数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 91-104

不定方程式再考

「百鶏術」の分類[1]

台湾・国立高雄第一科技大学
城地　茂

The reconsideration of Indeterminate Equations in China and Japan;
The Classification for the "One Hundred Hens' Question"

JOCHI Shigeru
(National Kaohsiung First University of Science and Technology)

ABSTRACT

The question of "Hundred Hens" 百鶏術 in the *Zhang Qiujian Suan Jing* 張丘建算経 is one of the most famous questions for indeterminate equations. But Yang Hui 楊輝 analyzed that this question was the development of the "pheasants and rabbits" 雉兎同籠 question in the *Sungzi Suan Jing* 孫子算経, was not the same as Chinese indeterminate equation of "Dayan Zongshu Shu" 大衍総数術. Takebe Katahiro 建部賢弘 had the same opinion.

The "Tsurukame-san" 鶴亀算 in Japanese was changed animals, which are from pheasants and rabbits to cranes and tortoises. This question is the solving method for first-degree equation of two unknown numbers. It, however, is not used algebraic method, is used the subjunctive method. That is to say, firstly let the one unknown number become the zero, then correct the subjected number for the question's meaning.

This mathematical thought was already appeared at the *Jiu Zhang Suan Shu* 九章算術, the questions of "Qilu Shu" 其率術 at the chapter 2 of *Jiu Zhang Suan Shu*. The author thinks that the origin of the question of "Hundred Hens" is on the *Jiu Zhang Suan Shu* and reconsiders these kinds of questions in China and Japan.

[1]本稿では『二十五史』に中華書局本を用いた。これには、台湾・中央研究院の「漢籍電子文献」、台湾・故宮博物院の「故宮寒泉古典文献全文資料庫」によるオンラインデータベースを活用した。

1　はじめに

『周髀算経』は、漢代[2]に集大成した暦算の分野では現存する最古の書である。日本にも伝来し、中央の大学寮（国立教育機関）算生[3]は勿論、地方の国学の暦算生も学習した[4]。蓋天論という宇宙論を論じているが、その過程で、商高[5]の定理（三平方の定理）を説いたもので、算数から算術・算学へ初めて発展した典籍である。その中に、栄方と陳子[6]の対話があり、陳子が栄方を諭して、

> 是故能類以合類。此賢者業精習智之質也[7]。
> したがって、同じ種類のものは合わせるのが、賢者のすぐれた資質である。

と、述べている。このように、中国数学のパラダイムともいえる古典で、「類」、すなわち分類の重要さが説かれていたのである。　したがって、和算家も数学の分類には留意したはずである。しかし、当時の和算家の分類と現代の数学史家のものと異なってくる場合がある。現代の数学史家は当然、現代数学の影響を受けている。そこで、分類の異なる事項を研究することによって、和算の本質へ迫ろうというのが本稿の目的である。

その例として、「百鶏術」がある。これは、現在の数学史では、不定方程式と考えられている[8]。しかし、建部賢弘（1664-1739）は「百鶏術」に関する記述をしているが、それは「百鶏術」の問題ではなく、「鶴亀算」の問題への注釈としてである。『算学啓蒙諺解大成』（建部賢弘、1690 年）巻中「求差分和門」には、

> 今有鶏兎一百、共足二百七十二隻。只云鶏足二兎足四。問鶏兎各幾何。」
> 答曰。鶏六十四、兎三十六。
> 鶏ト兎ト合セテ百アリ。鶏ノ数モ兎ノ数モシレ（知）ズシテ其足二百七十二アルトキハ、ニワトリ、ウサギ各イクツヅツアルゾトナリ。
> 此類問ヲ二率ノ分身ト云ヘリ。又三率分身ト云アリ。張丘建算経ニ鶏翁鶏母鶏雛ノ問ノ類ナリ。和書ニモ如此ノ問、間々見ヘタリ。定レル術ナシ。只三色トモニ数ノ整フヲ詮トスル也[9]。
>
> 今、鶏と兎が 100 羽おり、合計足の数は 272 足である。鶏の足は２本で兎の足は４本ということしか分からない。鶏と兎はそれぞれ幾らになるか。

---

[2] 紀元前 100 年前後の成立と考えられている(銭,「周髀算経提要」,1963.任,1993,vol.1:1-4 所収)。
[3] 『学令』算経条。
[4] 『続日本紀』天平宝字元年(757)11 月 9 日の条（城地,1987a)。
[5] 周王朝初期、周公の時代の賢大夫。数学に長けていたと伝えられている。
[6] 二人とも周公以後の人物であるが、年代不詳である。
[7] 『周髀算経』巻上之２（任,1993,vol.1:19)。
[8] 加藤平左エ門,1964,『整数論』では、剪管術などと同じく「不定問題」(pp.3-32)に分類されている。
[9] 巻中、21 丁表（佐藤健一氏蔵書）。

