数理解析研究所講究録
1194 巻 2001 年 213-218

連続性による極大単調写像の特徴づけ

高橋 渉* (Takahashi Wataru)　豊田 昌史† (Toyoda Masashi)
東京工業大学大学院 数理・計算科学専攻
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

本節を通して E を回帰的な実 Banach 空間とし, T を E から E^* への $D(T)(=\{x\in E \mid Tx\neq\emptyset\})=E$ であるような多価写像とする.

E から E^* への多価写像 T が**単調である**とは, 任意の $x,y\in E$, $x^*\in Tx$, $y^*\in Ty$ に対して,

$$\langle x-y,x^*-y^*\rangle\geq 0$$

が成り立つときをいう. また, 単調写像 T が**極大である**とは, 任意の $G(S)\supset G(T)$ となるような単調写像 S に対して, $G(S)=G(T)$ が成立するときをいう. ただし $G(S)$ とは, 写像 S のグラフで $G(S)=\{(x,x^*)\in E\times E^* \mid x\in E, x^*\in Sx\}$ である. 本論文では, この極大単調写像の性質を調べる.

T が**点 $x\in E$ において霞連続である** [1] とは, 任意の $y\in E$ に対して, E のある点列 $\{x_n\}$ と E^* のある点列 $\{x_n^*\}$, E^* の点 x^* が存在して次の条件をみたすことをいう;

1. ある 0 に収束するような正の実数列 $\{t_n\}$ が存在して,

$$x_n=(1-t_n)x+t_ny$$

と書ける.

2. $x_n^*\in \mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,Tx_n$, $x^*\in \mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,Tx$ であり, $\{x_n^*\}$ は x^* に汎弱収束する. (C を E^* の部分集合とするとき, $\mathrm{w}^*\text{-}\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\,C$ は C を含む最小の汎弱閉凸集合を指す.)

すべての $x\in E$ において霞連続であるとき, T を霞連続とよぶ. 1965 年 F. E. Browder [1] は, 霞連続性を用いて極大単調写像を特徴づけた. この結果は, 1974 年 R. E. Showalter [8] によって, 次のような定理にまとめられた.

*wataru@is.titech.ac.jp
†m-toyoda@is.titech.ac.jp

定理A. E を回帰的な実 *Banach* 空間とし, T を E から E^* への $D(T)=E$ であるような多価写像とする. このとき T が極大単調写像であるための必要十分条件は, T が霞連続な単調写像で, 任意の $x \in E$ に対して Tx が汎弱閉凸集合となることである.

また多価写像の連続性として, 上半連続がよく知られている. いま T が**点 $x \in E$ において上半連続である** (ただし E, E^* の位相は, それぞれ強位相, 汎弱位相で考える) とは, 集合 Tx の任意の汎弱近傍 V に対して, x の適当な近傍 U を選び, 任意の $z \in U$ に対して $Tz \subset V$ が成り立つことをいう. 1969 年 Browder [2] は, 汎弱閉凸値をもつ単調写像 T が極大となるための十分条件は, T が上半連続性をみたすことであると示した. その後, 上半連続性が必要条件であることも明かになる. ([6], [8]. 証明は [4], [5] を参照せよ.) 結局, 定理Aの霞連続を上半連続に置き換えた定理が成り立つことがわかっている.

単調写像の解析でよく用いられる連続性に, ヘミ連続がある. T が**点 $x \in E$ においてヘミ連続である**とは, 任意の $y \in E$ と Tx の任意の汎弱近傍 V に対して, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$T(x+[0,\delta)\,y) \subset V$$

が成り立つことをいう. 定理Aの霞連続を, このヘミ連続で置き換えられることが 1974 年 I. Cioranescu [3] によって示された. ([4]. [8] も見よ.)

さらにまた, 定理Aのヘミ連続をデミ連続に置き換えても成り立つことが, 1974 年 Showalter [8] によって示された. ただし T が**点 $x \in E$ においてデミ連続である**とは, x に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ と $x_n^* \in Tx_n$ であるような任意の点列 $\{x_n^*\}$ に対して, $\{x_n^*\}$ がある点 $x^* \in Tx$ に汎弱収束するような部分列を持つことをいう.

これまで見てきたように, 様々な連続性を用いて極大単調写像を特徴づける試みが成されてきた. T が汎弱閉凸値をもつ単調写像のとき, 4つの連続性は等しく極大性の必要十分条件を与える.

