

ε - δ 論法の形成過程の考察：解析学の基礎の転換の要因*

成城大学・立教大学 中根美知代 (Michiyo NAKANE)[†]
Seijo University and St. Paul's University

1. はじめに

高校まで得意だった数学が大学に入って突然わからなくなったという話は、しばしば聞く。その一因として、大学初年の微分積分学で習う ε - δ 論法が必ず挙げられる。高校数学では、「限りなく近づく」「限りなく小さくなる」という表現を用いて、極限に関する諸性質が述べられていた。それが大学に入ると、「限りなく」という言い方が曖昧であるといって頭ごなしに却下され、その表現を一切含まない、 ε - δ 論法に置きかえられて教えられるようになる。この論法は、決して「限りなく小さくなることのない」2つの正数 ε と δ がお互いに「せめぎあい」ながら、あるいは「2者闘争」しながらお互いをより小さな数へと追い込んでいくことにより、極限を定義していくものと要約することができるだろう。¹⁾そして、今日多くの微分積分学の教科書は、この論法は、フランスの数学者 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) によりとられたものとしている。

ところが ε - δ 論法が登場したといわれている Cauchy の代表的な教科書『解析学教程』はそのようには書かれていない。そこでは ε - δ 論法で回避したはずの「限りなく近づく」という表現を全面的に打ち出して様々な概念が定義されているのみならず、無限小も概念を定義したうえで活用して、微積分の理論を展開している。その後 Cauchy が書いた教科書『微分積分学要論』(1823年)、『微分学講義』(1829年)においてもこの状況はほとんど変わっていない。私達が期待したようなことを Cauchy はやっていないのである。

教科書の歴史的記述は、原典や数学史の専門的な文献にあたっただけでなされたとは限らないので、むやみに信頼しないほうがよい場合もある。ところが数学史の専門的研究もまた、Cauchy を ε - δ 論法の創始者・厳密な解析学を構築した人と位置づけているのである。

そうではあっても、 ε - δ 論法を学んだ人々の多くは、どこか釈然としないものを感じるであろう。 ε - δ 論法を用いて、「限りなく近づく」とか「無限小」といった概念を排除してこそ、解析学を厳密に論じられると習ってきたからである。Cauchy がそれらを使っている以上、 ε - δ 論法を導入し、厳密な基礎づけを持つ解析学を作ったとは考えがたい。先行研究者が Cauchy を ε - δ 論法の創始者と位置づける理由はなぜか。本報告の目的は、先行研究の見解を整理してこの疑問に答えるとともに、今日 ε - δ 論法を学んだものが納得するような、 ε - δ 論法の形成過程を明らかにすることである。

これから見ていくように、Cauchy が、証明の過程で用いた ε - δ 論法は無限小を導入するかどうかとは独立に使うことができるものである。限りなく近づくという概念を不等式で評価できる形に置き換えることは、解析学を厳密に論じる上で確かに有用であった。実際、Dirichet や Riemann もまた、無限小を認めつつ、 ε - δ 形式による証明を用いている。しかし私達が知りたいのは、無限小が払拭され、それに代わって ε - δ 論法で解析学が

*研究集会での演題は“関数概念の変遷と ε - δ 論法”であったが、講演内容に即して手直した。

[†]成城大学・立教大学非常勤講師 e-mail:michiyo.nakane@nifty.ne.jp

基礎づけられていく過程である。

Cauchy が敷いた路線を Weierstrass が継承し、今日見るような解析学が完成したとするのが先行研究の見解であるが、この道のりは、「解析学の厳密化」の一言で片づけられ、十分に論じられていないのが現状である。²⁾ 本報告では、この過程もあらためて注目し、解析学の基礎づけの転換の要因を探っていきたい。

2.ε-δ 論法前史

極限に関する概念を「任意の数より小さい」と捉えることは、遅くも 17 世紀にはあった。誰が最初に提示したのかははっきりしないが、たとえば、Wallis の『無限の数論』(1656 年) 命題 40 では

