

代用電荷法による非有界な二重連結領域の数値等角写像

神戸商船大学 応用数理研究室 井上哲男 (Tetsuo Inoue)
北坂恭万 (Takayo Kitasaka)
藤井利雄 (Toshio Fujii)
平石元太 (Genta Hiraishi)

従来とは異なった代用電荷法のポテンシャル論的スキームが、非有界な多重連結領域の数値等角写像において最近提案された。それは、極値的重みつき多項式に関する漸近的定理に基づいて考察されており、「不変的かつ相対的」と呼ばれる特性をもっている。このスキームを典型的な例題に適用し、高精度の数値結果が得られることを示す。さらにスキームに修正を加え、より精度の高い近似関数が得られることを示す。

1. はじめに

代用電荷法とは、電気工学の問題、数値等角写像問題や Dirichlet 問題に適応される対数ポテンシャルの一次結合による近似解法である。この方法は、同次連立一次方程式の解法だけを要求するが、滑らかな曲線によって囲まれた領域に関する領域問題に対しては、かなり正確な解を得ることが可能である。

天野 [2,3] は、円弧スリットまたは放射スリットを領域内にもつ二種類の等角写像の近似スキームを提案した。久原、米沢、小島、安田 [11,12] もまた、円環領域内に円弧スリットまたは放射スリットをもつ写像関数のスキームを提案した。それらは静電気の観点から述べられており、Bergman [5] の論文に基づく代用電荷法を使用している。

最近、従来とは異なった代用電荷法のポテンシャル論上のスキームが、非有界な多重連結領域での数値等角写像において提案された [9]。それは、極値的重みつき多項式 [7,8,13-15] の漸近的定理に基づいており、領域の内部と外部で「不変的かつ相対的」と呼ばれる特性をもつ [9]。この論文では、このスキームを真の関数が分からない場合の典型的な例題に適用し、少しの例外を除いて高精度の数値結果が得られることを示す。さらにスキームに修正を加え、その例外をも克服できることを示す。

2. 数値等角写像におけるスキーム

D と D' を非有界な二重連結領域とする。境界 γ と γ' はそれぞれジョルダン曲線 γ_i ($i = 0, 1$) と γ'_i ($i = 0, 1$) から成るものとし、 γ'_0 を円 $\{w : |w| = r_0\}$ 、また γ_0 と γ'_0 は、原点を内部に含むと仮定する。また、 $f(z)$ は D を D' に等角に写像し、 $D \cup \gamma$ を $D' \cup \gamma'$ へ連続に一一対応させる。 γ_i が γ'_i に対応している。このとき $f(z)$ は $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$ の条件の下で、ただ一つに決定される [1]。

非有界な多重連結領域における等角写像を計算するスキーム

$$f_n(z) = z \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z_{n,i}}{z}\right)^{\alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \tag{2.1}$$

が [9] において最近提案された。ここでは電荷点 $\{z_{n,i}\}_{i=1}^n$ を γ の内部に適切に選ぶ。そして、領域 D' が $\{w : |w| > r_0\}$ で放射スリット γ'_1 をもつとき、次のような $f(z)$ の近似関数を計算するスキームを提案している。

スキーム 2.1. $f(z)$ の近似式 $f_n(z)$ は、次の様にして得られる。

(2a) $\{z_{n,j}^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}$ と $\{c_{n,j,i}^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}$ ($j = 0, 1$) は、 $n_0 = n_1 = n$ の条件をもち、それぞれ γ_j の内部と γ_j 上に適切に選ばれる。

(2b) $\alpha_i^{(j)}$ ($i = 0(1)n, j = 0, 1$) が $2(n+1)$ の同次連立一次方程式

$$\alpha_0^{(0)} + \log |\zeta_{n,k}^{(0)}| + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(j)} \log \left| 1 - \frac{z_{n,i}^{(j)}}{\zeta_{n,k}^{(0)}} \right| = 0 \quad (k = 1(1)n), \quad (2.2)$$

$$\alpha_0^{(1)} + \arg(\zeta_{n,k}^{(1)}) + \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(j)} \arg \left(1 - \frac{z_{n,i}^{(j)}}{\zeta_{n,k}^{(1)}} \right) = 0 \quad (k = 1(1)n), \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} = 0, \quad (2.4)$$