一方, 多価写像においてよく知られた連続性として下半連続がある. ここでひとつ疑問が沸く. この下半連続性を用いて極大単調写像を特徴づけることができないのだろうか? T が汎弱閉凸値をもつ単調写像のとき, 下半連続性がこれまでの連続性と同じように, 極大性の条件にならないのだろうか? 次節でこの問題を検討してみたい.

2 下半連続性による特徴づけの試み

E を実 Banach 空間とし, T を E から E^* への多価写像とする. 以下特に断りがなければ $D(T)=E$ で, E, E^* の位相はそれぞれ, 強位相, 汎弱位相で考えている. T が**点 $x \in E$ において下半連続である**とは, $Tx \cap V \neq \emptyset$ とな

るような任意の汎弱開集合 $V \subset E^*$ に対して, x のある近傍 U が存在して,

$$z \in U \Longrightarrow Tz \cap V \neq \emptyset$$

が成り立つことをいう. すべての $x \in E$ において下半連続であるとき, T を**下半連続**であるとよぶ.

この下半連続性は, 極大性の十分条件を与えることがわかった. 実際, 次のような結果を得た.

定理 1. E を実 *Banach* 空間とする. T を E から E^* への $D(T) = E$ となるような多価単調写像とし, 任意の $x \in E$ に対して Tx は汎弱閉凸値であるとする. いま T が下半連続であるならば, T は極大単調写像である.

証明. T が極大でないとする. ある単調写像 T' が存在して $G(T')$ は $G(T)$ を真に含む. $(x_0, x_0^*) \in G(T') \setminus G(T)$ をとると, 分離定理より, ある $z \in E$ が存在して

$$\langle z, x_0^* \rangle > \sup_{x^* \in Tx_0} \langle z, x^* \rangle$$

である.

$V = \{y^* \in E^* \mid \langle z, x_0^* \rangle > \langle z, y^* \rangle\}$ と定めると, V は Tx_0 を含む汎弱開集合である. T は x_0 で下半連続であるから, ある x_0 の近傍 U が存在して,

$$x \in U \Longrightarrow Tx \cap V \neq \emptyset$$

である. 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = (1 - \frac{1}{n})x_0 + \frac{1}{n}(x_0 + z) \ (n \in \boldsymbol{N})$$

と定める. $x_n \to x_0$ より, ある n_0 が存在して $x_{n_0} \in U$ である. ここで $x_{n_0}^* \in Tx_{n_0} \cap V$ をとる. T' は単調写像であるから,

$$\langle x_{n_0} - x_0, x_{n_0}^* - x_0^* \rangle \geq 0.$$

これより

$$\langle z, x_{n_0}^* - x_0^* \rangle \geq 0$$

を得る.

一方 $x_{n_0}^* \in V$ より

$$\langle z, x_0^* \rangle > \langle z, x_{n_0}^* \rangle.$$

ゆえに $\langle z, x_{n_0}^* - x_0^* \rangle < 0$ であり, これは不合理である. □

ここで, 上記定理の逆が成り立つかどうかみてみたい. すなわち, 次の命題が成り立つだろうか?

◆ E を実 Banach 空間とし, T を E から E^* への $D(T) = E$ となるような多価単調写像とする. いま T が極大であるならば, T は下半連続である.

この命題が成立すれば, 極大単調写像は下半連続性を用いて特徴づけられる. ところが, 実際は成り立たないことがわかった. 次のような例がある.

例. $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への多価写像 T を

$$Tx = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ [-1, 1] & x = 0, \\ +1 & x > 0, \end{cases}$$

のように定義する. この T は極大単調写像である. ところが T は下半連続ではない.

これまでの考察から, 単調写像の極大性は下半連続性では特徴づけられないことがわかった. しかし, 下半連続ならば極大であることは示されている. ならば, 下半連続性を少し弱めてみることで, 逆の命題も言えるようにならないだろうか? 下半連続性を含むような新しい連続性を導入し, 極大単調写像を特徴づけることができないだろうか? この冒険を次節でやってみたい.