答。雉 64 羽、兎 36 羽。

（建部注）鶏と兎、合わせて百羽いる。鶏の数も兎の数も分からないが、その足は 272 足である。鶏、兎各幾つずつになるか。

この種類の問題は、「二率分身」という。また、「三率分身」もある。『張丘建算経』[10]に鶏の雄雌雛の問題である。和算書にも類似の問題があるが、確定した術はない。ただ、３種類の数値を合わせるように試行錯誤するのである。

とある。

この問題自身は、動物の総数は 100 であるが、「百鶏術」ではない。動物の種類は違うが、所謂、「鶴亀算」である。つまり、建部は、「百鶏術」と「鶴亀算」には関連があると考えていることになる。これは、建部一人がこのように考えていたのではなく、『楊輝算法』以来の東アジアの伝統数学では、このように考えていたと考えられる。なぜなら、建部が使っている「三率分身」という術語は、『楊輝算法』のもの[11]で、この書では「二率分身」とは「鶴亀算」のことであるから、楊輝も同系統のもの（「百鶏術」の解法の過程で「鶴亀算」を使う）と考えていたからである。

「百鶏術」とは、未知数が３つに対して与式は２つの問題である。鶏の総数とその価格がいずれも 100（羽・文）になるので、この名前があるが、後世、100 にならない問題も出題されている[12]。したがって、和算では中国数学から借用した「三率分身」という術語や「二組三色」「三組四色」[13]という術語からしても、未知数が与式より多い問題という事になり、現在の数学の範疇で言えば、不定方程式になる[14]。

『算学啓蒙』（朱世傑、1299 年）は、天元術を比較的平易に解説したものであり、和算の点竄術の基礎となったものであることは明白である。当然、『算学啓蒙』は日本でも覆刻され[15]広く読まれている。この書に対して、日本数学史上最も重要な数学者の一人である建部が注釈を施している。いわば、和算家のパラダイムとも言うべきもので、その影響力の大きさは、和算史上最も大きなものの一つと言って過言ではないだろう。

---

[10] 清代に覆刻された微波榭本（孔継涵刊行）が覆刻されたが、孔子の諱である丘を避けたために、張邱建算経とも言われている（劉鈍, 1993:4）。『二十五史』には全部で 12 か所『張丘建算経』があるが、『旧唐書』巻 44 志 24（p. 1892）は、「張邱建算経」とあり、他は全て「張丘建算経」である（一か所「張立建」となっている（『宋史』巻 207 志 160「芸文六」p. 5271）が、これは「丘」の誤り（校勘記 p. 5320））。ただし、p. 1892 の部分が上海古籍出版社本（vol. 5:229）では、「丘」となっている。

[11] 日本学士院 1954, 2:282 に指摘がある。『楊輝算法』朝鮮版本『続古摘奇算法』巻下 13 丁裏（児玉 1966:77）。

[12] 『改算記』（山田正重、1659 年）下巻第十、買物銭数程取事。本稿第６節参照。また、『百鶏術衍』（時曰醇、1861 年）の問題も同様に 100 ではない。

[13] 数値は適宜変更可能で、組は方程式の数で、色は未知数の数である。

[14] 加藤, 1964:（整数論）33 では、不定方程式として扱っている。

[15] 1658 年には、土師道雲、久田玄哲によって、1672 年には、星野実宣によって覆刻されている（下平、1965-70, 上:220）。

なお、東アジアの数学[16]の内容で現代数学の観点からでは、不定方程式と分類されるものは２つある。

一つは、「百鶏術」のように与式が未知数より少ない問題である。『楊輝算法』では先に述べたように「分身」術、和算では「二組三色」問題などと呼ばれているものである。本稿の主題であるので詳しく後述する予定である。

