数理解析研究所講究録
1196 巻 2001 年 110-119



# Sampling Functions の Fourier 解析・Spectral 解析

梅垣壽春

東京工業大学名誉教授

時間変域が $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 全体である連続時間信号で信号 energy 有限なものの集団を数学的に解析することをテーマとしている．つまり $\mathbf{R}$ 上の実数値 $L^2$ 函数全体が対象である．ここでは，空間 $L^2$ は複素函数からなる数学的に整然とした複素 Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R})$ を base として論を構成する．

## §1．函数空間 $L^1(\mathbf{R})$，$L^2(\mathbf{R})$ 等

先ず，$L^1(\mathbf{R})$ は Banach 空間，$L^2(\mathbf{R})$ は Hilbert 空間であることは自明なことで，更に，これ等の空間上に積演算 $f*g$，*-involution $f\to f^*$ を付与する：
$\forall f,g\in L^1(\mathbf{R})$ or $\in L^2(\mathbf{R})$ に対して，
convolution 積：

$$f*g(t)=\int_{\mathbf{R}} f(t-s)g(s)ds=g*f(t)$$

* involution $f\to f^*$，$f^*(t)=\overline{f(-t)}$.
このとき，$L^1(\mathbf{R})$ は可換 Banach *代数となり

$$T_f g=f*g \quad \left(f\in L^1, g\in L^2\right)$$

とおくと

$$f*g\in L^2,\quad \left\|T_f g\right\|_2=\|f*g\|_2\le\|f\|_1\|g\|_2$$

を満たし,従って $T_f$ は Hilbert 空間 $L^2=L^2(\mathbf{R})$ 上の有界線形作用素素であり，且つ

$$T_{f^*}=\left(T_f\right)^*,\quad \left\|T_f\right\| (\text{作用素 norm}) \le\|f\|_1 \quad \left(f\in L^1\right).$$

次に，任意の $f\in L^1$ に対して，Fourier 変換を

$$\hat{f}(\omega)=\int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-2\pi i\omega t}dt \in C_0(\mathbf{R}) \quad \left(\hat{f}(\pm\infty)=0\right)$$

で表す．$f \in L^2$ の場合は積分演算 $\int_{-T}^{T}$ にとり，$T \to \infty$ による $L^2$ 極限演算 $\ell.i.m.$ によって $\hat{f}(\bullet)$ を得る．ここで，'Fourier 変換 $f \in L^1(\mathbf{R}) \to \hat{f} \in C_0(\mathbf{R})$' は Gelfand 変換の一つの case であることに注意．Fourier 変換の基本的性質は，任意の $f, g \in L^1$ に対して，

$$\left(f^*\right)^{\wedge}=\bar{\hat{f}}, (f*g)^{\wedge}=\hat{f}\cdot\hat{g}, \left\|\hat{f}\right\|_{\infty} \le \|f\|_1$$

且つ，$\left\{\hat{f}; f \in L^1\right\}$ は dense in $C_0(\mathbf{R})$.

これ等の事柄は多次元空間 $\mathbf{R}^n$，更に一般の調和解析に於いて，全て成立する．

## §２．正定符号函数

$\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 上の複素数値函数 $\varphi$ が正定符号（pos. def.）であるとは

$$\sum \bar{\lambda}_j \lambda_k \varphi\left(t_j-t_k\right) \ge 0 \quad (\left\{t_j\right\}_{j=1}^{n} \subset \mathbf{R},\ \left\{\lambda_j\right\}_{j=1}^{n} \subset \mathbf{C},\ \mathbf{C} \text{ は複素数全体})$$

最もよく用いられる正定符号函数の例は

$$\varphi(t)=e^{\pm 2\pi i\omega t} \qquad (\text{fixed } \omega \in \mathbf{R}),$$
$$\varphi(t)=f^* * f(t) \quad \left(f \in L^1 \text{ or } \in L^2\right).$$