の解であるとき, $\{z_{n,i}^{(j)}\}_{i=1}^n$ における電荷はそれぞれ $\{\alpha_i^{(j)}\}_{i=1}^n$ ($j = 0, 1$) によって与えられる.

(2c) 近似式 $f_n(z)$ は

$$f_n(z) = z \prod_{j=0}^1 \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z_{n,i}^{(j)}}{z} \right)^{\alpha_i^{(j)}}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} = 0. \quad (2.5)$$

により表現される. ただし, ここでは

$$\alpha_0^{(0)} \simeq -\log r_0, \quad \alpha_0^{(1)} \simeq -\theta_1 \quad (2.6)$$

が成り立つ. また θ_1 は γ_1' の偏角である.

このスキームを 図.1 の領域 D を領域 D' に写像する未知の関数 $w = f(z)$ の近似式 $f_n(z)$ を求めるために適用する. D の境界 γ_0 と γ_1 は, 中心をそれぞれ $(0,0)$, $(6,0)$ とする半径=1 の円である. D' は, 原点を中心とする単位円の境界 γ_0' と実軸上に未知の放射スリット γ_1' をもつ. γ_1, γ_0 上の拘束点とその内部の電荷点をそれぞれ

$$l \exp \left(\frac{2\pi j(i-1)}{n} \right) + 6, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (2.7)$$

$$l \exp \left(\frac{2\pi j(i-1)}{n} \right), \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (2.8)$$

の $l=1$ と $l=0.25$ に選び, $n=13$ に対しての (2.2), (2.3), (2.4) の同次連立一次方程式を解く. 表.1 と表.2 に γ_0, γ_1 上での電荷をそれぞれ示す.

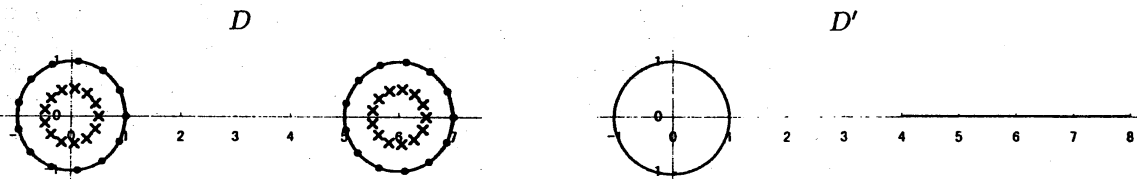


図.1 領域 D, D' および 拘束点と電荷点

α_1	-5.028351940500782D-002	α_2	-7.186208513177479D-002
α_3	-4.612097758238274D-002	α_4	-6.190047957088519D-002
α_5	-2.043511039469003D-002	α_6	4.687016772432202D-003
α_7	2.207733956097742D-001	α_8	2.207733956099171D-001
α_9	4.687016772280016D-003	α_{10}	-2.043511039453971D-002
α_{11}	-6.190047957100797D-002	α_{12}	-4.612097758230312D-002
α_{13}	-7.186208513181214D-002		

表.1 $n=13, l=0.25$ のときの γ_1 での電荷

α_1	5.695991160203134D-002	α_2	7.748436759328502D-002
α_3	8.078779659179439D-002	α_4	7.869316733300338D-002
α_5	7.853151651389137D-002	α_6	7.802176743015543D-002
α_7	7.800142873685156D-002	α_8	7.800142873683039D-002
α_9	7.802176743018827D-002	α_{10}	7.853151651383915D-002
α_{11}	7.869316733307620D-002	α_{12}	8.078779659171624D-002
α_{13}	7.748436759333732D-002		

