

多目的行列ゲームにおける利得関数の形状分類

弘前大学大学院理学研究科情報科学専攻

樋口 政和 (MASAKAZU HIGUCHI)

Department of Information Science, Faculty of Science, Hirosaki University

弘前大学理工学部 (数理システム科学科)

田中 環 (TAMAKI TANAKA)

Department of Mathematical System Science, Hirosaki University

1 はじめに

利得関数が実数値関数である通常のゲームについての研究はよく知られており、多くの有用な定理が成立することがわかっている。しかし、利得関数がベクトル値関数である多目的ゲームについては、参考文献の [2] や、その参考文献に示されている論文などで一般論は論じられてはいるが、まだ未解決な部分が多く残されている。そこで、多目的ゲームにおける利得関数の性質を更に詳しく解析することが重要であると考えられる。利得関数の性質を調べるには通常のゲームを解析するのと同様に、その関数の MaxMin 値、MinMax 値を調べるのが一番効果的である。そこで、本研究では、ゲーム理論の基本的な利得関数である行列型 (双線形関数) の問題について、MaxMin 値、MinMax 値を容易に求められるようにするために、まず計算機を用いて具体的に利得関数の像をプロットし、その形状によって利得関数をいくつかに分類することで多目的行列ゲームの特徴づけを行なう。

2 ゲーム理論

ゲーム理論とは、複数のプレイヤーがある基準に従ってそれぞれ行動したとき、どのような結果が導かれるかを論理的に解明するための理論であり、人間の社会的行動を科学的に分析するための数学的方法と、それによる人間の社会的認識を提供しようとするものである。

ゲームには、各プレイヤーの戦略が確定的に決定する純戦略型、各プレイヤーの戦略が確率的に決定される混合戦略型がある。本研究では混合戦略型のゲームについて考える。

3 多目的行列ゲーム

プレイヤー数が二人の場合、どちらか一方のベクトル値利得を行列で表してゲームを表現できるので、この場合の多目的ゲームを多目的行列ゲーム (多目的 2 人ゲーム) という。多目的行列ゲームは次の四つの要素によって構成される。

- プレイヤー 1 の混合戦略集合 X
- プレイヤー 2 の混合戦略集合 Y
- プレイヤー 1 の利得関数 $f_X : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}^n$
- プレイヤー 2 の利得関数 $f_Y : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}^n$

特に、

$$f_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y$$

を満たすときゼロ和ゲームと呼び、以後ゼロ和ゲームについて考えていくことにする。ゼロ和ゲームにおいて $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とおくと各プレイヤーの利得関数はそれぞれ、

$$\begin{aligned} f_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ f_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

と表され、 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ だけを考えればよいことになる。以後、この $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}^n$ を多目的行列ゲームの利得関数と呼ぶことにする。

各プレイヤーに対する混合戦略集合 X, Y はそれぞれ、

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^r \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T, \sum_{i=1}^r x_i = 1, x_1, x_2, \dots, x_r \geq 0\} \\ Y &= \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^s \mid \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s)^T, \sum_{j=1}^s y_j = 1, y_1, y_2, \dots, y_s \geq 0\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 x_i はプレイヤー 1 が i 番の戦略をとる確率を表し、 y_j はプレイヤー 2 が j 番の戦略をとる確率を表している。各目的 k ($k = 1, \dots, n$) に対する利得行列は a_{ij}^k を要素とする $r \times s$ 行列

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k & \cdots & a_{1s}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k & \cdots & a_{2s}^k \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{r1}^k & a_{r2}^k & \cdots & a_{rs}^k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n)$$

で与えられる。ここで、 a_{ij}^k はプレイヤー 1 が i 番の戦略、プレイヤー 2 が j 番の戦略をとったときの目的 k に対するプレイヤー 1 の利得を表している。利得関数 $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}^n$ は、

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^T \\ &= (\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{y}, \mathbf{x}^T A_2 \mathbf{y}, \dots, \mathbf{x}^T A_n \mathbf{y})^T \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 $f_k: X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ は目的 k に対するプレイヤー 1 の利得関数を表している。