もう一つは、「物不知其数」[17]問題である。ある数をいくつかの除数で割り、その余りから、被除数を求めるという剰余方程式である。中国剰余定理、あるいは「孫子定理」として広く世界中に知られている。秦九韶（1247年ごろ）は全体の計算を「大衍総数術」、その中で互に素である２数x,yで互に割って行った時の余りが１になる時の係数aを求める計算を「大衍求一術」と言っている。

$$1 = a\,x + b\,y \qquad (x, y) = 1$$

和算で言うと、「大衍総数術」が「百五減」「剪管術」、「大衍求一術」が「剰一術」ということになる[18]。

このように、現代数学から見れば、同じ不定方程式とされる問題も、東アジア伝統数学の範疇では、前者は「鶴亀算」の拡張となり、後者は「上元積年」[19]の計算が起源とされ、「更相減損[20]」法の発展ということになり、少し種類の異なるものと言える。現代の分類のように同一に語ることは難しい。そこで、本稿では、「百鶏術」を建部と同じように「鶴亀算」の観点から考えてみたい。和算を考えるには和算家の考え方に沿って考えるべきだからである。なお、「百鶏術」の解釈に関しては、先人の研究を紹介し、東アジア数学史上での「百鶏術」の歴史的発展について考察して行きたい。

2　『張丘建算経』の「百鶏術」

『張丘建算経』は、５世紀ごろにまとめられた数学書[21]で、このころは『孫子算経』、『夏侯陽算経』なども編纂されたが、時間的にはこれらよりやや新しい数学書である。計算過程である「草」を初めて掲載するようになった数学書で、唐代には、『算経十書』に含められ教科書として使われた。日本へも伝来した[22]が、大学寮の教科書になることはなかった。

---

[16] 清代になると、駱騰鳳、『芸游録』では、「大衍求一術」を使って解いている。しかし、銭宝琮が指摘するように、これは、『張丘建算経』の解き方ではない（銭, 1983:19）。

[17] 『孫子算経』巻下7丁表･裏(任,1993 vol.1:243)の用語。

[18] 剰余方程式については、城地, 1993、城地, 1996 参照。

[19] 中国暦で、仮想した紀元（上元）から暦を作った年までの年数。上元は甲子の年に始まるものとされるなど様々な条件から計算する。

[20] ユークリッドの互除法に類するもの。東アジアの数学では、最大公約数の計算から始まった。後に、近似分数の計算や、「大衍求一術」にも使われた。和算では、会田安明（1747-1817）が、無理数の分析に使っている。(城地,1991b)

[21] 466年から484年の間とされる（銭, 1964:80-81, 日 88)。

[22] 『日本国見在書目録』(892年頃、藤原佐世）に書名が見える（日本学士院 1954, vol. 1:5 and 148-149)。

そのためか、江戸時代より前の日本の数学書には、この種の問題は発見されていない。

同書の最後の問題が、有名な「百鶏術」である。巻下、第38題は、

今有鶏翁一直銭五、鶏母一直銭三、鶏雛三直銭一、凡百銭買鶏百隻。問鶏翁母雛各幾何。

答曰。鶏翁四直銭二十、鶏母十八直銭五十四、鶏雛七十八直銭二十六

又答。鶏翁八直銭四十、鶏母十一直銭三十三、鶏雛八十一直銭二十七

又答。鶏翁十二直銭六十、鶏母四直銭十二、鶏雛八十四直銭二十八

術曰。鶏翁毎増四、鶏母毎減七、鶏雛毎益三即得。

草曰。置銭一百在地為実。又置鶏翁一（５カ）、鶏母一（３カ）各以鶏雛三因之。鶏翁得三（１５カ）、鶏母得三（９カ）并鶏雛三併之共得九、為法、除実得一十一為鶏母、数不尽一返減下法九、余八為鶏翁数。別列鶏都数一百隻在地減去鶏翁八鶏母一十一余八十一為鶏雛数置翁八以五因之得四十即鶏翁直銭、又置鶏母一十一以三因之得三十三即鶏母直、又置鶏雛八十一以三除之得二十七即鶏雛直、合前問[23]。

今、雄鳥１羽の価格が５文、雌鳥１羽の価格が３文、雛３羽の価格が１文である。100文で鶏を 100羽買いたい。各々幾らづつになるか。

答。雄鳥４羽、価格が20文。雌鳥18羽、価格が54文。雛78羽、価格が26文。

答。雄鳥８羽、価格が40文。雌鳥11羽、価格が33文。雛81羽、価格が27文。

答。雄鳥12羽、価格が60文。雌鳥４羽、価格が12文。雛84羽、価格が28文。

術。雄鳥を４羽増やす毎に、雌鳥７羽減らし、雛を３羽増やせば良い。

草。 100文を置き、「実」とする。また、雄鳥１（５カ）、雌鳥１（３カ）を置き、雛の３を掛けると、雄鳥３（１５カ）、雌鳥３（９カ）になる。これらに雛の３を加えると、９になり、「法」とする「実」を「法」で割って、11を得る。これが雌鳥の数になる。余りが１になるが、「法」の９を戻して余り８として、雄鳥の数になる。別に総数 100を並べ、雄鳥８、雌鳥11を引くと81になり、雛の数とする。それぞれに価格を掛けると、設問に合う。

