j \le n)$ と基本関係式

$$Y_{ij}Y_{kl} = \begin{cases} qY_{kl}Y_{ij} & (i < k, j = l \text{ または } i = k, j < l) \\ Y_{kl}Y_{ij} & (i < k, j > l) \\ Y_{kl}Y_{ij} + (q - q^{-1})Y_{kj}Y_{il} & (i < k, j < l) \end{cases}$$

をもつ $\mathbb{C}(q)$ 代数である ($U_q(\mathfrak{l}_I)$ の adjoint 作用は省略). このとき $f_p$ $(1 \le p \le n)$ の $q$ 類似は

$$f_{q,p} = \sum_{\sigma \in S_p} (-q)^{l(\sigma)} Y_{1,\sigma(1)} \cdots Y_{p,\sigma(p)}$$

であり, $f_{q,n}$ が基本相対不変式の $q$ 類似となる. (他の場合の $q$ 類似の具体形については [6], [13] を参照. たとえば (V) の場合, $f_{q,r}$ は Pfaffian の $q$ 類似となる.)

## §3. $b$ 関数とその $q$ 類似

正則概均質ベクトル空間 $(L_I, \mathfrak{n}_I^+)$ の $b$ 関数は次のように定義される.
$h \in \mathbb{C}[\mathfrak{n}_I^-] \simeq S(\mathfrak{n}_I^+)$ に対して定数係数微分作用素 $h(\partial)$ を

$$h(\partial)\exp(x,y) = h(y)\exp(x,y) \quad (x \in \mathfrak{n}_I^+, y \in \mathfrak{n}_I^-)$$

により定める. 基本相対不変式 $f_r$ に対して

$${}^t f_r(\partial) f_r^{s+1} = b_r(s) f_r^s \quad (s \in \mathbb{C})$$

となる多項式 $b_r$ が存在し, これを $b$ 関数と呼ぶ. $\deg b_r = r$ である. 図1の各場合についてその $b$ 関数は次のようになる.

$$\begin{array}{lll}
\text{(I)} & b_r(s) = (s+1)(s+2)\cdots(s+n) & (r=n) \\
\text{(II)} & b_r(s) = (s+1)\left(s+\dfrac{2n-1}{2}\right) & (r=2) \\
\text{(III)} & b_r(s) = (s+1)\left(s+\dfrac{3}{2}\right)\left(s+\dfrac{4}{2}\right)\cdots\left(s+\dfrac{n+1}{2}\right) & (r=n) \\
\text{(IV)} & b_r(s) = (s+1)\left(s+\dfrac{2n-2}{2}\right) & (r=2) \\
\text{(V)} & b_r(s) = (s+1)(s+3)\cdots(s+2n-1) & (r=n) \\
\text{(VI)} & b_r(s) = (s+1)(s+5)(s+9) & (r=3)
\end{array}$$

$S(\mathfrak{n}_I^-)$ 上の非退化対称形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle f, g\rangle = ({}^t g(\partial) f)(0)$ で定めると, $f, g, h \in S(\mathfrak{n}_I^-)$ に対して

(i) $\langle \mathrm{ad}(u) f, g\rangle = \langle f, \mathrm{ad}({}^t u) g\rangle \quad (u \in U(\mathfrak{l}_I))$,

(ii) $\langle f, gh\rangle = \langle {}^t g(\partial) f, h\rangle$,

(iii) $\langle x_{-\beta}, x_{-\beta'}\rangle = \delta_{\beta,\beta'} \dfrac{2}{(\beta,\beta)} \quad (\beta, \beta' \in \Delta^+ \setminus \Delta_I)$,

(iv) $\langle fg, h\rangle = \langle f \otimes g, \widetilde{\Delta}(h)\rangle$

となる．ただし $\widetilde{\Delta} = ({}^t\cdot \otimes {}^t\cdot)\Delta({}^t\cdot)$ で $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$ は $\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$ $(x \in \mathfrak{g})$ で定まる $U(\mathfrak{g})$ の余積である．