「項の数が増すとき、 $\frac{1}{4}$ からの超過分は減少し続け、任意の与えられた数よりも小さくなり、項の個数が無限となる場合には消失しなければならない。」

といった言明が見られる。また、Newton の『プリンキピア』(1687 年) にも、たとえば、「諸量がそれでもって零に近づくところのこれら極限の比は、実際に極限量の比ではなく、限りなく減少していく諸量の比が、たえず近づいてゆく極限であり、また与えられた任意の差に対するよりもいつそう近くまで達することは出来るが決して越えることはできず、それらの量が無限に小さくなるまでは実際には到達することができない極限である。」との記述が見られる。

すなわち彼らの時代には「極限において等しくなること」と「その極限に向かって変化していく量との差が与えられた有限値よりも小さいこと」とが等価であることが認識されているのである。ただし、この時点で ε-δ 論法がとられているとは言い難い。2つの正数のせめぎ合いにより、お互いをより小さい数に追い込んでいくという操作が見られないからである。

一方で、17 世紀から 18 世紀にかけて、「限りなく小さくなるが、決して 0 にはならない」無限小量が極限概念の規定に積極的に活用されるようになる。無限小量は 0 でないからとしてそれで割り、今度は限りなく小さいからとの理由で 0 とおくという、矛盾にみちたいい加減な操作をしながら、微積分学に関する重要な定理が次々と導かれていった。

もちろん、無限小量のこのような性質について、疑問を差し挟む者も多数おり、論争が繰り広げられていた。この状況については、本報告集に収録される林論文で詳しく論じられているので、そちらに譲りたい。

このような状況下にあつて、無限小量を導入しない形で厳密な解析学を構成し、さらに解析学を代数的な操作に還元して議論しようとしたのが、Joseph Louis Lagrange (1736-1813) であった。彼は、『解析関数の理論』(1797 年) や『関数解析講義』(1806 年) において、 x の任意の関数 $f(x)$ を

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots,$$

と展開し、 p, q, r, \dots は i とは独立に定められる量であることを指摘したうえで、それらが 1 次、2 次、3 次、 \dots の導関数であることに注目した。このようにして微分を定義し

ていけば、極限概念や無限小を導入することなく、解析学が展開できるというのが、彼の主張であった。今日の目から見れば、関数のべき級数展開の一意性、級数の収束を無条件に認めるなど、極めて曖昧かつ不十分なものとしか思えない理論であるが、Lagrange の意図は、貫かれている。

極限や無限小の概念とは無関係でありながら、彼の『関数解析講義』は ε - δ 論法形成に大きな役割を果たしている。「変数が 0 になるとき、値が 0 となるような関数は、変数が正の方向に増えていくときは導関数と同じ符号で有限な値を、負の方向に増えていくときは導関数と反対の符号で有限の値をとる。ただし導関数の値は、同じ符号を保ち、無限にならないものとする」という定理を証明する過程で、以下のような手法が見られるからである。

Lagrange は関数 $f(x)$ が

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + iV, \quad (L1)$$

(ここで $V(i)$ は i が 0 になるとき、ともに 0 となる)

と表せることを指摘した。彼はここで、「 $V(i)$ は i が 0 になるとき、ともに 0 となる」とは、与えられた任意の正の D に対して、十分小さい i を選び、 $|V(i)|$ を D よりも小さくすることができる、としている。この点に注意して (L1) の式を書き換えると、

$$f(x+i) - f(x) = i[f'(x) + V] \quad (L2)$$

は $i[f'(x) \pm D]$ の間に入ることになる。Lagrange はこの性質を使って、定理の証明を進めていく。

このことは今日の記号を使えば

$$i[f'(x) - D] < f(x+i) - f(x) < i[f'(x) + D] \quad (L3)$$

と書き換えることが出来る。Lagrange 自身は、この関数を「 i が限りなく 0 に近づくと V も限りなく 0 に近づき、最終的には $V(0) = 0$ となる」とは特徴づけていない。彼が表現したかったのはそのような関数であったが、彼の主義からして、極限に関する議論はとりいれたくないのであろう。そこで彼は、同じことを i と D のせめぎ合いで説明している。すなわち ε - δ 論法の考え方で極限概念を規定しているのである。Lagrange が無限小量を嫌っていたことを考え合わせれば、 D も i も無限小量にはなりえないので、ここで示されているのはまさしく ε - δ 論法であろう。