表.2 $n=13, l=0.25$ のときの γ_0 での電荷

正則関数における最大値の原理により, 誤差は境界でのみ評価すればよい. ここでは γ_1 上の拘束点の midpoint と γ_0 上の拘束点の midpoint

$$\exp\left(\frac{2\pi j(i-1)}{n} + \frac{\pi j}{n}\right) + 6, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (2.11)$$

$$\exp\left(\frac{2\pi j(i-1)}{n} + \frac{\pi j}{n}\right), \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (2.12)$$

において評価する. 計算結果を表.3 に示す.

i	γ_1	γ_0
1	2.715517895325526D-006	2.775446576938401D-002
2	2.702046933313679D-006	2.775437134680425D-002
3	2.659818091500182D-006	2.775449608840819D-002
4	2.545718812396758D-006	2.775439122598389D-002
5	2.236226856760292D-006	2.775446667705006D-002
6	1.460794000097605D-006	2.775441231757403D-002
7	1.579703351592222D-001	2.775445645817531D-002
8	1.460794000164224D-006	2.775441231757392D-002
9	2.236226857136327D-006	2.775446667704984D-002
10	2.545718812486122D-006	2.775439122598444D-002
11	2.659818091700238D-006	2.775449608840852D-002
12	2.702046933605951D-006	2.775437134680581D-002
13	2.715517895332585D-006	2.775446576938434D-002

表.3 $n=13, l=0.25$ の場合の γ_1 と γ_0 での誤差

真の関数が解らないので, γ_1 上では

$$||f_n(z)| - |f(z)||, \quad (2.13)$$

γ_0 上では

$$|\arg(f_n(z)) - \arg(f(z))| \quad (2.14)$$

により誤差を求める. ただし, $\arg(f(z)) = 0, |f(z)| = 1$ である.

また

$$\alpha_0^{(1)} - (-\theta_1) = \alpha_0^{(1)} - (-0) = 3.686287386450715D - 018 \quad (2.9)$$

$$\alpha_0^{(0)} - (-\log r_0) = \alpha_0^{(0)} - (-\log 1) = -2.814687049569774D - 002. \quad (2.10)$$

は (2.6) 式が高精度で成立することを示す.

以上より, 拘束点と電荷点を一様分布するように与えた場合 (定義 [6] 参照.), スキーム 2.1 が (2.12) における $i=7$ を除き高精度で成立することが解る.

3. スキーム 2.1 の修正とその適用

前章の例外を克服するために スキーム 2.1 の修正を行う. 図.1 において D と D' は実軸に関して対称であるから, 上半平面 $\{z : \text{Im}(z) \geq 0\}$ の問題に置き換えることができる.

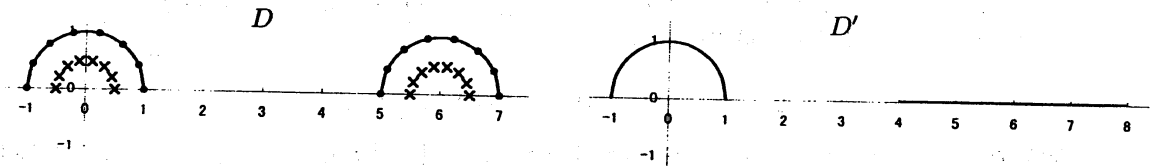


図.2 領域 D, D' および 拘束点と電荷点

表.1, 表.2 に基づき スキーム 2.1 を

$$f_n(z) = z \prod_{j=0}^1 \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z_i^{(j)}}{z}\right)^{\alpha_i^{(j)}}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} = \frac{7}{13}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} = 0. \quad (3.1)$$

の様に修正する.