この対称形式 $\langle\ ,\ \rangle$ の $q$ 類似により $b$ 関数の $q$ 類似を構成する．$U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ 上の双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle_q$ を weight vector $f, g$ に対して

$$\langle f, g\rangle_q = (q^{-1} - q)^{\deg f}(f, {}^t g)$$

により定める．$(\ ,\ )$ の性質により以下のことが成り立つ．

**命題 3.1.** (i) $\langle\ ,\ \rangle_q$ は対称非退化．

(ii) $\langle \mathrm{ad}(u)f,\ g\rangle_q = \langle f,\ \mathrm{ad}({}^t u)g\rangle_q \quad (u \in U_q(\mathfrak{l}_I))$.

(iii) $\langle Y_\beta, Y_{\beta'}\rangle_q = \delta_{\beta,\beta'}\left[\dfrac{(\beta,\beta)}{2}\right]_q^{-1} \quad (\beta, \beta' \in \Delta^+ \setminus \Delta_I)$.

(iv) $\langle fg, h\rangle_q = \langle f\otimes g, \widetilde{\Delta}(h)\rangle_q$.

**注 3.2.** $\widetilde{\Delta}(U_q(\mathfrak{n}_I^-)) \not\subset U_q(\mathfrak{n}_I^-)\otimes U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ なので (iv) では少し変形する必要がある．

上の命題により $\langle\ ,\ \rangle_q$ を $\langle\ ,\ \rangle$ の $q$ 類似とみなす．

**命題 3.3.** $g \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ に対して

$$\langle {}^t g(\partial) f, h\rangle_q = \langle f, gh\rangle_q \quad (f, h \in U_q(\mathfrak{n}_I^-))$$

となる ${}^t g(\partial) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}(q)}(U_q(\mathfrak{n}_I^-))$ が一意的に存在する．

証明．一意性は非退化性より明らかである．以下，存在性を示す．これは $g = Y_\beta$ $(\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I)$ で示せば十分である．

$\beta = \alpha_{i_0}$ のとき，$Y_\beta = F_{i_0}$ だから式 (1.1) より ${}^t Y_\beta(\partial) = [d_{i_0}]_q^{-1} r'_{i_0}$ とすればよい．

$\beta > \alpha_{i_0}$ のとき，$Y_\beta = c\,\mathrm{ad}(F_i)Y_{\beta'}$ $(\beta' = \beta - \alpha_i)$ となる $i \in I$ と $c \in \mathbb{C}(q)$ が存在する．このとき ${}^t Y_\beta(\partial) = c\left({}^t Y_{\beta'}(\partial)\,\mathrm{ad}(E_i) - q_i^{\beta'(h_i)}\,{}^t Y_{\beta'}(\partial)\,\mathrm{ad}(E_i)\right)$ と帰納的に定めればよい． □

$f, g \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ がそれぞれ weight $\mu, \nu$ をもつ weight vector のとき，${}^t g(\partial) f$ の weight は定義より $\mu - \nu$ となる．特に ${}^t f_{q,r}(\partial) f_{q,r}^{s+1}$ $(s \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の weight は $s\lambda_r (= -2s\varpi_{i_0})$ である．

**補題 3.4.** $i \in I$ に対し，

$${}^t f_{q,r}(\partial)\,\mathrm{ad}(E_i) = \mathrm{ad}(E_i)\,{}^t f_{q,r}(\partial), \qquad {}^t f_{q,r}(\partial)\,\mathrm{ad}(F_i) = \mathrm{ad}(F_i)\,{}^t f_{q,r}(\partial).$$

証明. $y \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ に対し $\mathrm{ad}(E_i)(f_{q,r}y) = f_{q,r}\mathrm{ad}(E_i)y$, $\mathrm{ad}(F_i)(f_{q,r}y) = f_{q,r}\mathrm{ad}(F_i)y$ となることと命題 3.1 (ii) を使えばよい. □