変数が 0 になるとともに関数値が 0 になるという状況を表現するためには、今日しばしば矢印で表わされる極限操作が不可欠であるが、これは、等式や不等式で表される概念に比べて、形式的に扱いにくい。たとえば矢印の左右に有限確定値 α を加えても矢印は成り立つかどうかについては、やや慎重にならねばならない。しかしここに見られるように、不等式に相当する表現方法で $f(x)$ の概念を規定することが出来れば、この関数の考察は代数的・形式的な操作で続けられていく。彼は極限概念を不等式の表現に帰着することにより、解析学を代数的に扱うことに成功したのである。この成果は、どのようにし

て、極限や無限小を伴うそれ以降の解析学と結びついていったのだろうか。

3. Cauchy の ε - δ 論法と無限小

べき級数展開で微分を定義するという Lagrange の方針は、残念ながら次の世代には本格的に引き継がれなかった。フランスで、あるいはそこでの成果を移入したイギリスでとられたのは、依然として、「限りなく近づく」とか無限小量を取り込んだ解析学である。³⁾ Cauchy の教科書もその路線をとっている。まず、Cauchy の最初の微積分学に関する教科書、『解析学教程』で提示された、極限に関するいくつかの定義を確認していこう。

極限の定義：ある変量の順次とる値が、ある一定の値に限りなく近づくとき、最終的には、それらの値の差が望むだけ小さくなるようにできるとき、この一定の値を極限と呼ぶ。(序文)

無限小：ある変量の順次とる値が、限りなく減少し、与えられたどのような数よりも小さくなる時、この変量は無限小あるいは無限小量と呼ばれる。この種の変数は 0 を極限として持つ(序文)

関数の連続性： α を無限小とする。ある区間内のそれぞれの x について、差 $f(x+\alpha) - f(x)$ が α の値とともに減少するとき、関数 $f(x)$ は、この区間で、この変量について連続といわれる。別の言葉で言えば、(中略) その区間で、変量の無限小の増加が関数それ自体の無限小の増加をつねに作り出すことである。(第 2 章)

Cauchy の収束条件の提示：つねに増えていく n の値に対し、和 S_n がある極限值 s に限りなく近づくとき、この級数は収束するといわれ、問題としている極限は、級数の和と呼ばれる。(中略)

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c \dots + u_{n-1}$$

が収束するための必要十分条件は、 n の無限に大きい値に対し、和

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \&c \dots$$

と極限值 s との差が、結果的にはそれらどうしの差が無限小になることである。(第 6 章)

なお、微分の定義は『微分積分学要論』に見られるが、

微分： i は無限小量、 h は有限の値であるとする。 $i = \alpha h$ とおくと、 α はまた無限小量である。そして

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha h}$$

が恒等的に成り立つので

$$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} h \tag{C1}$$

が出てくる。 h が定数であるとして、 α が限りなく 0 に近づいた時の (C1) の左辺の極限は、関数 $y = f(x)$ の微分と呼ばれているものである。

ここで見られるように、Cauchy は、極限の定義を「限りなく近づく」という表現を用

いて定義しているうえ、無限小も積極的に利用している。『解析学教程』・『微分積分学要論』のみならず『微分学講義』においても、ほぼ同様の定義が与えられている。1853年の論文においても、依然として無限小を用いて極限の定義を与えていることから、Cauchy はこれらの定義を生涯用いていたと考えてよいであろう。⁴⁾

