数理解析研究所講究録
1194巻 2001年 129-134

応募者数が一般化された一様分布に従う秘書問題

愛知大学経営学部　川合　益代 (Masuyo Kawai), 玉置　光司 (Mitsushi Tamaki)
Faculty of Business Administration, Aichi University

1　はじめに

最も単純な秘書問題である古典的秘書問題 (Gilbert and Mosteller[2] 参照) は、以下のように記述できる。ある雇用者が1人の秘書を採用するために面接を行い、これに応募してきたn人に毎時1人ずつ面接を行う。雇用者は、全応募者の中で最良の応募者を採用したいと考えており、実際に採用した応募者が最良のとき成功とみなす。このとき、成功確率を最大にする政策とその下での成功確率を求める問題が古典的秘書問題である。ただし、雇用者は、最良の応募者から順に$1, 2, \ldots, n$と順位付けすることができ、面接を行ったら直ちにその応募者を採用するかまたは採用せずに次の応募者を面接するかを決定しなければならない。採用するか否かの意思決定は、応募者の相対順位 (今まで面接した中での順位) にのみ依存して行い、一度不採用にした応募者は、後で採用することができない。もし$(n-1)$番目の応募者まで採用しないならば、必ず最後の応募者を採用しなければならないものとする。ここでは、相対順位1の応募者を**候補者**と呼ぶことにする。この問題においてnが十分に大きい場合の最適政策は、最初の$e^{-1}n$人の応募者を採用せず、それ以降に出現する最初の候補者を採用することである。この政策下での成功確率もまたe^{-1}に近づく。

この論文では、応募者数Nが確率変数で区間$[m, n]$上の一様分布に従う場合を考察する。ただし、m, nは、与えられた正整数で$m \leq n$を満足する。$m=1$の場合は、既にPresman and Sonin[4]やRasmussen and Robbins [5] によって研究されている。$m=n$の場合は、古典的秘書問題に他ならない。このように我々の問題は、古典的秘書問題と従来考えられていた一様分布の問題を特殊な場合として包含するものであり、この意味でこの一様分布を一般化された一様分布と呼ぶ。一般化された一様分布においても、最適政策は、閾値ルール (threshold rule) となることが示され、特に、$\frac{m}{n} \to \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$となるように$m, n \to \infty$としたときの漸近的挙動は興味深い。

2　定式化と最適戦略

応募者数Nが有限な確率変数で、分布p_kをもつ場合、すなわち、$p_k = P\{N=k\}, 1 \leq k \leq n$の場合の最適方程式は、以下のように与えられる (たとえば、Petruccelli[3] 参照)。

$$f(r) = \max\{f^A(r), f^R(r)\}, \qquad 1 \leq r \leq n$$

ただし、

$$\begin{cases} f^A(r) = \dfrac{r}{\pi_r}\displaystyle\sum_{k=r}^{n}\dfrac{p_k}{k}, \\ f^R(r) = \dfrac{r}{\pi_r}\displaystyle\sum_{k=r+1}^{n}\dfrac{\pi_k}{k(k-1)}f(k). \end{cases} \tag{1}$$

上式において、$\pi_k = P\{N \geq k\} = \sum_{j=k}^{n} p_j$ である。また、時刻 r に候補者が出現している状態を簡単に r で表わし、$f(r)$ は、状態 r で最適にふるまって成功する確率であり、$f^A(r)$ ($f^R(r)$) は、状態 r で面前の候補者を採用して成功する確率 (採用しないでそれ以後最適にふるまって成功する確率) である。

B を OLA policy (the one-step look-ahead stopping region) による停止領域とする。すなわち、B は現在の候補者を採用することが、この人を採用しないで次に出現する候補者を採用することより有利である状態の集合である。このとき、(1) より以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} B &= \left\{1 \leq r \leq n : \frac{r}{\pi_r}\sum_{k=r}^{n}\frac{p_k}{k} \geq \frac{r}{\pi_k}\sum_{k=r+1}^{n}\frac{\pi_k}{k(k-1)}f^A(k)\right\} \\ &= \left\{1 \leq r \leq n : \sum_{k=r}^{n} k^{-1}g(k) \geq 0\right\}, \end{aligned}$$

ただし、

$$g(k) = p_k - \sum_{j=k+1}^{n}\frac{p_j}{j}.$$

B が closed (Chow ほか [1] 参照) であるための 1 つの十分条件は、$g(k)$ が k に関して高々 1 回だけ−から＋へ符号変化することである (坂口 [6] 参照)。このことが示されれば、OLA policy が最適であることが言え、B が最適停止域となる。

2.1 N が [m, n] 上の一様分布に従うケース

これ以降は、応募者数 N が $[m, n]$ 上の一様分布に従うものとして問題を考察する。このとき、p_k は、以下のようになる。

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{n-m+1}, & m \leq k \leq n \\ 0, & 1 \leq k < m. \end{cases}$$