前法草。この答えに、雄鳥４羽を増やし12羽、雌鳥７羽を減らし４羽、雛３羽を増やし84羽としても、総数 100羽となり、設問に合う。

となっている。『張丘建算経』は全体に誤字・脱字が多く[24]、この部分の意味も不明である[25]。そこで、宋の楊輝の解説に従って[26]、その考え方を追ってみよう。これが建部ら関流和

これにも、３巻本となっており、現在のものと同じようなものであったことが伺われる。

[23] 『張丘建算経』巻下37丁表-裏(任, 1993 vol. 1:293)。

[24] 巻中は最後の数頁、巻下も最初の数頁が欠落している(銭「張丘建算経提要」、任, 1993, vol. 1:248)。

[25] 清代の駱騰鳳(1770-1841)、『芸游録』(1815)・丁取忠(1810-1877)、『数学拾遺』(1851年)、時日淳(1807-1880)、『百鶏術衍』(1861) などに研究がある (銭, 1921;1983)。

[26] 『続古摘奇算法』巻下、１丁裏-２丁表 (児玉, 1966:77)

算家に大きく影響を及ぼしたのである[27]。

楊輝は、先ず、分数の計算は煩雑なので、全部を３倍にして、分母を消去する。

雄	雌	雛	合計（分）
１５	９	１	３００

ここで、全部を雛とすると、１００分にしかならないから、２００分余ることになる。

０	０	１００	＋２００

そこで、雛を雌鳥に変えると、１羽につき８分高いのだから、雌鳥は２５羽になる。

０	２５	７５	０ …①

以下、雄鳥４羽を増やすごとに、雌鳥７羽を減らし雛３羽を増やしても、総数、総額が変わらないので、

４	１８	８９	０
８	１１	８１	０
12	４	８４	０

が自然数の答えとなる。というのが、『楊輝算法』の解説である。

ここで、①を求めるまでは、「鶴亀算」を使って、雌鳥25羽、雛75羽を得ている。次の、

$$x = 0 + 4t$$
$$y = 25 - 7t$$
$$z = 75 + 3t$$

係数４、―７、３の求め方が、「百鶏術」の秘訣で、楊輝はこれを「張丘建算経術」と呼んでいる。

この求め方であるが、『九章算術』以来の「方程」の伝統から考えて、与式の係数を加減法で操作して求めたと考えるのが自然だろう。

現代の数学史家、劉鈍（1947-）教授の解釈は、この考えに近いと思われる。ここでは、代数記号を使って表記してみたいと思うが、もちろん、張丘建は算木を使い、未知数の記号は、当時、無いので、算木の位置で未知数の種類 x, y, z を表わしていたはずである。

$$5x + 3y + 1/3\,z = 100 \quad \cdots 1$$
$$x + y + z = 100$$

１式を３倍する。

$$15x + 9y + z = 300 \quad \cdots 2$$
$$x + y + z = 100 \quad \cdots 3$$

２式から３式を引く。

$$14x + 8y = 200 \quad \cdots 4$$
$$x + y + z = 100$$

４式を２で割る。

$$7x + 4y + \quad = 100 \quad \cdots 5$$

---

27 関孝和は、1661年に『楊輝算法』を写本している。

$$x + y + z = 100 \quad \cdots 6$$

６式を４倍し、５式から引くと、

$$7x + 4y = 100 \quad \cdots 7$$

$$-3x + \quad + 4z = 300 \quad \cdots 8$$

となる。これは、

$$7(x+4) + 4(y-7) = 100 \quad \cdots 9$$

$$-3(x+4) + 4(z+3) = 300$$

と同じになり、ここから、４、―７，３の比率を導いたというものである[28]。

つまり、一般に、

$$bx + ay = nD$$

$$-cx + az = n'D$$

という式を導き、ｘをａ増やし、ｙをｂ減らし、ｚをｃ増やすという関係を求めることになる。

『続古摘奇算法』(『楊輝算法』を構成する数学書の一つ、楊輝、1275 年) 下巻では、「鶴亀算」を「双率分身術」、「百鶏術」を「三率分身術」と呼んでいる[29]。

3　「鶴亀算」について

ここで、「鶴亀算」について確認しておこう。「鶴亀算」とは、二種類のものの総数と価格（あるいは足の数など、それらのものに別個に与えられた固有の数値の合計）が与えられ、そして、それぞれ幾つずつになるかを問う問題のことである。