このスキームを 図.2 のような領域 D を D' に写像する近似式 $f_n(z)$ を求めるために適用する. γ_1, γ_0 上の拘束点とその内部の電荷点をそれぞれ

$$l \exp\left(\frac{\pi j(i-1)}{n}\right) + 6, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (3.2)$$

$$l \exp\left(\frac{\pi j(i-1)}{n}\right), \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n). \quad (3.3)$$

の $l=1$ と $l=0.25$ で与え, $n=7$ に対しての (2.2), (2.3) および

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(0)} = \frac{7}{13}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} = 0. \quad (3.4)$$

の同次連立一次方程式を解く.

誤差は, γ_1 の拘束点の midpoint と γ_0 上の拘束点の midpoint

$$\exp\left(\frac{\pi j(i-1)}{n} + \frac{\pi j}{2n}\right) + 6, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (3.5)$$

$$\exp\left(\frac{\pi j(i-1)}{n} + \frac{\pi j}{2n}\right), \quad j = \sqrt{-1}, \quad (i = 1(1)n) \quad (3.6)$$

において前節と同様に評価する.

i	γ_1	γ_0
1	7.468744828109033D-003	3.930340367564533D-002
2	7.418708681748730D-003	3.882699348999252D-002
3	7.390907519888089D-003	3.897587032993066D-002
4	7.453594706278350D-003	3.897463162544823D-002
5	7.330500497691219D-003	3.882873052249791D-002
6	7.669325532215494D-003	3.929963046816287D-002
7	5.356164829409279D-003	3.644608234957381D-002

表.4 $n=7, l=0.25$ の場合の γ_1' と γ_0' での誤差

また

$$\alpha_0^{(1)} - (-\theta_1) = \alpha_0^{(1)} - (-0) = -4.868139892020632D - 003 \quad (3.7)$$

$$\alpha_0^{(0)} - (-\log r_0) = \alpha_0^{(0)} - (-\log 1) = 3.469252510477629D - 002 \quad (3.8)$$

は (2.6) 式が高精度で成立することを示す。

以上より, 修正を加えたスキームが前節の例外を克服し, より高精度で成立していることが解る。

さらに (3.5), (3.6) の $l=0.20, 0.15$ として, 電荷点配置を変えた場合の計算を行った。数値結果を以下に示す。

3a) $l=0.20$ での誤差

i	γ_1	γ_0
1	4.803376845180699D-003	3.426649269176207D-002
2	4.924035262132122D-003	3.404512437756657D-002
3	4.812423216718474D-003	3.411197955703460D-002
4	4.934752871630134D-003	3.410942374806236D-002
5	4.764570496386840D-003	3.404866093141878D-002
6	5.119942531486242D-003	3.425898233719249D-002
7	3.139538795785384D-003	3.285977569703469D-002

表.5 $n=7, l=0.20$ の場合の γ_1 と γ_0 での誤差

また,

$$\alpha_0^{(1)} - (-\theta_1) = \alpha_0^{(1)} - (-0) = -4.868139892020632D - 003 \quad (3.9)$$

$$\alpha_0^{(0)} - (-\log r_0) = \alpha_0^{(0)} - (-\log 1) = 3.469252510477629D - 002 \quad (3.10)$$

は (2.6) 式が高精度で成立することを示す。

3b) $l=0.15$ での誤差

i	γ_1	γ_0
1	2.125972313899409D-003	3.082247074053923D-002
2	2.301433471024916D-003	3.073776886780466D-002
3	2.182490606392442D-003	3.076311186968050D-002
4	2.296592077730717D-003	3.076013607658867D-002
5	2.149793975855931D-003	3.074187474931600D-002
6	2.435348677287085D-003	3.081374039052098D-002
7	9.690287522736179D-004	3.027566663671610D-002

表.6 $n=7, l=0.15$ の場合の γ_1 と γ_0 での誤差

また,

$$\alpha_0^{(1)} - (-\theta_1) = \alpha_0^{(1)} - (-0) = -2.236920237350427D - 003 \quad (3.11)$$

$$\alpha_0^{(0)} - (-\log r_0) = \alpha_0^{(0)} - (-\log 1) = 3.124021956956512D - 002 \quad (3.12)$$