定理 1 最適政策は、閾値 s の閾値ルールとなる。すなわち、正整数 s が存在して、最初の $(s-1)$ 人の応募者を採用せず、s 以降に出現する最初の候補者を採用することである。ただし、$s = \min_{1\leq r\leq n}\{\sum_{k=r}^{n} k^{-1}h(k) \geq 0\}$ で与えられる。

ここで、

$$h(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-m+1}\left(1-\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}\right), & m\le k\le n\\[2ex] \dfrac{1}{n-m+1}\left(1-\displaystyle\sum_{j=m}^{n}\frac{1}{j}-\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}\right), & 1\le k<m.\end{cases}$$

（証明） 定理 1 を示すには、$h(k)$ が、k に関して高々 1 回だけ－から＋へ符号変化することを示せば十分である。明らかに $h(k)$ が k に関して単調増加であり、かつ $h(n-1)>0$ より最適政策は閾値ルールである。

以上より、最適政策が決定したので、これ以降は成功確率を導出する。

以下の補題を示す前に、(1) より $f^R(r)$ が以下の再帰関係式に変形されることに注意しておこう。

$$f^R(r)=\frac{\pi_{r+1}}{(r+1)\pi_r}[f(r+1)+rf^R(r+1)]. \tag{2}$$

補題 1 最適政策下での成功確率 V は、以下のように与えられる。

$$V=\begin{cases}\dfrac{s}{n-m+1}\displaystyle\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}, & m<s\\[2ex] \dfrac{s}{n-m+1}\left(\displaystyle\sum_{j=s}^{m-1}\frac{1}{j}\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{j=m}^{n-1}\frac{1}{j}\sum_{k=j+1}^{n}\frac{1}{k}\right), & m\ge s.\end{cases}$$

（証明） はじめに、$m<s$ のケースに対して示す。
ここでは、(2) と定理 1 より $f^R(r)$ の再帰関係式を求め、これを r について各区間 ($s\le r\le n$、$m\le r<s$、$1\le r<m$) に対して再帰的に代入を繰り返すことで成功確率を導出する。

$s\le r\le n$ に対して、$f^R(r)=\frac{n-r}{(r+1)(n-r+1)}[f^A(r+1)+rf^R(r+1)]$ より $f^R(s)$ は以下のようになる。

$$f^R(s)=\frac{s}{n-s+1}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}. \tag{3}$$

$m\le r<s$ に対して、$f^R(r)=\frac{n-r}{n-r+1}f^R(r+1)$ より $f^R(m)$ は以下のようになる。

$$f^R(m)=\frac{n-s+1}{n-m+1}f^R(s).$$

$1\le r<m$ に対して、$f^R(r)=f^R(r+1)$ より成功確率は以下のようになる。

$$V=\frac{s}{n-m+1}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j}. \tag{4}$$

同様にして、$m \geq s$ のケースに対して示す。
$m \leq r \leq n$ に対して、(3) より $f^R(m)$ 以下のようになる。

$$f^R(m) = \frac{m}{n-m+1} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j}.$$

$s \leq r < m$ に対して、$f^R(r) = \frac{1}{r+1}[f^A(r+1) + rf^R(r+1)]$ より $f^R(s)$ は以下のようになる。

$$f^R(s) = \frac{s}{n-m+1} \left(\sum_{j=s}^{m-1} \frac{1}{j} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{k} \right). \tag{5}$$

$1 \leq r < s$ に対して、$f^R(r) = f^R(r+1)$ より成功確率は以下のようになる。

$$V = \frac{s}{n-m+1} \left(\sum_{j=s}^{m-1} \frac{1}{j} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{j=m}^{n-1} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^{n} \frac{1}{k} \right). \tag{6}$$

2.2 最適政策下での漸近的挙動

最適政策下で m, n が十分に大きいときの漸近的挙動を調べる。
$\frac{m}{n} \to \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ となるように $m, n \to \infty$ とし、$f^A(r), f^R(r)$ について $\frac{r}{n} \to x$ としたときの極限を $F^A(x), F^R(x)$ とする。 また、$\frac{s}{n} \to s^*$ とする。
このとき、$m \leq r \leq n$ に対して、定理1より $f^A(r) - f^R(r) = \frac{r}{n-r+1} \sum_{k=r}^{n} \frac{1}{k} \left(1 - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j}\right)$ であり、これより、

$$F^A(x) - F^R(x) \to \frac{-x \log x \left(1 + \frac{1}{2} \log x\right)}{1-x} \tag{7}$$

となる。ここで、上式を0とおくと、$x = e^{-2}$ となる。このことより、$\alpha < e^{-2}$ と $\alpha \geq e^{-2}$ の場合分けが生じる。

補題2 $m, n \to \infty$ のときの閾値 s^* は、以下のように与えられる。

$$s^* = \begin{cases} e^{-2}, & \alpha < e^{-2} \\ e^{-1}\sqrt{\alpha}, & \alpha \geq e^{-2}. \end{cases}$$