これ等の基本函数を用いて，一般の pos. def. 函数が表示される：

**《基本定理》** 次の条件$1^\circ \sim 4^\circ$は互いに同値：

$1^\circ$ $\varphi$ は連続且つ pos. def. on $\mathbf{R}$であり，$\varphi(0)=1$,

$2^\circ$ (Bochner) $\mathbf{R}$ 上の正則確率測度 $\mu_\varphi$ が存在して，

$$\varphi(t)=\int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\omega t}d\mu_\varphi(\omega), \quad t \in \mathbf{R}$$

$3^\circ$ (Khinchin) $\{f_n\} \subset L^2$ が存在し，$\|f_n\|_2=1$ 且つ

$$f_n^* * f_n \to \varphi \quad \text{(任意の有限閉区間上で一様に収束)}$$

$4^\circ$　函数 $\varphi(t)$ は有界連続で $\varphi(0)=1$ 且つ

$$\int f^* * f(t)\varphi(t)dt \geq 0 \quad \left(\forall f \in L^1\right).$$

更に上記 $1^\circ \sim 4^\circ$の何れかが成立 $\Rightarrow$

$5^\circ$　$$\left|\int_{\mathbf{R}} f(t)\varphi(t)dt\right| \leq \left\|\hat{f}\right\|_\infty \quad \left(\forall f \in L^1\right).$$

**註** (1) $2^\circ$ に於いて

$$d\mu_\varphi(\omega) << d\omega \quad \Leftrightarrow \quad \exists\hat{\varphi} \in L^1 \cap L^2,$$

このとき，$\hat{\varphi}(\omega) = \dfrac{d\mu(\omega)}{d\omega}$ (Radon-Nikodym 微分).

(2) 不等式 $5^\circ$ は $\varphi$ が一般のC*-algebra 上の states の構成に発展し，Segal の大論文 Postulate for Quantum Mechanics, Annals of Math. (1947)，及びそれに関わる一連の成果の切っ掛けとなった．

## §3．RKHS（再生核 Hilbert 空間）

集合 $\Gamma$ 上の複素数値函数からなる線形空間 $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Gamma)$ がRKHS (Reproducing Kernel Hilbert 空間) であるとは，次の二条件を満足するときを云う：

<RKHS1> $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Gamma)$ は複素 Hilbert 空間，

<RKHS2> 複素数値函数$K(s,t)$ $(s,t \in \Gamma)$が存在して，次の二条件を満たす：

$$K_t(\bullet)\left(\overset{\Delta}{=}K(\bullet,t)\right) \in \mathcal{H}(\Gamma) \quad (\forall t \in \Gamma),$$

且つ

$$f(t) = \langle K_t, f\rangle, t \in \Gamma, f \in \mathcal{H}(\Gamma).$$

このとき，函数 $K=K(\bullet,\bullet)$ (on $\Gamma\times\Gamma$) をRK (=Reproducing Kernel) of RKHS

$\mathcal{H}$ という．

**《ＲＫの一意性》**　ＲＫＨＳ　に於いて，ＲＫ$K=K(\bullet,\bullet)$ は一意である．
**証明**　$K'=K'(\bullet,\bullet)$ がＲＫＨＳ$\mathcal{H}(\Gamma)$ の RK であるならば $K_t, K_t' \in \mathcal{H}(\Gamma)$ であるから $\langle K_t', f\rangle = f(t) = \langle K_t, f\rangle$ $(f \in \mathcal{H}(\Gamma), t \in \Gamma)$．故に $K_t = K_t'$，i.e.，$K'(s,t) = K(s,t)$．

次に列記する定式は有用である（証明は容易）：
＜ＲＫ１＞　$K(s,t) = \langle K_s, K_t\rangle = K_t(s) = \overline{K(t,s)}$,
＜ＲＫ２＞　$K(= K(\bullet,\bullet))$ は positive definite,
＜ＲＫ３＞　$\{K_t; t \in \Gamma\}$ は $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma)$ を生成する，
＜ＲＫ４＞　$|K(s,t)|^2 \le K(s,s)\cdot K(t,t)$,
＜ＲＫ５＞　$\forall\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ に対して，

$$x_n(t) \to x(t)\,(\forall t \in \Gamma) \text{ 且つ } \|x_n\| \le M\ (\forall n) \ \Leftrightarrow\ x_n \to x \ \text{（弱）},$$