は (2.6) 式が高精度で成立することを示す。

以上より, 電荷点配を (3.5), (3.6) の $l=0.20, 0.15$ とした場合にも, 修正を加えたスキームが高精度で成立することが解る。

4. 結論

この論文では, 典型的な二重連結領域に対して, 代用電荷法のポテンシャル論的スキームの適用を行った。計算結果は, 少しの例外を除き, そのスキームが高精度を保つことを示した。そこでそのスキームに修正を加え, 再び適用を行った。例外は克服され, より高精度の $f_n(z)$ を得ることができた。なお, 数値計算には MsDevf90 (PC9821-NEC) を用いた。

今後は、修正を加えることによりスキームの精度が上がる理由を調べ、そして、修正が加えられたスキームを用いての逆関数の場合である D' から D への数値実験を研究課題としたい。

参考文献

- [1] AHLFORS, L.V., *Complex Analysis*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] AMANO, K., Numerical conformal mapping onto the radial slit domains, (in Japanese), *Trans. Japan Soc. Ind. App. Math.* 5 (1995), 83-96.
- [3] AMANO, K., Numerical conformal mapping onto the circular slit domains, *Trans. Inform. Process. Soc. Japan*, (in Japanese), 36 (1995), 219-225.
- [4] AMANO, K., A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains, *SIAM J. Sci. Comput.* 19 (1998), 1169-1187.
- [5] BERGMAN, S., *The Kernel Function and Conformal Mapping*, (Mathematical Survey, V), Amer. Math. Soc., New York, 1950.
- [6] GAIER, D., *Lecture on Complex Approximation*, Birkhäuser, 1987.
- [7] INOUE, T., Asymptotic behavior of extremal weighted polynomials, *Mathématica, L'acad. Répub. Soc. Rouman.* 35 (1993), 29-34.
- [8] INOUE, T., Applications of asymptotic theorem on weighted extremal polynomials, (in Japanese), *Trans. Japan Soc. Ind. App. Math.* 4 (1994), 151-155.
- [9] INOUE, T., KUHARA, H., AMANO, K. and OKANO, D., Theoretical scheme on numerical conformal mapping of unbounded multiply connected domain by fundamental solutions method, *Intern. J. Math. & Math. Sci.* (to appear).
- [10] KATSURADA, M. and OKAMOTO, H., On the collocation points of the fundamental solutions method for the potential problem, *Comp. Math. Appl.* 31 (1996), 123-137.
- [11] KUHARA, H., YONEZAWA, T. AND OSHIMA, S., Construction of transformations mapping multiply connected regions conformally onto the canonical ones using the charge simulation method, (in Japanese), *Paper of Technical Meeting on Electromagnetic Theory, IEE and IEIC of Japan, EMT-96-110*, (1996).
- [12] KUHARA, H., OSHIMA, S. and YASUDA, K., A charge simulation method for canonical conformal mapping of multiply connected regions onto rings with radial slits, *Paper of Technical Meeting on Electromagnetic Theory, IEE and IEIC of Japan, EMT-97-83*, (1997).
- [13] MHASKAR, H.N., Finite-infinite range inequalities in the complex plane, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* 14 (1991), 625-638.
- [14] MHASKAR, H.N. and SAFF, E.B., Where does the sup norm of a weighted polynomial live? *Constr. Approx.* 1 (1985), 71-91.
- [15] MHASKAR, H.N. and SAFF, E.B., Weighted analogues of capacity, transfinite diameter and Chebyshev constant, *Constr. Approx.* 8 (1992), 105-124.
- [16] MUROTA, K., On "invariance" of schemes in the fundamental solution method, (in Japanese), *Trans. Inform. Process. Soc. Japan* 3 (1993), 533-535.
- [17] MUROTA, K., Comparison of conventional and "invariant" schemes of fundamental solutions method for annular domains, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 12 (1995), 61-85.