解法は方程式を立てずに、先ず、全部が何方か一方だけと仮定して、設問との差から補正するという方法を取っている。鶴亀算は、仮定法的思考法を養成するものとして、初等教育ではよく取り扱われている。

従来、この種の問題は、『孫子算経』(著者不詳、 400 年頃) 巻下第 31 題に始まるとされていた。有名な「雉兎同籠」問題である。

> 今有雉兎同籠、上有三十五頭下有九十四足。問雉兎各幾何。
>
> 答曰。雉二十三、兎一十二。
>
> （中略）又術曰。上置頭、下置足。半其足、以頭除足、以足除頭、即得[30]。
>
> 今、雉と兎が同じ籠に入っている。上には 35 の頭が、下には 94 の足がある。雉と兎はそれぞれ幾らになるか。
>
> 答。雉 23、兎 12。
>
> (中略) もう一つの術。上に頭、下に足の数をならべる。足の数を半分にする。

---

[28] 劉, 1993:258-260。
[29] 巻下１丁表～２丁裏 (児玉,1966:77)。
[30] 『孫子算経』巻下７丁表-裏(任, 1993 vol. 1:243)

これから頭の数を引いて、これが答え（の兎の数）になる。

動物の種類は違うが、四足獣と鳥であり、まさに、和算の「鶴亀算」そのものである。

これは、始めに全部が何方か一方と仮定して計算する算法である。全部を雉と仮定する足の数は70になるが、実際は94本であり、数が余ってしまう。そこで、これを修正するに、兎を増やしてゆけばよい。兎が１羽増える毎に２本足が増えてゆくのだから余りを無くすためには、（余り÷２）羽の兎がいることになる。

（９４－７０）／２＝１２

『孫子算経』では、予め足の数を半分にして、計算を速くしているが、この計算をしている事になる。

４７（94/2）－３５（70/2）　＝１２

この解法を使って「百鶏術」の未知数の一つを消去すると楊輝は考えている。

４　「鶴亀算」の日本伝来

まず、「鶴亀算」が、どのような目的で『孫子算経』に収録されたのかを考えてみたい。それには、『孫子算経』が、どのような目的で編纂されたのかを考えるのが順序であろう。

『孫子算経』の編集目的を考えるのは、なかなか難しい。『孫子算経』は、作者の正確な名前さえはっきりしないからである。銭宝琮らの研究[31]によって、400年前後に成立したものと推定されているが、正確な年代も特定できない状態である。

しかも、中国では実物も散逸してしまい、清代に戴震が『永楽大典』から復元したものによって、辛うじて内容を知ることができる。また、唐代には教科書として使われていたが、当時の記録も残ってはいない。唐令そのものまでもが、残っていないからである。むしろ、令が残っている日本の方を研究して、その結果を中国に当てはめる研究の方が先行している。

これらの規定によれば、学生（算生）は、『孫子算経』から順番に学習を進めたと考えるのが妥当なようである。唐の数学教科書『算経十書』の中で、算木の操作方法を詳しく記述したものは『孫子算経』だけである。したがって、『孫子算経』が算木の教科書として重視されなければならなかったと言える。『孫子算経』を先に学習した理由はここにある。

『孫子算経』は、上、中、下の三巻本になっており、このうち、算木の計算方法の説明があるのは、上巻である。上巻にはこの他に度量衡や大数の名称なども記述されており、計算をおこなう上で必要な知識が記述されているのである。したがって『孫子算経』を学習して、それ以上の段階へ進むことになる。また、『孫子算経』だけでも学習すれば、律令官僚として必要な技能を習得することができたとも言えるだろう。算木の教科書としての

『孫子算経』は、重視されて当然である[32]。

一方、「百鶏術」のある『張丘建算経』は、『唐令』の順番から考えて、『孫子算経』の後、実務的な『五曹算経』やパラダイムとも言える『九章算術』を学習してからの教科書と言える。そして、この『孫子算経』と『張丘建算経』を学習する学生は、3次方程式など当時の最先端の算学、『緝古算経』や『綴術』[33]を学習しない班である。

これは、朝鮮の教科書が、『算学啓蒙』と『楊輝算法』であることと比べるとよい対照となるだろう。もちろん、『算学啓蒙』の代表が「鶴亀算」ではないし、『楊輝算法』には「百鶏術」以外に様々な算術が記述されているから一概には論じられないが、「鶴亀算」「百鶏術」は教科書に記載しやすい問題ということができようか。