こうしたことを指摘しつつ、Grabiner らが Cauchy を ε - δ 論法の創始者と位置づけるのは、以下のような記述が見られるからである。⁵⁾ 『微分積分学要論』第7講において「 $f(x)$ が端点 $x = x_0$ と $x = X$ の間で連続とし、その区間内での関数の微分 $f'(x)$ の最大値を A 、最小値 B とすると、有限な差の比

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

は必ず A と B の間に含まれる」

との定理が述べられている。これを証明する際に、Cauchy は δ と ε を非常に小さな数とし、 δ より小さい値 i と x_0 と X の間に含まれるすべての x に対し、比

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

が $f'(x) - \varepsilon$ より大きく $f'(x) + \varepsilon$ より小さい範囲にとどまっていることを指摘する。そして、この関係は数 ε がどんなに小さくても成り立つことを示し、証明を終えている。

直観的には「 X を限りなく x_0 に近づけたとき、 $f(X) - f(x_0)$ と $X - x_0$ の比の極限はどうなるか」ということを意味する定理と証明、すなわち極限操作と等号とで表現できる事象を、Cauchy は不等式で表現しているのである。そして先にあげた Lagrange の証明と比べてみれば、Cauchy が Lagrange から影響を受けていることは間違いないと思われる。ここで ε と δ という記号が使われていたことが、Cauchy と ε - δ 論法とを結びつける決定的な絆となったのであろう。

Lagrange がこの論法を持ち込んだのは、解析学を代数的・形式的に論じるためであったといわれる。一方、Cauchy の場合は、厳密な解析学を構成するためと評価される。それは、『解析学教程』序文において、彼がそのことを強調したためであろう。実際彼は、級数の収束を扱う時に、それまでにないほど精密な議論を作り上げている。そして確かに、この論法を導入することにより極限操作という曖昧な概念が払拭され、厳密な理論が可能になった。Grabiner らは、このような視点から、Cauchy と ε - δ 論法と厳密な解析学とを結びつけてきたのである。

この「厳密な解析学」という言葉が、 ε - δ 論法で極限概念を教育を受けた私達に、誤解を与える。すなわち、この状況は「Cauchy が無限小を解除し、 ε - δ 論法で極限概念を定義して、厳密な解析学を作った」ことを意味するように捉えてしまうからである。しかし、少なくとも Cauchy の場合、 ε - δ 論法による証明がなされていることと、極限概念を ε - δ 論法で基礎づけることとは無関係である。実際 Cauchy の枠組みの中では、無限小も「限りなく近づく」も依然として存在している。仮に Cauchy が ε - δ 論法を用いれば解析学が厳密に基礎づけると考え、それを真剣に望んでいたのであれば、後の機会を捉えて、極限に関する定義を書き換えたはずである。しかしそのようなことはない。無限小も極限

も認めるが、第7講の証明は、たまたま類似のことを証明している Lagrange の証明が巧妙だったのでまねてみたに過ぎない、というのが、Cauchy の記述から素直に読みとれるところである。

しかも Cauchy は『微分積分学要論』の別の個所では、 ε の記号で無限小を表している。定理の証明で「非常に小さな数」とされている ε が「無限小」になりうることを Cauchy が否定しているという証拠はない。今日 ε - δ 論法を習うときに強調される、任意の正数 ε を無限小と考えるはいけないということを Cauchy が理解していたかどうかは、疑わしいと思われる事例もある。⁶⁾ ε - δ 論法の形式だけまねて証明をつけることはできたが、 ε を無限小と考えていたという自らの経験あるいはそういう学生との答案に出会った経験は多くの数学者が持ち合わせていよう。

以上見たように、 ε - δ 論法によって極限操作を不等式に置き換えることと、解析学の体系から無限小をはずし、それにかわる基礎づけを ε - δ 論法で与えることとは、少なくとも歴史的には独立である。今日から見れば、前者ができれば、後者への移行はきわめて自然で容易なように思える。それゆえ、これまでの数学史の研究はその過程を強調することはなかった。しかし、当時の数学者達にとってもそうであったのだろうか。『解析学教程』の出版以降、Weierstrass の定義が導かれるまでの 40 年の年月は何を意味しているのだろうか。