＜ＲＫ６＞　$\forall t \in \Gamma$ に対し，$\mathcal{H}$ 上の函数 $i(\bullet)\,(i(x) = x(t))$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形汎函数である．

## §４．正定符号函数$\varphi$によるＲＫ

表記の函数$\varphi$は$\mathbf{R}$上の複素数値函数である．この$\varphi$を用いて

$$K(s,t) \overset{\Delta}{=} \varphi(s-t) \quad (s,t \in \mathbf{R})$$

とおく．

**定理４．１**　部分空間$\mathcal{H} \subset L^2(\mathbf{R})$ が $K(\bullet)$ をＲＫにもつＲＫＨＳである必要十分条件は

$$\varphi(\bullet) = K(\bullet, 0) \in L^2 \quad \text{且つ} \quad \varphi \text{ は正定符号．}$$

ここで，

$$\mathcal{H} = \{f \in L^2; f = \varphi * f\}\left(\overset{\Delta}{=} \mathcal{H}_\varphi\right) \tag{4.1}$$

且つ，$\mathcal{H}$は$L^2$の閉部分空間である．
**証明（必要性）の証明：**

$$K_t \in \mathcal{H} \subset L^2(\mathbf{R}), \quad K_t(\bullet) = K(\bullet, t) = \overline{\varphi(t-\bullet)}$$

より

$$\sum \overline{\lambda_j}\lambda_k\varphi(t_j-t_k)=\sum \overline{\lambda_j}\lambda_k K(t_j,t_k)\ge 0.$$

従って，$\varphi$は pos. def.　更に $f\in\mathcal{H}$ のとき，$K(\bullet)$ がRKであることより

$$f(t)=\langle K_t,f\rangle=\int\overline{K_t(s)}f(s)ds=\int\overline{K(s,t)}f(s)ds=\int\varphi(t-s)f(s)ds=\varphi*f(t). \quad (4.2)$$

更に式(4.1) によって $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\varphi$ を定める．これが$L^2$ の部分空間であることは自明．閉であることは，$f_n(\in\mathcal{H})\to f\in L^2$ (強)　$\Rightarrow$　$\forall g\in L^1\cap L^2$ に対して

$$\langle f_n,g\rangle=\langle\varphi\otimes f_n,g\rangle=\langle f_n,\varphi*g\rangle\to\langle f,g\rangle=\langle f,\varphi*g\rangle=\langle\varphi*f,g\rangle$$

故に $f=\varphi*f$，i.e., $\mathcal{H}$ は closed in $L^2$.

**（十分性）の証明： pos. def. $\varphi(t)=K(t,0)\in L^2$ 及び $f\in\mathcal{H}_\varphi\ (f=\varphi*f)$ とすると，等式(4.2) の計算と同様に**

$$\langle K_t,f\rangle=\varphi*f(t)=f(t).$$

**従って $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\varphi$ は$K(\bullet,\bullet)$ をＲＫとするＲＫＨＳである．　ＱＥＤ.**

**註**　ＲＫＨＳ及びＲＫなどに関しては論文 Aronszajn [1], Saito[5,6], 筆者[9,10], Yao[11] など参照.

これより直ちに次の結果を得る.

**定理４.２**　函数 $\varphi\in L^2(\mathbf{R})$ が条件 $\varphi=\varphi^* * \varphi(=\varphi^*)$ を満たせば $L^2$ の部分集合

$$\mathcal{H}_\varphi=\{f\in L^2; f=\varphi*f\}$$

は$L^2$の閉部分空間であり，それ自身でＲＫＨＳであり，且つ $\mathcal{H}_\varphi$ のＲＫ $K(\bullet)$ は

$$K(s,t)=\varphi(s-t)$$

を満たす.