この $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を n 次元空間にプロットすることで、利得関数の像を描くことができる。しかし、 n 次元ベクトルは図に描くことができないので、本研究では 2 次元のベクトル値関数、つまり 2 目的の場合について考える。また、更に簡単にするために、各プレイヤーの二つの純戦略を確率的に選択できる 2 次元の混合戦略を考える。

4 ベクトル値利得関数

利得関数を形状によって分類するために、まず利得関数を観察してみることにする。いくつかの利得関数の像を観察してみると大部分が図 1 のような、ある一つの包絡線を形成する形となっている。しかし、図 2 のように包絡線ができない形や、図 3 のように包絡線が曲線ではなく直線となっている形も存在する。

そこで、まず一般の利得行列に対する利得関数が形成する包絡線の式を求める。上記の観察より、包絡線の形が曲線の場合は、図 1 のように利得関数を形成する線分群がすべて包絡線と接するような包絡線型になると考えられる。従って、包絡線の形が曲線ではない場合について考えていく。

分類は次のようにして行なう。

1. 曲線の形をしていない包絡線の式から得られる条件を使い、利得関数を、その形が容易にわかるような式まで式変形する。

2. 似たような形を表す利得関数の式を一つにまとめ、それらの式をすべて表現するような一般式によって利得関数を表現し直す。これで、利得関数の一つのカテゴリーができる。
3. 2の操作を得られた利得関数の式すべてについて行なう。

以下、分類について説明していく。

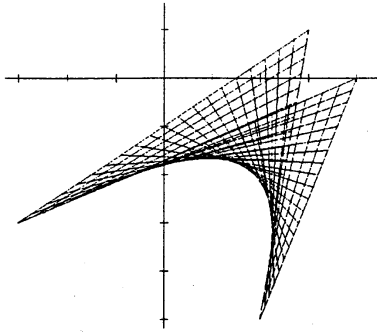


図 1: 利得関数の像 1

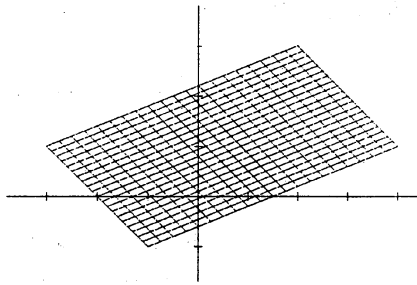


図 2: 利得関数の像 2

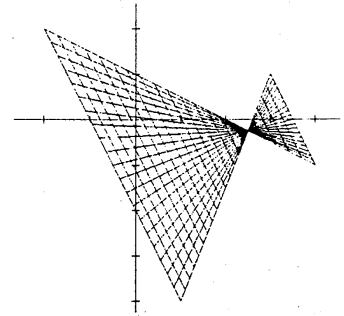


図 3: 利得関数の像 3

5 包絡線の式

利得関数を次のように式変形する。

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= (x^T A_1 y, x^T A_2 y)^T \\
 &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)^T \\
 &= \left(\alpha + \begin{pmatrix} x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix}, \beta + \begin{pmatrix} x_1 \\ 1-x_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ 1-y_1 \end{pmatrix} \right)^T \\
 &= \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 \\ d_1 - d_2 - d_3 \end{pmatrix} x_1 y_1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
 &\quad 0 \leq x_1, y_1 \leq 1
 \end{aligned}$$

ここで、 $(\alpha, \beta)^T$ は平行移動分なので無視して考える。上記の利得関数の式において、

$$\begin{aligned}
 x &= c_2 x_1 + c_3 y_1 + (c_1 - c_2 - c_3) x_1 y_1 \\
 y &= d_2 x_1 + d_3 y_1 + (d_1 - d_2 - d_3) x_1 y_1
 \end{aligned}$$