これより ${}^t f_{q,r}(\partial) f_{q,r}^{s+1}$ は highest weight vector であることが従う. 今, $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ は multiplicity free だから

$$ {}^t f_{q,r}(\partial) f_{q,r}^{s+1} = \tilde{b}_{q,r,s} f_{q,r}^s $$

となる $\tilde{b}_{q,r,s} \in \mathbb{C}(q)$ が存在する. $r_{i_0}$ や $\mathrm{ad}(E_i)$ $(i \in I)$ の作用をみてやることにより $\tilde{b}_{q,r}(q_{i_0}^s) = \tilde{b}_{q,r,s}$ となる多項式 $\tilde{b}_{q,r}(t) \in \mathbb{C}(q)[t]$ が存在することがわかる. 以下 $\tilde{b}_{q,r}(q_{i_0}^s)$ を単に $b_{q,r}(s)$ と書くことにする.

**定理 3.5.** 正則概均質ベクトル空間 $(L_I, \mathfrak{n}_I^+)$ の基本相対不変式 $f_r$ に対する $b$ 関数を $b_r(s) = \prod_{j=1}^r (s + a_j)$ とする. このときその $q$ 類似は (定数倍を除いて)

$$ b_{q,r}(s) = \prod_{j=1}^r q_{i_0}^{s+a_j-1} [s + a_j]_{q_{i_0}} $$

とかける.

**注 3.6.** $B, C$ 型では $a_j \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ であるが, この場合では $q_{i_0} = q^2$ なので定理の $q_{i_0}^{s+a_j-1}$ や $[s + a_j]_{q_{i_0}}$ は $\mathbb{C}(q)$ 内で定義される.

定理 3.5 は各 type 毎に $b_{q,r}$ を計算することによって示される. 次節でその計算法を簡単に述べる.

## §4. $b_{q,r}(s)$ の計算

まずいくつか準備をしておく.

**命題 4.1.** $f_{q,r}$ は $U_q(\mathfrak{n}^-)$ の center の元である. 特に $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の center の元である.

証明. $i \in I$ に対し $[F_i, f_{q,r}] = \mathrm{ad}(F_i) f_{q,r} = 0$ である. よって $[F_{i_0}, f_{q,r}] = 0$ を示せばよい.

式 (2.1) より $F_{i_0} f_{q,r} = c f_{q,r} F_{i_0}$ となる $c \in \mathbb{C}(q)$ が存在する. 一方, $r'_{i_0}(Y_\beta) = \delta_{\beta, \alpha_{i_0}}$ に注意すると ${r'_{i_0}}^2(F_{i_0} f_{q,r}) = {r'_{i_0}}^2(f_{q,r} F_{i_0}) = (q_{i_0}^2 + 1) r'_{i_0}(f_{q,r})$ $(\neq 0)$ となることがわかり, $(q_{i_0}^2 + 1) r'_{i_0}(f_{q,r}) = c(q_{i_0}^2 + 1) r'_{i_0}(f_{q,r})$ となる. したがって $c = 1$. □

$f_{q,r}$ が highest weight vector であることより $\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_I, y \in U_q(\mathfrak{n}_I^-)_{-\mu}$ に対して

$$ {}^tY_\beta(\partial)(f_{q,r}^n y) = q^{(\beta,\mu)}\,{}^tY_\beta(\partial)(f_{q,r}^n)y + f_{q,r}^n\,{}^tY_\beta(\partial)y \tag{4.1} $$

となることが示され, とくに命題 4.1 より次が従う:

$$ {}^tY_\beta(\partial)(f_{q,r}^n) = q_{i_0}^{n-1}[n]_{q_{i_0}} f_{q,r}^{n-1}\,{}^tY_\beta(\partial)f_{q,r}. \tag{4.2} $$

$b$ 関数の $q$ 類似を次のようにして計算する.