(証明) $\alpha < e^{-2}$ のケースに対しては、(7) より直ちに得られる。
$\alpha \geq e^{-2}$ のケースに対しては、$m, n \to \infty$ のとき、(1)、(5) は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} F^A(s^*) &\to \frac{s^*}{1-\alpha} \log \frac{1}{\alpha}, \\ F^R(s^*) &\to \frac{s^*}{1-\alpha} \log \frac{1}{\alpha} \left[\log \frac{\alpha}{s^*} - \frac{1}{2} \log \alpha \right]. \end{aligned}$$

ここで、$F^R(s^*) = F^A(s^*)$ とおいたときの根として与えられる。

補題３　$m, n \to \infty$ のときの成功確率 V^* は、以下のように与えられる。

$$V^* = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{1-\alpha}\right) e^{-2}, & \alpha < e^{-2} \\ \left(\dfrac{\sqrt{\alpha}\log\frac{1}{\alpha}}{1-\alpha}\right) e^{-1}, & \alpha \geq e^{-2}. \end{cases}$$

（証明）　$\alpha < e^{-2}$ のケースに対しては、(4) より、$\alpha \geq e^{-2}$ のケースに対しては、(6) より直ちに得られる。

3　おわりに

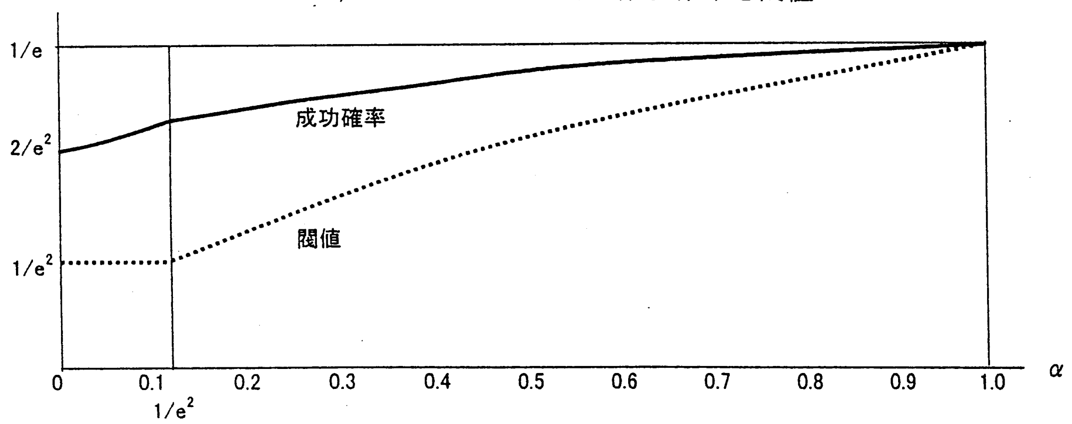
以上の結果より、応募者数 N が $[m, n]$ 上の一様分布に従う場合においても最適政策は、閾値ルールとなることが示され、$\frac{m}{n} \to \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ となるように $m, n \to \infty$ としたときの漸近的挙動において、$\alpha < e^{-2}$ のとき、閾値 s^* が α に全く依存しないことは、興味深い。

$\alpha = \frac{m}{n}$ となるように $m, n \to \infty$ としたときの成功確率と閾値の数値例の表と図を以下に与える。

表１　$m, n \to \infty$ としたときの数値例 (上段：成功確率、下段：閾値)

$\alpha \backslash n$	10	50	100	500	1000	∞
0.1	0.3515	0.3097	0.3053	0.3016	0.3012	0.3007
	2	7	14	68	136	$0.1353n$
0.3	0.3964	0.3558	0.3511	0.3475	0.3470	0.3466
	3	11	21	101	202	$0.2015n$
0.5	0.4035	0.3688	0.3647	0.3614	0.3610	0.3606
	3	14	27	131	261	$0.2601n$
0.7	0.4054	0.3733	0.3695	0.3667	0.3663	0.3659
	4	16	32	155	309	$0.3078n$
0.9	0.4023	0.3744	0.3710	0.3684	0.3680	0.3677
	4	18	36	175	350	$0.3490n$

図１　$m, n \to \infty$ としたときの成功確率と閾値



参考文献

[1] Chow,Y.S., Robbins, H. and Siegmund, D. *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping.* Houghton Mifflin, Boston. (1971)

[2] Gilbert, J. and Mosteller, F. Recognizing the maximum of a sequence, *J.Amer. Statist. Assoc.* **61**, 35-73. (1966)

[3] Petruccelli, J.D. On the bast-choice problem when the number of observation is random, *J. Appl. Prob.* **20**, 165-171. (1983)

[4] Presman, E.L. and Sonin, I.M. The best choice problem for a random number of objects, *Theor. Probab. Appl.* **17**, 657-668. (1972)

[5] Rasmussen, W.T. and Robbins, H. The candidate problem with unknown population size, *J. Appl. Prob.* **12**, 692-701. (1975)

[6] 坂口 実, 秘書問題とその周辺, Jornal of Economics and Management. **42**, No.2, 85-137. NUCBA.(1998)