4. 定理としての ε - δ 形式: Dirichlet と Riemann の扱い方

Laugwitz は、Peter Lejeune Dirichlet (1805-59) を、最も初期の段階で ε - δ 論法による講義を展開した人物と位置づけている。⁷⁾ Laugwitz が、何をさして ε - δ 論法と評価したかは慎重に検討していく余地があるが、たとえば、以下のような事実がある。

Dirichlet は、1854 年・58 年に定積分論に関する講義を行なった。彼は連続関数を Cauchy と同じように定義した後、それから導かれる性質、あるいは重要な「定理」として、「関数 $y = f(x)$ が $x = a$ から $x = b$ で連続関数であるならば、任意に小さく選ばれた ρ の絶対値に対して、小さな σ を見出すことができ、幅が σ 以下の区間で、関数値が高々 ρ しか変化しない」ことを提示し、証明している。⁸⁾ 今日、連続関数の定義として与えられているものは、まず、定理として登場したのである。Dirichlet は具体的な関数の例をいくつか挙げてこのことを示している。区間を分割し、連続関数の積分を定義するにあたっては、連続関数の不等式による表現が有用と判断したためであろう。なお、54 年の講義には Weierstrass も参加していた。

Bernhard Riemann (1826-66) もまた、メモの形で、 ε - δ 形式による連続性の定義を残している。1851 年論文に添えられている注では $w = w(z)$ が連続であることを「量 w が $z = a$ と $z = b$ の間でともに連続的に変わる」として定義しているが、この表現はつぎのことを表すものとする、として、「その区間の中で、 z に対する無限小の変化が w の無限小の変化を生じる：任意の与えられた ε に対して、 z の区間の内部で z が α よりも小さいとき、 w のふたつの値の差が ε より大きくならないように α をとることができる。」⁹⁾

さらに、遺稿のなかから発見された 1855 年づけメモには、積分論に関して言及したう

えで、「関数の連続性は不等式を用いて表現されねばならない。そうすることによりはじめて計算の方法を完全にすることができるからである」との記述も見られるのである。¹⁰⁾

Riemann が実際に複素関数論や積分論を展開する場面において、これらの注意をどのように活用したか、今のところわかっていない。しかし、少なくとも ε - δ 論法流の定義のなんらかの利点に気がついていたことは確かである。

Laugwitz によれば、Riemann が ε - δ 論法の影響を受けたのは、Dirichlet がフーリエ級数の収束性を論じ、Dirichlet 関数の概念を提示した 1829 年の論文である。確かにそこでは、 ε - δ 形式による不等式の表現を用いて、級数の収束性が論じられている。しかし、一方で、あるの証明のなかでは、任意の正数であった ε が、別の証明のなかでは、無限小を表しているという事実がある。もちろん積分論においても、依然として Dirichlet は無限小を用いている。Riemann でもこの事情は変わらない。不等式による表現の重要性を指摘しつつ、積分を考察する時には、細かく分割した区間の幅を無限小にとっている。

Dirichlet も Riemann も Cauchy と同様で、今日では無限小になってはならない「任意に小さな正数」と「無限小」を識別するという事実はない。「任意の正数」はいつの間にか、無限小になっているのである。ふたりとも無限小とはなにか、明確に定義して使っているわけではないので、文字通り「限りなく小さくなる数」と捉えていると考えていいだろう。

彼らは、無限小と ε - δ 論法による表現を併存させた形で、理論を進めている。彼らにとって ε - δ 形式は、積分を定義するといった、具体的な課題を見通しよく論じるために導かれたものなのである。今日の私達が想像するように、無限小を排除して、厳密な連続性の定義を与えようとする意図は見えない。これが、Dirichlet らの状態であった。