とおき、利得関数を形成する線分群の存在領域を求めることにより包絡線の式を導出できる。包絡線の式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f &= 0 \\
 a &= (d_1 - d_2 - d_3)^2 \\
 b &= (c_1 - c_2 - c_3)^2 \\
 c &= 2(d_1 - d_2 + d_3)(c_3 d_2 - c_2 d_3) + 4d_3(c_2 d_1 - c_1 d_2) \\
 d &= -2(c_1 - c_2 + c_3)(c_3 d_2 - c_2 d_3) - 4c_3(c_2 d_1 - c_1 d_2) \\
 e &= -2(c_1 - c_2 - c_3)(d_1 - d_2 - d_3) \\
 f &= (c_2 d_3 - c_3 d_2)^2
 \end{aligned}$$

上記の式から明らかなように、一般の利得行列に対する利得関数の像は二次曲線を形成することがわかる。更に、包絡線の式の導出過程で、利得関数を形成する線分群はすべて包絡線に接することもわかる。

また、包絡線の式の係数 a, b, c, d, e, f の間には、以下のような関係が成立している。

$$a = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$b = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$a = 0, b = 0 \Rightarrow c = 0, d = 0, e = 0$$

$$a = 0, c = 0, f = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$b = 0, d = 0, f = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$a = 0, b \neq 0, c = 0, d = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$a \neq 0, b = 0, c = 0, d = 0 \Rightarrow f = 0$$

$$a \neq 0, b \neq 0, c = 0, d = 0 \Rightarrow f = 0$$

上記の係数間の関係を使うと、存在しうる包絡線の式のパターンをいくつかに絞ることができる。その包絡線の式の中で二次曲線の形をしていない式は以下のようなになる。

$$0 = 0$$

$$by^2 = 0$$

$$f = 0$$

$$by^2 + dy + f = 0$$

$$ax^2 = 0$$

$$ax^2 + by^2 + exy = 0$$

$$ax^2 + cx + f = 0 \quad ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$$

6 利得関数の分類

5節で考えた、曲線の形をしていない包絡線の式をそれぞれ詳しく解析することにより、 $c_1 \sim d_3$ の間で成立している関係を求め、その関係を使うことで利得関数を式変形する。そして、4節で考察したような操作を行ない、利得関数を分類する。その結果、以下の四つの利得関数の一般式が得られる。

6.1 一点型

$$x = 0, y = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のとき、利得関数の像は原点となる。しかし、実際は平行移動分を考慮に入れるので利得関数の像は $(\alpha, \beta)^T$ のような一点となる。

6.2 線分型

$$1. \quad x = 0, y = g(x_1, y_1) \quad \text{すなわち} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x_1, y_1) \end{pmatrix}$$

のとき、利得関数の像は縦軸の一部となるが、平行移動分を考慮に入れるので実際は、利得関数の像は $x = \alpha$ の一部となる。

$$2. \quad x = h(x_1, y_1), y = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} h(x_1, y_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

のとき、利得関数の像は横軸の一部となるが、平行移動分を考慮に入れるので実際は、利得関数の像は $y = \beta$ の一部となる。

$$3. \quad y = kx \quad (k \neq 0) \quad \text{すなわち} \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x \\ kx \end{pmatrix}$$

のとき、利得関数の像は原点を通る直線の一部になるが、1,2 同様、平行移動分を考慮に入れるので、利得関数の像はある切片を持った直線の一部となる。

6.3 平行四辺形型

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2$$

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{R}^2$ は非負一次独立なベクトルである。

利得関数が上記の形のとき、 $0 \leq x_1, y_1 \leq 1$ より、利得関数の像は平行四辺形となる。

6.4 不動点型

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - s)\{y_1 \mathbf{e}_3 + (1 - y_1)\mathbf{e}_4\} + \mathbf{u}_1$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (y_1 - t)\{x_1 \mathbf{e}_5 + (1 - x_1)\mathbf{e}_6\} + \mathbf{u}_2$$