## §５. Sampling (標本)函数 $S_\lambda$ と空間 $BL_\lambda$

表記の函数$S_\lambda$の際立った性質が正定符号（pos. def.）性とＲＫＨＳの特性であることに論拠を置き，本節の内容を構築しよう.

Time parameter space $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 上で定義された signal function を $f,g,\cdots$ 等

で表し，各$f$は finite energy

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

を持つ．即ち，これ等の函数は total space $L^2 = L^2(\mathbf{R})$ を形成する．

各$f \in L^2$ に対応する Fourier 変換$\hat{f} \in L^2$の変数$\omega$ は$f$ の周波数（Frequency）を表す．周波数$\omega$が（任意の，しかし固定された）$\lambda \in \mathbf{R}$によって押さえられている$f$ の集団を次の様に表す．

$$BL_\lambda \stackrel{\Delta}{=} \left\{ f \in L^2; \hat{f}(\omega) = 0 \ \text{ for } \omega \left(|\omega| > \lambda\right) \right\}.$$

**定理５.１**　$BL_\lambda$は$L^2(\mathbf{R})$の閉部分空間である．

これは Fourier 変換の線形性と Plancherel 定理より容易である．これより標本函数$S_\lambda(\bullet)$ ($\lambda > 0$，fixed) に焦点を搾り，それらを論ずる．$\forall t \in \mathbf{R}$に対して，

$$S_\lambda(t) = \begin{cases} 2\lambda \dfrac{\sin 2\pi\lambda t}{2\pi\lambda t} & (t \neq 0) \\ 2\lambda & (t = 0) \end{cases}$$

とおく．この函数は Shannon [7] によって現在の形で論じられ，彼の entropy 論と並列して情報理論の主体と見做される．

通常，標本函数を論ずる場合，先ず，この函数より直交系を構成し，Shannon 標本展開を論ずるが，ここでは Shannon が触れなかった部分について論じて見る．先ず，ＲＫＨＳについて Yao[10] の定理が挙げられる：

**定理５.２ (Yao)**　Hilbert 空間 $BL_\lambda$ はＲＫ（核函数）$K_\lambda$ によってＲＫＨＳである，i.e.,

$$BL_\lambda = \text{RKHS}\ \mathcal{H}(K_\lambda),$$

茲で，ＲＫ $K_\lambda$ は $K_\lambda(s,t) = S_\lambda(s-t), s,t \in \mathbf{R}.$

この定理は $\hat{S}_\lambda = 1_{[-\lambda,\lambda]}$ から $S_\lambda * S_\lambda = S_\lambda = S_\lambda^*$，従って，$S_\lambda$が正定符号且つ連続であり，これらを定理４.２に適用すれば直ぐ云える．

信号函数がその周波数帯域上に画くグラフがその直交座標系で，縦軸に関し

て対称である場合には，定理５.２を用い，信号函数の周波数帯域を単純な区間 $[-\lambda,\lambda]$ に限定すること無しに，より一般な，つまり周波数帯域を任意の十分な広域の場合に拡大して信号函数の解析が可能となる．例えば，周波数帯域を，区間の無限列で，

$$\cdots,[-\lambda_{2n},-\lambda_{2n-1}],[-\lambda_{2(n-1)},-\lambda_{2(n-1)-1}],\cdots,[-\lambda_2,-\lambda_1],[\lambda_1,\lambda_2],\cdots$$

$$\cdots,[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}],[\lambda_{2n+1},-\lambda_{2n+2}],\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})=\frac{1}{2}$$

とするとき，上記各区間の定義函数の和によって定まる函数 $\Psi(\bullet)$ の Fourier 逆変換 $\varphi\left(=\check{\Psi}\right)$ は $\varphi*\varphi=\varphi=\varphi^*\in L^2$ となり，$\varphi$ は pos. def. を満たす．これのＲＫＨＳの構成が可能で，定理５.２の場合と同様な formulation が可能となる．これらの定式としての表示は種々と新たなテーマが生ずる．詳細は他の機会に論ずる．