日本では「鶴亀算」の動物は、『孫子算経』の雉と鶏から鶴と亀へと大きく変化している。これに対して、中国では、基本的に鳥類と兎である[34]。

『孫子算経』から『算学啓蒙』では、動物が雉から鶏に変わっている。兎はもとのままである。巻中、「求差分和」門第1題では、鶏、兎計 100 羽、足が 272 本の問題である。ここで雉が鶏へと変わったのを「百鶏術」の影響と考えるのは穿ちすぎであろうか。

この『算学啓蒙』は中国では程なく散逸してしまったのだが、隣の李氏朝鮮では教科書として採用され、それが、豊臣秀吉の朝鮮出兵の際に戦利品としてもたらされ[35]、日本で広く流布した。

また、明代を代表する、珠算算学の最高峰である『算法統宗』(程大位、1592 年) が、おそらく民間貿易によって輸入され、広く愛された。「鶴亀算」は『九章算術』の分類では、第6章になる「均輸」章に収録されている (『算法統宗』巻9「均輸六章」)。程大位も第2章の問題とは考えなかったのである。その第 26 題には、鶏、兎が 35 羽、94 足の問題がある[36]。

『孫子算経』は、古代大学寮の教科書の筆頭として学習され、その影響は日本古代では最も大きい算学書である。同書の「物不知其数」題は、剰余方程式であるが、後世 (江戸時代) まで伝わっている。しかし、奈良時代から江戸時代までの間、「鶴亀算」は記録に残されていない。さらに、『算法統宗』をもとにしたと自称する『塵劫記』にも「鶴亀算」は収録されていない。

やや遅れて、『因帰算歌』(今村知商、1640 年) 巻上で、江戸時代になって初めての類題がある。兎と雉に戻って、頭 32、足が 94 の問題である[37]。ここでは、『算学啓蒙』と同じ

---

31 銭, 1963:「孫子算経提要」。

32 城地, 1987 参照。

33 『緝古算経』には3次方程式の問題があり、『綴術』には、「開差冪、開差立」という術語があったことが分かっており (『隋書』律暦志)、「立」の部分は3次方程式と考えられる。

34 『算法統宗』巻9第 27 題 (任,1993,vol.2:1351-2) には、九尾の狐と九頭一尾という怪鳥が、9匹7羽という問題もあるが、解き方は「方程」に近い。

35 筑波大学図書館には、曲直瀬正琳 (1565-1611、養安院) の印のある『算学啓蒙』がある(児玉.1966:(解説)55)が、宇喜田秀家からの謝礼で、朝鮮の役で得られたものといわれる (同 10)。.

36 任,1993,vol.2:1351。

37 下平,.1990-,vol.2-2:52。

術語である「差分（しゃぶん）」の問題とされている。

以上のことから、江戸時代の「鶴亀算」は、奈良時代に伝わった『孫子算経』や『算法統宗』の影響ではなく、『算学啓蒙』の影響が大きかった事が分かる。

これが、鶴と亀というめでたい動物になったのは、『算法点竄指南録』（坂部広胖、1815年）からである[38]。「点竄術」は関孝和が創設した日本的代数学であり、同書はその入門書である。このような、算術と数学の間にある『算法点竄指南録』に「鶴亀算」が収録されたという事からも、「鶴亀算」は算術から代数学への橋渡しをしていると言えよう。

このように、名称としての「鶴亀算」は、200年以下の歴史しかないことになる。

5　「百鶏術」の日本伝来

一方、「百鶏術」は、『楊輝算法』を通じて広まったようである。『張丘建算経』が教科書にならなかったためか、その内容は日本へ余り影響を与えなかった。

和算書で最も古い例は、『格致算書』（柴村盛之、1657年刊）の下巻85丁[39]のもので、

> 去百姓ぜに足（たし）百文にて、ちゃわん・つちざら・かはらけ三いろをかふに、銭数ほど三いろを買度と云。ねだんをとへば、売人かん（勘）のふかきものにて、それはやすき事、一いろづつのかずに、このみはなきかと問。一いろづつのかずを云ば、百姓よろこび、さらばそれへ、まかるべいと申。銭を取出し渡す。
>
> ちゃわん一つに付　弐十文づつ
> つちさら一つに付　壱文づつ
> かはらけ五つに付　壱文づつ
> ちゃわん四つ買　此銭八十文
> つちさら壱つ買　此銭壱文
> かはらけ九十五買　此銭十九文
>
> 合　銭百文
> 　　数百

> ある男が、銅銭合計百文で、茶碗・皿・素焼きの土器の３種類を買うときに、銅銭の数と３種の総数が同じになるように買いたいと言い、価格を聞いた。商人は、算術が上手で、それは簡単なことだと言う。種類ごとに数の希望がないかと質問した。それぞれの数を示すと、買う男は喜んで、それならその通りにしようと言い、代金を支払った。
>
> 茶碗１つ　20文
> 皿１枚　１文

---

[38] 下平, 1965-70, vol. 1:45.
[39] 下平, 1965-70, vol. 1:81.