$\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \in \mathbf{R}^2$ は非負一次独立なベクトル。また、 $\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6 \in \mathbf{R}^2$ も非負一次独立なベクトルである。 $s, t \in \mathbf{R}$ は任意のスカラー、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{R}^2$ は任意のベクトルである。

利得関数が上記の二つの形のうち、いずれか一つの形となるとき、 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ はある二つのベクトルの凸結合で表されるベクトルをスカラー倍したベクトルであるので、利得関数の像は $(x_1 - s), (y_1 - t)$ のとり得る範囲によって、三角形、台形、バタフライ形となる。また、この場合は一般に不動点型と呼ばれる。

7 条件の導出

得られた利得関数のそれぞれの一般式と、利得関数の展開式、

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 \\ d_1 - d_2 - d_3 \end{pmatrix} x_1 y_1$$

とで係数比較を行なうと、それぞれの一般式を導く条件が得られる。

7.1 一点型

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ かつ $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ のとき、利得関数の像は一点型となる。

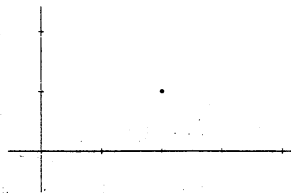


図 4: 一点型の例

図 4 は一点型の例であり、利得行列は以下の通り。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.2 線分型

- $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ かつ $(d_1, d_2, d_3)^T \neq 0$
- $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ かつ $(c_1, c_2, c_3)^T \neq 0$
- $(d_1, d_2, d_3)^T = k(c_1, c_2, c_3)^T$ ($k \neq 0$)

上記の三つの条件のうち、いずれか一つを満たすとき利得関数の像は線分型となる。

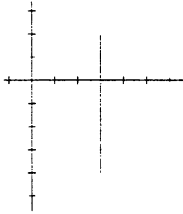


図 5: 線分型の例 1

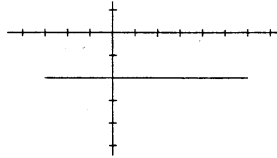


図 6: 線分型の例 2

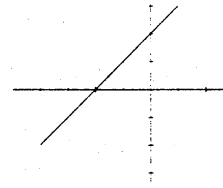


図 7: 線分型の例 3

図 5,6,7 は線分型の例であり、利得行列は以下の通り。

図 5 に対する利得行列。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

図 6 に対する利得行列。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

図 7 に対する利得行列。

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7.3 平行四辺形型

$c_1 - c_2 - c_3 = 0$ かつ $d_1 - d_2 - d_3 = 0$ で、更に、 $e_1 = (c_2, d_2)^T$ と $e_2 = (c_3, d_3)^T$ が非負一次独立のとき、利得関数の像は平行四辺形型となる。

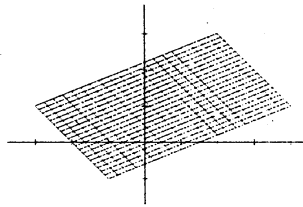


図 8: 平行四辺形型の例

図 8 は平行四辺形型の例であり、利得行列は以下の通り。

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7.4 不動点型

7.4.1 三角形型

- $s = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $e_3 = (c_1, d_1)^T$ と $e_4 = (c_2, d_2)^T$ は非負一次独立。
- $s = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$
 $e_3 = (c_1 - c_3, d_1 - d_3)^T$ と $e_4 = (c_1, d_1)^T$ は非負一次独立。
- $t = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $e_5 = (c_1, d_1)^T$ と $e_6 = (c_3, d_3)^T$ は非負一次独立。
- $t = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$
 $e_5 = (c_1 - c_2, d_1 - d_2)^T$ と $e_6 = (c_1, d_1)^T$ は非負一次独立。