## §６． Momentum Operator $P$ とＲＫＨＳの族 $\{BL_\lambda\}_{\lambda>0}$

Momentum $P$ は Position Operator $Q$ と共に Hilbert 空間 $L^2(\mathbf{R})$ 上の自己共役作用素対として論ぜられるが，その origin は対 $(P,Q)$ が Schrödinger Pair として量子力学の根幹をなす．

$\mathcal{D}_0=\{f\in L^2(\mathbf{R});\ f$ は絶対連続且つ $f'=\dfrac{df}{dt}\in L^2\}$,

$\mathcal{D}_1=\{f\in L^2(\mathbf{R});\ tf(t)\in L^2(\mathbf{R})\}$,

に対して，

$$Pf=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}f,\quad f\in\mathcal{D}_0,$$

$$(Qf)(t)=t\,f(t),\ f\in\mathcal{D}_1$$

と置く．このとき，$P,Q$ 共に $L^2(\mathbf{R})$ 上の閉作用素であり，共に essentially s.a. 作用素である．従って，共に一意に self-adjoint (s.a. とかく) 拡張をもつ．それ等の拡張作用素も同じ記号 $P,Q$ で表す．

これが函数解析の base となって Hilbert 空間上の Spectral 解析・信号解析に発展した．その方向の一つの結果としてＲＫＨＳの１-parameter 族 $\{BL_\lambda\}_{\lambda>0}$ が構成される．これ等は $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間である．

**定理６．１**　標本函数の系$\{S_\lambda, \lambda>0\}$は$BL_\lambda, \lambda>0$ によって定まるが，系$\{S_\lambda\}$は Spectral resolution $\{\dot{S}_\lambda\}$を一意に決定する：即ち，$\forall\lambda>0$ に対して，

$$\left(\dot{S}_\lambda f\right)(t) = \dot{S}_\lambda * f(t) = \int_{\mathbf{R}} S_\lambda(t-s) f(t)dt$$

は射影作用素 $\dot{S}_\lambda : L^2(\mathbf{R}) \to BL_\lambda$を決定する．１係族$\{\dot{S}_\lambda, \lambda>0\}$は momentum $P$ のスペクトル測度となる．$P$のベキ乗$P^2$はスペクトル積分によって表現される：

$$P^2 = \frac{-1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dt^2} = \int_0^\infty \lambda d\dot{S}_\lambda.$$

**証明**　一般にスペクトル分解定理を用い，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の s.a. 作用素 $A$ はスペクトル積分によって一意に表示される：

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^A.$$

ここで，$\forall\lambda \in \mathbf{R}^+$ に対して射影作用素 $F_\lambda$ が次の様に定まる，

$$F_\lambda := E_{\sqrt{\lambda}}^A - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^A, \quad \lambda \geq 0.$$

$\{E_\lambda^A\}$がスペクトル測度であることから$\{F_\lambda\}$もスペクトル測度であることが分かる．このことより，

$$\begin{aligned} A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 dE_\lambda^A &= \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{+0}^{\infty}\right)\lambda^2 dE_\lambda^A \\ &= \int_0^\infty \lambda dE_{\sqrt{\lambda}}^A - \int_0^\infty \lambda dE_{-\sqrt{\lambda}-0}^A \\ &= \int_0^\infty \lambda dF_\lambda, \quad \text{i.e.,}\ F_\lambda = E_\lambda^{A^2}\ (\lambda \geq 0). \end{aligned}$$

一方，Position Operator $Q$ のスペクトル測度 $E_\lambda^Q$ は，

$$\left(E_\lambda^Q x\right)(t) = 1_{(-\infty,\lambda]}(t)x(t), \ \ a.e.\ \ t \in \mathbf{R}, x \in L^2(\mathbf{R})$$