素焼きの土器5つで　1文
茶碗を4つ買い　80文
皿1枚を買い　1文
素焼きの土器95個を買い　19文
合計100文　100個

というものである。

これを「張丘建算経術」で解いてみよう。茶碗の個数をx、皿の個数をy、土器の個数をzとして式を立て、変形すると、

$$99x + 4y = 400$$
$$-95x + 4z = 100$$

が得られる。これは、

$$99(x + 4) + 4(y - 99) = 400$$
$$-95(x+4) + 4(z + 95) = 100$$

と同じであるから、茶碗の個数を4増やし、皿の枚数を99減らし、土器の個数を95増やす関係が求まる。

ここで、皿は、1枚1文であるから、ただちに茶碗0個、皿の100枚、土器の0個が得られる。ここから、先の関係を加減すると、茶碗4個、皿1枚、土器95個という答えが出る。自然数の組み合わせは、この答えだけである。皿が1枚1文であるため、「鶴亀算」を使う必要がなくなっている。

7　まとめ

奈良時代には、『張丘建算経』が伝来しているが、それが後世に伝わった形跡はない。1792年に毛利高標（たかすえ）(1755-1801)が村井中漸(1708-1797)に命じて覆刻させた『算経』(五種算経)も、『孫子算経』、『五曹算経』、『海島算経』、『五経算経』、『夏侯陽算経』であって、『張丘建算経』は覆刻されなかった。そのためか、「百鶏術」は和算家には余り研究されなかったようである。

江戸時代、寺子屋では、「鶴亀算」が盛んに教えられたのだから、その発展としての「百鶏術」もあって然るべきなのだが、やはり、建部の「定レル術ナシ」というのが影響を与えたのだろうか、残されている和算書に「百鶏術」は少ない。むしろ、「鶴亀算」自身を目出度い動物に代えることや、「率」を3にするという方向に努力している。

また、『九章算術』も余り一般的でなかったのか、「其率術」と「鶴亀算」「百鶏術」の関係は余り注意を引かなかったようである。

一方、清では、戴震（1724-1777）によって『張丘建算経』も覆刻され[10]「百鶏術」は、

---

[10] 1774年10月30日に戴震が段玉裁に宛てた書信の中で、『九章算術』『海島算経』『孫子算経』『五経算経』『夏侯陽算経』を『永楽大典』から発見した事を告げている。この後、『張丘建算経』なども校勘し、

盛んに研究された。反対に、「鶴亀算」は士大夫が論じるものとは考えられなかったのだろうか、ほとんど省みられることはなかった。

西洋数学が中国数学に大きな影響を及ぼす以前、つまり明代以前は、「百鶏術」は「鶴亀算」からの発展と当時の数学者は考えていた。更にそれが、『九章算術』の「其率術」に繋がるとすれば、従来、不定方程式の一系譜と考えられていたこの系列は、実は、中国伝統数学のほとんどの時代に跨って伝承・発展してきた問題と言えるだろう[41]。

図１　「鶴亀算」の系譜

『九章算術』→『孫子算経』→『張丘建算経』→『楊輝算法』

「其率術」　「鶴亀算」　「百鶏術」　百鶏術の解説

--------------------------------→『童蒙須知』

（率＝１）　（率＝２）　（率＝３）

図２　「百鶏術」の構造

「百鶏術」　１「鶴亀算」で未知数１つを０と仮定して１組の答えを求める

２「張丘建算経術」で増減の比率を求め、１の答えを増減する

図３　不定（剰余）方程式の系譜

（天文学）　→『孫子算経』　→　『数書九章』

「孫子定理」(中国剰余定理)　「大衍総数術」

『九章算術』　→『綴術』？　→

「更相減損」法　分数近似　「大衍求一術」

図４　「大衍総数術」の構造

１　２つの数を互に素にする

「大衍総数術」２　「大衍求一術」で、ax+by=1　を解く

３　「孫子定理」で「上元積年」を求める

参考文献

白尚恕（1983）.『九章算術注釈』. 北京：科学出版社.

遠藤利貞（1896；1918，1960，1981）.『増修日本数学史』. 東京：恒星社厚生閣.

郭書春（1990）.『九章算術匯校本』. 瀋陽：遼寧人民出版社.