そうとはいっても、彼らは ε - δ 形式の有効性を認識しつつある。では、なぜ、彼らはそれを定義として採用し、それから出発して解析学を構成しないのだろうか。そうすれば、極限操作を規定する ε - δ 論法から、無限小を含まない解析学の構成へと自然に進んでいけるはずである。逆にいえば、Weierstrass はなぜ、Dirichlet らの定理を定義にしたのであろうか。これについて考察していこう。

5. 定理から定義へ：Weierstrass の 1861 年講義

今日見るような ε - δ 形式は Karl Weierstrass (1815-97) によって完成されたとされている。実際、1861 年、Berlin の Gewerbeinstitut での講義で、Weierstrass は ε - δ 形式による連続性の定義を与えている。H.A. Schwartz によって記されたこの講義録は、1971 年、Dugac によって部分的に公刊された。¹¹⁾ これに基づいて、Weierstrass のやり方を見ていこう。

Weierstrass は独立変数 x と y との対応として、関数 $y = f(x)$ を定義する。そして、「 h に対してある限界 δ が定められ、絶対値が δ より小さいすべての h について $f(x+h) - f(x)$ が任意に小さい h よりも小さくなりうるならば、独立変数の無限小の変化が関数の無限小の変化に対応するという」とし、「独立変数の無限小の変化に対して関数の無限小の変化が対応するとき、その変数に関して連続関数あるいは、その変数について連続的に変化するという」としている。このようにして「無限小の変化」を定義してしまえば、無限小

という概念を持ち込むことなく、連続関数が定義されたことになる。Dirichlet にとっては定理、Riemann にとっては覚え書きであった連続関数のこの性質は、ここで、連続関数の定義となった。

では、この転換は何によって引き起こされたのだろうか。この講義のノートの前後から推定できることに限定して考察してみよう。Weierstrass はつぎに、独立変数 h とともに 0 に近づく関数 $\varphi(h)$ を「小さい ε が与えられると、 δ が定まり、絶対値が δ より小さいとき、 $\varphi(h) < \varepsilon$ となる」と定義する。そして Weierstrass はこの関数を用いて、関数 $f(x)$ は

$$f(x+h) - f(x) = p h + h \cdot (h), \quad (W1)$$

((h) は h とともに 0 に近づく関数)

と分解されることを指摘した後、

$$\frac{df(x)}{dx} = p = f'(x), \quad (W2)$$

として微分を定義するのである。彼は後に、微分を持たない連続関数を構成するが、その際には、こちらの定義の方が、従来の $f(x+h) - f(x)$ を h で割ったものの比とする定義よりも使い勝手がいいことを述べている。¹²

Weierstrass の議論は、先に見た Lagrange の教科書を思い起こさせる。べき級数展開によって、微分を定義しているからである。Weierstrass の微分の定義においては、Cauchy の無限小は必要はない。そのかわりに、今日で言えば $o(1)$ の記号で表現される (h) が必要なのである。そして、これは Lagrange の発想や、Dirichlet らの連続関数の「定理」を応用すれば ε - δ 形式で、無限小を導入することなく定義できるものである。すなわち解析学を展開するにあたって、Cauchy の無限小は必要なくなってしまうのである。Weierstrass 自身、「無限小」という言葉は使っているし、それを排斥するという声明を出しているわけではない。彼の解析学で必要ないから使わなかったというのが、率直なところと察せられる。なお今日の微積分の教科書では、Weierstrass の $\varphi(h)$ のことを無限小と呼んでいる。

ε - δ 論法の要点は、 ε と δ のせめぎ合いにより、お互いをより小さい数へと追い込んでいくことにあった。したがって、関数の極限に関する諸性質や数列・級数の極限といった、独立変数や番号と関数や各項の値というように、2つの数の間の関係で捉えられるものには適用できる。しかし、「無限小」は自分自身が単独で小さくなっていく量である。「任意の正数より小さい数」として捉えたところで、任意の正数をより小さい数へと追い込んでいくものがない。そのため Cauchy の無限小を ε - δ 形式で書くことはできないが、「単独の無限小」に代えて、無限小の変化の関係を問題にする「関数の連続性」から話を始めることにより、 ε - δ 論法で微分積分学を貫徹させることが可能なのである。