3　新しい連続性の導入... そして特徴づけ

E を実 Banach 空間とし, T を E から E^* への多価写像で $D(T) = E$ とする. 特に断りがなければ E, E^* の位相は, それぞれ強位相, 汎弱位相で考える. この T が**点 $x \in E$ において擬連続である**とは, $Tx \subset V$ となるような任意の汎弱開集合 $V \subset E^*$ に対して, x のある近傍 U が存在して,

$$z \in U \Longrightarrow Tz \cap V \neq \emptyset$$

が成り立つことをいう. すべての $x \in E$ において擬連続であるとき, T は擬連続とよぶ. 定義からわかるように, T が点 x で下半連続であるならば T は x で擬連続である. また T が点 x で上半連続であるならば T は x で擬連続でもある. したがって, 擬連続性は上半・下半いづれもの連続性の拡張になっている. 一価写像の場合は, 通常の連続性の概念と一致する.

この連続性を用いて, 次のように極大単調写像を特徴づけることができた.

定理 2. E を実 *Banach* 空間とし, T を E から E^* への $D(T) = E$ であるような多価写像とする. このとき T が極大単調写像であるための必要十分条件は, T が擬連続な単調写像で, 任意の $x \in E$ に対して Tx が汎弱閉凸集合となることである.

証明. 必要条件であることを示す. T が単調で, 汎弱閉凸値をもつことはよい. $x_0 \in E$ とし, いま T が x_0 で擬連続であることを示す. T が x_0 で擬連続でないと仮定する. 定義から, Tx_0 を含むようなある汎弱開集合 V と x_0 に収束するようなある点列 $\{x_n\}$ が存在して,

$$Tx_n \cap V = \emptyset$$

である. いま E^* の点列 $\{x_n^*\}$ を $x_n^* \in Tx_n$ となるようにとる. [7] の結果から, T は x_0 のある近傍において有界であるから, $\{x_n^*\}$ が有界点列であることがわかる. よって, ある部分ネット $\{x_{n_\alpha}^*\}$ が存在して, ある点 $x^* \in E^*$ に汎弱収束する. $\{x_n^*\}$ は V に含まれない点列であるから, $x^* \notin V$ が求まる.

ところが T の極大性を用いることで, $x^* \in V$ を示し矛盾を導くことができる. 実際, これを示す. $(y, y^*) \in G(T)$ とする. T の単調性から

$$\begin{aligned} \langle y - x_0, y^* - x^* \rangle &= \langle y - x_{n_\alpha}, y^* - x_{n_\alpha}^* \rangle + \langle x_{n_\alpha} - x_0, y^* - x_{n_\alpha}^* \rangle \\ &\quad + \langle y - x_0, x_{n_\alpha}^* - x^* \rangle \\ &\geq -\|x_{n_\alpha} - x_0\| \|y^* - x_{n_\alpha}^*\| + \langle y - x_0, x_{n_\alpha}^* - x^* \rangle \end{aligned}$$

を得る. ここで極限をとると

$$\langle y - x_0, y^* - x^* \rangle \geq 0.$$

これより $x^* \in Tx_0$ が導かれる. よって $x^* \in V$ に到達する.

また十分条件であることは, 定理 1 と同様にして確認できる. □

霞連続, 上半連続, ヘミ連続, デミ連続の 4 つの連続性を用いて, 単調写像の極大性は特徴づけられてきたが, いまここで擬連続という新しい連続性によっても特徴づけられることがわかった. 極大性を特徴付ける過程で発見されたこの連続性が, 他にどのような有用性を持ち合わせているのか. 今後も探求してみたい.

謝辞

田村高幸さん (千葉大学) には有益な議論の機会を頂きました. ありがとうございました.

参考文献

[1] F. E. Browder, *Multi-valued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 338–351.

[2] F. E. Browder, *Nonlinear variational inequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces*, Math. Ann. **183** (1969), 213–231.

[3] I. Cioranescu, *Aplicatii de dualitate in alaliza functionala neliniara*, Ed. Acad. Rom., 1974.

[4] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[5] S. P. Fitzpatrick, *Continuity of nonlinear monotone operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **62** (1977), 111–116.

[6] P. S. Kenderov, *The set-valued monotone mappings are almost everywhere single-valued*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **27** (1974), 1173–1175.

[7] R. T. Rockafellar, *Local boundedness of nonlinear monotone operators*, Michigan. Math. J. **16** (1969), 397–407.

[8] R. E. Showalter, *Continuity of maximal monotone sets in Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 543–546.