郭書春（1992;1995）.『古代世界数学泰斗劉徽』.済南：山東科学技術出版社. 1995. 台北：明文書局.

『算経十書』となった。

[41] 城地,2000。

平山諦(1983).「百鶏問題」『数学史研究』97 号

井上光貞（他編）.(1976;1985).『律令』.日本思想大系 3.岩波書店.

城地茂（1987a).「律令期の数学書」、東海大学修士論文。

城地茂（1987b).「律令期の数学教育」『数学史研究』112: 13-21.

城地茂（1988).「中国湖北省江陵県張家山遺跡出土『算数書』について」『数学史研究』 117: 21-25.

城地茂（1991a).「日中の方程論再考」『数学史研究』 128: 26-34.

城地茂（1991b).「更相減損法対関孝和影響」. 国際劉徽数学思想会議論文,『北京師範大学学報(自然科学版）』vol. 27, Sup. no. 3: 155.

城地茂（1992).「英国王立協会蔵『算法童蒙須知』について」『数学史研究』 132:6-15.

城地茂（1993). *The Influence of Chinese Mathematical Arts on Seki Kowa*. PhD Thesis (London).

城地茂（2000）.「日中不定方程式の系譜」、『和算研究所紀要』 3 （待出版)。

金容雲・金容局（1978).『韓国数学史』. 槙書店.

加藤平左ヱ門（1956-64). 『和算ノ研究』. 5 vols. 日本学術振興会.『雑論』 3 vols. 1956. 『方程式論」1957. 『整数論』 1964.

児玉明人（1966). 『十五世紀の朝鮮刊銅活字版数学書』. 富士短期大学出版部.

李継閔（1985).「“其率術”弁」(Pp.11-23 of 呉文俊(編)『中国数学史論文集 1』. 済南:山東教育出版社.

李継閔（1990).『九章算術及劉徽注研究』. 西安: 陝西人民教育出版社.

李儼（1937).『中国算学史』. 上海: 商務印書館.

李儼（1933-47). 『中算史論叢』.4 巻. 上海: 商務印書館. 第 2 集. (1954-5). 5 巻. 北京: 科学出版社.

李儼・杜石然. (1976). 『中国数学簡史』. 香港: 商務印書館香港分館.

李兆華.(1991). 「時日醇『百鶏術衍』研究」、Pp.123-132 of 李迪 （編）(1991)『数学史研究文集』第 2 輯、呼和浩特:内蒙古師範大学出版社、台北:九章出版社。

王瑜生. (1993). 「『百鶏術衍』提要」、Pp. 1039-1041 of. 任継愈（編）(1993).

劉鈍. (1993). 『大哉言数』瀋陽: 遼寧教育出版社.

Needham, Joseph. (1954-). *Science and Civilization in China*. 7 vols. projected. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

日本学士院（編)(藤原松三郎). (1954).『明治前日本数学史』5 巻. 岩波書店.

大矢真一（1980).『和算以前』. 中央公論社.

小倉金之助（1940).『日本の数学』. 岩波書店.

小倉金之助（1973).『中国・日本の数学』. 頸草書房.

銭宝琮（1921).「百鶏術源流考」.『学芸』3-3:1-6. Pp.17-21 of 銭宝琮（1983).

銭宝琮(編)（1963).『算経十書』. 北京: 中華書局.

銭宝琮（1964;1981).『中国数学史』. 北京: 科学出版社. 川原秀城（訳）,1990.みすず書房.

銭宝琮（1983).『銭宝琮科学史論文選集』. 北京:科学出版社.

任継愈（編）(1993). 『中国科学技術典籍通彙』数学、5 巻. 鄭州:河南教育出版社.

下平和夫(1964).「格致算書と円方四巻記」『数学史研究』第２巻第８号.

下平和夫 (1965-70).『和算の歴史』. ２巻. 富士短期大学出版部.

下平和夫 他 (編). 1990-. 『江戸初期和算選書』. 5 vols.+ 研成社.

藪内清 (1974). 『中国の数学』. 岩波書店.

藪内清 (1979). 『中国の科学』. 中央公論社.

藪内清 (編)(1980). 『中国天文学・数学集』. 東京:朝日出版社.

中外数学簡史編写組 (編)(1986). 『中国数学簡史』. 済南: 山東教育出版社.

オンラインデータベース

台湾・故宮博物院、故宮寒泉古典文献全文資料庫 http://210.69.170.100/s25/index.htm

台湾・中央研究院、漢籍電子文献 http://www.sinica.edu.tw/ftms-bin/ftmsw3