$L_I$-orbit $C_p$ に対応する highest weight vector $f_p$ はある可換放物型概均質ベクトル空間 $(L_{(p)}, \mathfrak{n}_{(p)}^+)$ の基本相対不変式になっており, $f_{q,p}$ はその $q$ 類似である. ($(L_{(p)}, \mathfrak{n}_{(p)}^+)$ の構成は [22], [23] 参照.) $f_{q,p}$ の量子 $b$ 関数を $b_{q,p}$ で表し, これらを用いて $b_{q,r}$ を求める.

まず $b_{q,1}$ を求める. $f_{q,1} = cF_{i_0}$ $(c \in \mathbb{C}(q)^*)$ とかけるので

$$ {}^tf_{q,1}(\partial)f_{q,1}^{s+1} = c^{s+2}[d_{i_0}]_q^{-1} r'_{i_0}(F_{i_0}^{s+1}) = c^2[d_{i_0}]_q^{-1} q_{i_0}^s [s+1]_{q_{i_0}} (cF_{i_0})^s $$

となり, $b_{q,1}(s) = c^2[d_{i_0}]_q^{-1} q_{i_0}^s\,[s+1]_{q_{i_0}}$ である.

次に $2 \le p \le r$ とし, $b_{q,p}$ を $b_{q,p-1}$ で表すことを考える. 定義より $\langle f_{q,p}^{s+1}, f_{q,p}^{s+1}\rangle_q = b_{q,p}(s)\langle f_{q,p}^s, f_{q,p}^s\rangle_q$ だから $\langle f_{q,p}^s, f_{q,p}^s\rangle_q$ と $\langle f_{q,p-1}^s, f_{q,p-1}^s\rangle_q$ を比較すればよい.

以下の条件をみたす $\beta_{p,j} \in \Delta^+ \setminus \Delta_I$, $u_{p,j} \in U_q(\mathfrak{l}_I) \cap U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ が存在する:

**(C1)** : $f_{q,p} = \sum_j Y_{\beta_{p,j}} \mathrm{ad}(u_{p,j}) f_{q,p-1}$.

**(C2)** : ${}^tY_{\beta_{p,j}}(\partial) f_{q,p} = c_{p,j}\mathrm{ad}(u_{p,j}) f_{q,p-1}$.

**(C3)** : ${}^tY_{\beta_{p,j}}(\partial) f_{q,p-1} = 0$.

ここで $c_{p,j} \in \mathbb{C}(q)$ は各 type 毎に求まるものである. これらと命題 3.1 (ii), 式(4.1), (4.2) を使うと, $s \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し $\langle f_{q,p}^s, f_{q,p}^s\rangle_q = c_p(s)\langle f_{q,p-1}^s, f_{q,p-1}^s\rangle_q$ となる $c_p(s) \in \mathbb{C}(q)$ が求まる. したがって

$$ b_{q,p}(s) = \frac{c_p(s+1)}{c_p(s)} b_{q,p-1}(s) $$

となり, 量子 $b$ 関数 $b_r(s)$ が帰納的に求まる.

例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ のときを考えると. $(L_{(p)}, \mathfrak{n}_{(p)}^+)$ の座標環の $q$ 類似 $U_{q,p}$ は $Y_{ij}$ $(1 \le i,j \le p)$ で生成される $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の部分代数である. ここで root $\alpha_i, \beta_{ij}$ や $U_q(\mathfrak{n}_I^-)$ の元 $Y_{ij}$, $f_{q,p}$ は例 2.2 で定めたものとする.

このとき $d_{i_0} = d_n = 1$, $q_{i_0} = q_n = q$, $f_{q,1} = F_n$ より $b_{q,1}(s) = q^s\,[s+1]_q$ である. また $f_{q,p}$ の $f_{q,p-1}$ による分解 **(C1)** は

$$ f_{q,p} = \sum_{k=1}^{p} (-q^{-1})^{p-k} Y_{p,k}\,\mathrm{ad}(u_k) f_{q,p-1} $$