Weierstrass のように、無限小変化を伴う量の間に関連を ε - δ 論法で一度書いてしまえば、Cauchy らの微分の定義を用いるにしても、それを ε - δ 論法で書くことは難しくない。「無限小を用いない、 ε - δ 論法に基礎づけられた厳密な解析学」はこうして形成されていったのであろう。

6. おわりに

ϵ - δ 論法という言葉は、「解析学の厳密化」と切り離せない。Lagrange や Cauchy が、極限操作を不等式による表現で置き換えたこと、それにより「限りなく近づく」という幾何学的な概念が、代数的な処理に帰着されるようになったことは、微積分に関する演算を間違いなく行なうという意味で、重要な段階であった。そして先行研究においては、このことと無限小を排除することを明確に識別せず、前者が成立した時点で後者も成立しているに等しいと考えており、解析学の厳密性を追求するという理念だけで前者から後者へ移行できると思われていた。しかし事情はそう単純ではなかった。

本報告で強調したように、 ϵ - δ 形式が導入されたことと、解析学から無限小が追放されたことは少なくとも歴史的には独立である。しかも、無限小を認めつつ、 ϵ - δ 形式で連続関数の性質を規定するといった状態が、Dirichlet や Riemann の著作に見られた。単に厳密性を追求することがその移行の要因だとすれば、 ϵ - δ 論法を使いつつ、無限小を認めるという状態をどう評価すればいいのだろうか。Dirichlet や Riemann は、この状態が厳密ではないと納得しつつ議論を進めていたとは考えがたい。Weierstrass がそこから脱却していったとすると、そこには具体的な数学上の課題があったとしか考えられないのである。

本報告ではその理由を、Weierstrass の新しい微分概念によるものとした。これを導入した際に、彼は、無限小に代えて関数の連続性を基盤におくことにより、解析学が構成できることに気がついたのである。そして、Dirichlet にとっては定理であった ϵ - δ 形式による連続性の規定を連続関数の定義に切り替え、今日見るような、 ϵ - δ 論法の定義を与えた。無限小それ自身ではなく、無限小に変化するもの之間に関係に基礎づけて理論を展開すれば、それまでの成果は、すべて ϵ - δ 形式で書くことができる。これが今日の ϵ - δ 論法の基本となる考え方であろう。

もちろん、本報告では Weierstrass が直面したと思われる具体的な課題の一例あるいは可能性を指摘したにすぎない。この時期には、連続関数の性質を ϵ - δ 形式で書くことの優位性がさまざまところから見えてきている可能性がある。Riemann が指摘するように、積分を定義する時の優位性も考えられようし、複素関数論の可能性もある。いずれにせよ、今日いう、「無限小を排除して、厳密な理論を展開するための ϵ - δ 論法」成立の要因についてはまだまだ検討の余地がある。

2次文献と注

- 1) 「せめぎあい」という言い方は一松信『解析学序説上巻』第21版、1978年、裳華房に、「2者闘争」という言い方は、遠山啓『数学入門(下)』、1960年、岩波新書に見られる。
- 2) たとえば I. Grattan-Guinness, *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, 1997, U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis*

from Euler to Weierstrass, 1989, New York:Springer. (邦訳『解析学の歴史』, 好田順治訳, 1990, 現代数学社)

3) たとえば, 当時よく使われていた Lacroix の教科書は, 極限概念を用いて書かれている. この教科書の要約したものが英訳され, 当時の英語圏に大きな影響を与えた.

4) Cauchy の解析学と無限小については, たとえば D. Laugwitz, "Infinitely Small Quantities in Cauchy's Textbooks," *Historia Mathematica*, (1987), pp.258-274. "Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820," *Archives for History of Exact Sciences*, **39**, (1988-99), pp.195-245.