上記の四つの条件のうち、いずれか一つを満たすとき利得関数の像は三角形型となる。また、条件の同値性は容易に示せる。

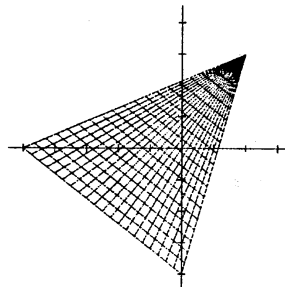


図 9: 三角形型の例

図 9 は三角形型の例であり、利得行列は以下の通り。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

7.4.2 台形型とバタフライ型

- $s \neq 0, 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ d_1 - d_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (k \neq 0, 1)$
 $e_3 = (c_1 - c_3, d_1 - d_3)^T$ と $e_4 = (c_2, d_2)^T$ は非負一次独立。
 $k > 0$ のとき台形型。
 $k < 0$ のときバタフライ型。

$$\bullet \quad t \neq 0, 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 - c_3 \\ d_1 - d_3 \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (l \neq 0, 1)$$

$e_5 = (c_1 - c_2, d_1 - d_2)^T$ と $e_6 = (c_3, d_3)^T$ は非負一次独立。

$l > 0$ のとき台形型。

$l < 0$ のときバタフライ型。

上記の二つの条件のうち、いずれか一つを満たすとき利得関数の像は台形型かバタフライ型となる。また、条件の同値性は容易に示せる。

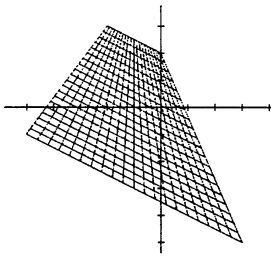


図 10: 台形型の例

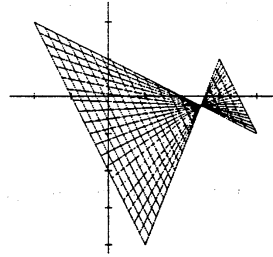


図 11: バタフライ型の例

図 10 は台形型の例であり、利得行列は以下の通り。

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

図 11 はバタフライ型の例であり、利得行列は以下の通り。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

7.5 包絡線型

上記の四つの型以外の条件の場合は、包絡線は二次曲線となるので、利得関数の像は、利得関数を形成する線分群がすべて包絡線に接するような包絡線型となる。

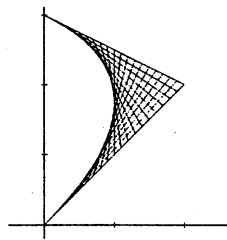


図 12: 包絡線型の例

図 12 は包絡線型の例であり、利得行列は以下の通り。

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

包絡線型の場合、利得関数の像が多角形となる場合があるが、このときは x_1, y_1 の範囲を変えてやることによって包絡線が形成されていることがわかるので、この場合も包絡線型となる。

8 まとめと今後の課題

包絡線の詳細な解析によって利得関数は、一点型、線分型、平行四辺形型、不動点型、包絡線型の五つの型に分類することができた。今後の課題としては、今回得られた結果を利用し利得関数の MaxMin 値、MinMax 値を求め、利得関数の性質を更に明らかにしていこうと考えている。また、計算機を用いて実際に利得関数の MaxMin 値、MinMax 値を出力させ、各プレイヤーに対する最適な戦略が一目でわかるようにしたいと考えている。

参考文献

- [1] 菊池康, 多目的 2 人ゲームの解析, 弘前大学大学院理学研究科情報科学専攻修士学位論文, 1997.
- [2] T.Tanaka, *Vector-Valued Minimax Theorems in Multicriteria Games*, pp.75–99 (Chapter 5) in “New Frontiers of Decision Making for the Information Technology Era”, edited by Yong Shi and Milan Zeleny, World Scientific, 2000.
- [3] T.Tanaka, *Graphic computation of payoff functions for multi-criteria games*, ICMAA2000, Kaohsiung, Taiwan, 2000.
- [4] T.Tanaka, and M.Higuchi, *Vector-Valued Minimax Theorem and Multicriteria Game*, sjom2000, Hong Kong, China, 2000.
- [5] T.Tanaka, and M.Higuchi, *Classification of Matrix Types for Multicriteria Two-Person Zero-Sum Matrix Games*, submitted to Control Engineering Practice, Pergamon, 2000.