で与えられる．ここで $u_k = F_{n+k}F_{n+k+1}\cdots F_{n+p-1}$ である．これは行列式の余因子展開の $q$ 類似である．また

$$ {}^tY_{p,k}(\partial)f_{q,p} = (-q)^{p+k-2}\mathrm{ad}(u_k)f_{q,p-1} $$

である．このとき

$$ \langle f^s_{q,p}, f^s_{q,p}\rangle_q = q^{\frac{s(s+2p-3)}{2}}\prod_{i=1}^{s}[i+p-1]_p\,\langle f^s_{q,p-1}, f^s_{q,p-1}\rangle_q $$

となり，$b_{q,p}(s) = q^{s+p-1}[s+p]_q\, b_{q,p-1}(s)$ である．したがって $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ のとき量子 $b$ 関数 $b_{q,n}$ は

$$ b_{q,n}(s) = \prod_{p=1}^{n} q^{s+p-1}[s+p]_q $$

となる．

他の場合における $f_{q,p}$ の分解(**C1**) の具体形は [7] を参照．

# 参考文献


[1] V. G. Drinfel'd, Hopf algebra and the Yang-Baxter equation, *Soviet Math. Dokl.* **32** (1985), 254–258.

[2] A. Gyoja, Highest weight modules and $b$-functions of semi-invariants, *Puble. RIMS, Kyoto Univ.* **30** (1994), 353–400.

[3] M. Hashimoto and T. Hayashi, Quantum multilinear algebra, *Tohoku Math. J.* , **44** (1992), 471–521.

[4] J. C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, **6**, American Mathematical Society, 1995.

[5] M. Jimbo, A $q$-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), 63–69.

[6] A. Kamita, Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces III, *Hiroshima Math. J.* **30** (2000), 79–115.

[7] A. Kamita, Quantum b-functions of prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type, math. QA/0006209.

[8] A. Kamita, Y. Morita and T. Tanisaki, Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces I, *Hiroshima Math. J.* **28** (1998), 527–540.

[9] T. Kimura, The $b$-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, *Nagoya Math. J.* **85** (1982), 1–80.

[10] G. Lusztig, Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. in Math.* **70** (1988), 237–249.

[11] G. Lusztig, Quantum groups at roots of 1, *Geometriae Dedicata* **35** (1990), 89–114.

[12] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1993.

[13] Y. Morita, Quantum deformations of certain prehomogeneous vector spaces II, *Osaka J. Math.* **37** (2000), 385–403.

[14] M. Noumi, T. Umeda and M. Wakayama, A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$, *Duke Math. J.* **76** (1994), 567–594.

[15] M. Noumi, H. Yamada and K. Mimachi, Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n;\mathbb{C})$ and the zonal spherical functions, *Japan. J. Math.* , **19** (1993), 31–80.

[16] T. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), 1–155.

[17] E. Strickland, Classical invariant theory for the quantum symplectic group, *Adv. Math.* **123** (1996), 78–90.

[18] S. Suga, Highest weight modules associated with classical irreducible regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type, *Osaka J. Math.* **28** (1991), 323–346.

[19] E. Taft and J. Towber, Quantum deformation of flag schemes and Grassmann schemes I, A $q$-deformation of the shape algebra for $GL(n)$, *J. Alg.* **142** (1991), 1–36.

[20] T. Tanisaki, Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal $R$-matrices for quantum algebras, in: *Infinite Analysis, Part B*, 941–961 (eds. A. Tsuchiya, T. Eguchi and M. Jimbo) Proc. Kyoto 1991 (Advanced Series in Mathematical Physics **16**), River Edge, N. J., 1992 (World Scientific)

[21] T. Tanisaki, Highest weight modules associated to parabolic subgroups with commutative unipotent radicals, in: *Algebraic Groups and their Representations*, 73–90 (eds. R. W. Carter and J. Saxl) 1998 Kluwer Academic Publishers.

[22] A. Wachi, Contravariant forms on generalized Verma modules and $b$-functions. *Hiroshima Math. J.* **29** (1999), 193–225.

[23] N. R. Wallach, The analytic continuation of the discrete series. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979), 19–37.