を満たし，また Proj. 作用素 $\dot{S}_\lambda$ は Fourier 変換によって，

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\dot{S}_\lambda x\right) = \left(\dot{S}_\lambda x\right)^\wedge = \left(S_{\sqrt{\lambda}} * x\right)^\wedge &= 1_{(-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}]}\hat{x} \\ &= \left(1_{(-\infty,\sqrt{\lambda}]} - 1_{(-\infty,-\sqrt{\lambda}]}\right)\hat{x} \\ &= \left(E_{\sqrt{\lambda}}^Q - E_{-\sqrt{\lambda}-0}^Q\right)\hat{x} \quad (a.e.) \end{aligned}$$

が成立する．更に，$P = \mathfrak{F}^{-1}Q\mathfrak{F}$ から

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_\lambda x &= \mathfrak{F}^{-1}\left(E^Q_{\sqrt{\lambda}} - E^Q_{-\sqrt{\lambda}-0}\right)\mathfrak{F}\,x \\
&= \left(\mathfrak{F}^{-1}E^Q_{\sqrt{\lambda}}\mathfrak{F} - \mathfrak{F}^{-1}E^Q_{-\sqrt{\lambda}-0}\mathfrak{F}\right)x \\
&= \left(E^Q_{\sqrt{\lambda}} - E^Q_{-\sqrt{\lambda}-0}\right)x
\end{aligned}
$$

これから目標の関係式を得る．

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\dot{S}_\lambda = \int_0^\infty \lambda d\left(E^P_{\sqrt{\lambda}} - E^P_{-\sqrt{\lambda}-0}\right) = \int_0^\infty \lambda dE^{P^2}_\lambda = P^2.
$$

これを用いて

**定理 6．2**　運動量作用素 $P$ は標本函数系によるスペクトル測度 $\left\{\dot{S}_\lambda\right\}_{\lambda\ge 0}$ を用いて，

$$
Px = \pm\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, d\dot{S}_\lambda x, \quad x \in \mathcal{D}_\pm(P).
$$

作用素 $Q$ については $P$ を，つまりスペクトル $\dot{S}_\lambda$ を Fourier (-Unitary) 変換すれば，$Q$ も変換されたスペクトル測度によってスペクトル積分表示されることが容易に導かれる．

**追録**　この論文は momentum $P$ の square $P^2$ のスペクトル積分表示の構成の部分は当筆者の既発表の論文[8]と[10]に於いて発表済みであるが，本論に於いては $P$ 自身と合わせて position 作用素 $Q$ との関連を明確にした．

本論に於いて，特に興味を引くと思われるのは正定符号函数 $\varphi$ と，情報理論に於ける基本函数である標本函数 $S_\lambda$ の関係であるが，これらが Schrödinger pair $P,Q$ のスペクトル表示に直結しているという当初予想されなかったことに発展したことである．信号解析の関連では周波数帯域が区間 $[-\lambda,\lambda]$ に局所的に限定されることなしに，原点 $O$ の左右に限り無く帯域が分布している場合についても新たな定式として formulation を与えた．更に続く展開がなされることが期待される．

## 参考文献

[1] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1950), 337-404.

[2] R.B. Ash, Information Theory, Intersciences Publ. 1990.

[3] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingershen Operateren, Math. Ann. 104 (1931), 570-578.

[4] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, 1932.

[5] S. Saito, Theory of Reproducing Kernels and Its Applications, $\pi$ Pitman Research notes in Math. Ser. Langman Sci. & Tech. 189 1989.

[6] S. Saito, Integral transforms, reproducing kernels and their applications, Ibid, 369, 1997.

[7] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27, (1948).

[8] H. Umegaki, A spectral property of one-parameter family of sampling function, PQ-QP, Quantum Prob. & Related Topics, 1993.

[9] 梅垣壽春，情報数理の基礎，函数解析的展開，1995，Science Book Company.

[10]梅垣壽春，信号函数の生成する再生核 Hilbert 空間，京都大学数理解析研究所講究録，1067 (1998)，118-128.

[11] K. Yao, Applications of reproduction kernel Hilbert spaces, Information & Control 11 (1967), 427-444.