5) J. V. Grabiner, *The origin of Cauchy's Rigorous Calculus*, The MIT Press, 1981. G. M. Fisher "Cauchy and the infinitely small," *Historia Mathematica* 5, (1978), pp.313-331 にも同様な論考が見られる. 他の数学史家の見解もほぼ一致している.

6) このことについては, 中根美知代「 $\varepsilon - \delta$ 論法と無限小」, 『科学基礎論研究』, 2001 年に出版予定.

7) D.Laugwitz *Bernhard Riemann 1826-1866; Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, 1996, Birkhäuser, 邦訳『リーマン: 人と業績』, 山本敦之訳, 1997 年.

8) Bottazzini は関数の一様連続性の認識の過程という立場から, 何人かの数学者の連続の定義を検討している. "Geometrical Rigour and 'Modern Analysis'". An Introduction to Cauchy's *Cours d'Analyse*, Bottazzini 編 *Cauchy Cours d'Analyse*, 1990, Editric Bologna に所収.

9) Anmerkungen として Riemann 全集に所収されている.

10) Riemann 全集 Nachträge, p.111.

11) P. Dugac, "Eléments d'analyse de Karl Weierstrass", *Archives for History of Exact Sciences*, **10**, pp.41-176. なお, これに関連した Dugac の論文, 「解析学の基礎」, Dieudonné 編『数学史 II』, 1985 年, pp.385-456 所収, "Problèmes d'histoire de l'analyse mathématique au XIX siècle. Cas de Weierstrass et Dedekind", *Historia Mathematica* 3, (1976), pp.5-19. も参考にした.

12) イタリア人数学者 Casorati は Kronecker と Weierstrass の議論の記録を残している. これによれば, 関数の連続性と微分可能可能性をどのように識別するかが, 1860 年代に問題になっていた. 64 年には関数 $\phi(x)$ が連続であるためには, いかなる関数 $f(k)$ に対して $\lim_{f(k)} \frac{\phi(x+k) - \phi(x)}{f(k)}$ が有限確定値となるかが論じられている. E. Neuenschwander, "Der Nachlass von Casorati (1835-1890) in Pavia", *Archives for History of Exact Sciences*, **19**, pp.1-89. Weierstrass の定義は, このような事情も反映していると察せられる.

原論文

A.L. Cauchy

[1821] *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique, I^{re} partie : analyse algébrique*, Paris, 1821 = Oeuvres Series 2, vol 3, Paris, 1897.

[1823] *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur la calcul infinitésimal*, vol 1, Paris, 1823= Oeuvres, Series 2, vol 4, pp. 5-261, Paris, 1899.

[1829] *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, 1829=Oeuvres, Series 2, vol 4, pp. 263-609, Paris, 1899.

[1853] "Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continutés d'une variable réelle ou imaginaire entre des limites données," *Comptes rendus*, 36(1853), pp.454-459.

P.G.L. Dirichlet

[1829] 'Sur Convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données", *J. Reine Angew. Math.*, vol 4, pp.157-169. = *Werke 1*, pp.238-306.

[1871] (1858) *Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen*, (G.F. Mayer ed.) Leipzig.

[1904] (1854) *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen* (L.Arendt ed.), Braubschweig.

S.F. Lacoix

[1797] *Traité du calcul différentiel et calcul intégral*, 1797, Paris.

J.L. Lagrange

[1797] *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1797= Œuvres 9.

[1806] *Leçons sur le calcul des fonctions*, new ed. Paris: Courcier 1806. = Œuvres 10.

I. Newton

[1687] 『自然哲学の数学的諸原理』(世界の名著第26巻), 河辺六男訳, 中央公論社, 1971年.

B. Riemann

[1851] "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse." = *Werke 1*, pp.3-48.

J.Wallis

[1656] *Arithmetica infinitorum*, Oxford, 1656.=in *Opera mathematica I, II, III*, Geroge Olms Verlag, 1972.