数理解析研究所講究録
1198 巻 2001 年 96-100

Direct Criteria of H-Matrix in Special Cases

Yoshimitsu IWASAKI（岩崎義光）[1]

Department of Mathematical Information Science, Faculty of Informatics
Okayama University of Science

1. 緒言

本文日本語の羊頭狗肉を許されたい．まず，H-行列の理論を整理し本題に至る経緯を示す．H-行列はHadamardに因んだOstrowski［6］の命名である．OstrowskiがH-行列を考えるようになったきっかけは今から百年前のMinkowskiの仕事［5］にある．本年はH-行列百年目の節目の年といえる．それはさておき，Ostrowskiの論文では，すべての主小行列式が正となるZ-行列をM-行列と定義し，さらにH-行列を導入した．彼は別に Minkowski行列，Hadamard行列を定義した．これらの拡張がそれぞれM-行列，H-行列で，その拡張は狭義優対角行列の一般化狭義優対角行列への拡張に相当する．1976年，Varga［7］がJacobi overrelaxation法，SOR法の収束性とH-行列の同値性を，従来知見をまとめる形で論じ，Berman and Plemmons［2］はM-行列に関する多くの同値な条件を総括した．これはそのまま，H-行列に関する同値な条件として読み替えができる．なかでも，Ostrowskiのつぎの定理が美しい(Satz II [5]).

定理１ $\mathscr{H} = \mathscr{G}^{+} = \hat{\mathscr{P}}_{\mathrm{M}}$.

ここに，$\mathscr{H}$はH-行列の全体，$\mathscr{G}^{+}$は一般化狭義優対角行列（GSDD行列[2]）の全体の集合で，H-行列はGSDD行列を意味する．$\hat{\mathscr{P}}_{\mathrm{M}}$ はすべての主小行列式が正の行列全体を表す．$A=\left(a_{ij}\right)$ を n 次複素正方行列とする．$M(A)=\left((-1)^{1-\delta_{ij}}\left|a_{ij}\right|\right)$（$\delta_{ij}$：Kroneckerの$\delta$）を$A$の比較行列と呼び，$M(A)$はZ-行列（非対角成分負の行列）である．

定義２ AがH-行列とは，$M(A)$が単調，すなわち，$M(A)\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$となる行列をいう．

単調なZ-行列はL-行列（対角成分正のZ-行列）となり，これをM-行列という．AがH-行列とは，その比較行列が単調，したがってM-行列となることである．単調な行列は，正則で非負成分の逆行列をもつから，

命題３ AがH-行列とは，$M(A)$が正則で$M(A)^{-1} \geq O$と同値である．

ここで，今まであまり省みられなかった幾何学的視点からH-行列を見ると，新たな同値条件に至ると同時に，定理１の成り立つことが直感的に理解できる．正則行列Aの列ベクトルからなる

[1] iwasaki@mis.ous.ac.jp

[2] これはAxelsson [1] の術語．Berman and Plemmons [2]はSGDDと呼ぶ．先に一般化してから狭義優対角（SGDD）としようとも，狭義優対角を一般化（GSDD）しようとも同値である．ここでは，語呂の良いGSDDを採用した．

単体錐（simplex cone）を$\mathrm{V}A$，単位行列をIと記すと，

命題4 A：H-行列$\Leftrightarrow \mathrm{V}I \subset \mathrm{V}M(A)$.

この命題には定理1に劣らぬ美しさがある．幾何学的内容の豊富さからいえば，GSDDにはかなわない．

定義5 AがGSDD行列とは，$M(A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$なる正ベクトル$\mathbf{x}$が存在することである．

これから，つぎの定理を得る［4］．

定理6 $A \in \mathscr{G}^+ \Leftrightarrow (\mathrm{V}I)^{\mathrm{o}} \cap (\mathrm{V}A)^{\mathrm{o}} \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathbf{1} \in \mathrm{V}M(A) \Leftrightarrow M(A)^* \succ \mathrm{O} \Leftrightarrow \tau(M(A)) > 0$.

AがGSDD行列であることと，開単体錐$(\mathrm{V}I)^{\mathrm{o}}$，$(\mathrm{V}A)^{\mathrm{o}}$があるベクトルを共有することとが同値である．これは，比較行列の単体錐が，成分すべて1のベクトル$\mathbf{1}$を含むこととも同値である．$M(A)^*$と$\tau(M(A))$は文献［4］参照．とくに，

命題7 $n \leq 3$のとき，AがH-行列であることと$|M(A)| > 0$とが同値になる．

$n \geq 4$では，この命題は成り立たない．

さて，以上がH-行列に関する要約であって，すでにH-行列の数学的特徴は言い尽くされた感がある．あえて次の問題提起をするのは，H-行列の特徴づけをより直接にしたいからである．

問題8 H-行列となるn次複素正方行列を決定せよ．

この問題を同値かつ単純な問題に換言してみる．ここでは，H-行列を扱うから，n次複素正方行列Aは正則としてよい．すなわち，$A \in \mathrm{GL}(n;\mathbf{C})$．$\forall A, B \in \mathrm{GL}(n;\mathbf{C})$に対して，関係$\sim$を$A \sim B \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} |a_{ij}| = |b_{ij}|\ (i,j \in N)\ \Leftrightarrow\ M(A) = M(B)$と定義する．ここに，$N = \{1,2,\cdots,n\}$である．関係$\sim$は同値関係となる．$\mathrm{GL}(n;\mathbf{C})$をこの同値関係で類別した商集合を$\mathrm{GL}(n;\mathbf{C})/\!\sim$と表す．$A$の分離を，$A = C - R_C = C(I - C^{-1}R_C)\ (C \in \mathrm{GL}(n;\mathbf{C}))$とすると，$H_A = C^{-1}R_C$が$A$の反復行列である．弱正則分離定理と正則分離定理を合わせたつぎの定理が成り立つ［3］．

定理9 $A \in \mathscr{H} \Leftrightarrow \varnothing \neq \mathscr{R}_{\mathrm{R}}(M(A)) \subset \mathscr{R}_{\mathrm{WR}}(M(A)) \subset \mathscr{R}_{\mathrm{CV}}(M(A))$.

とくに，Jacobi法のときは，$C = \mathrm{diag}(A)$と取り，H_AがJacobi行列$J_1(A)$である．スペクトル半径を使って定理9を表せば，

定理10 $A \in \mathscr{H} \Leftrightarrow \rho(J_1(M(A))) < 1$.

$\rho(J_1(A)) \leq \rho(J_1(M(A)))$であるから，

定理11 $A \in \mathscr{H}$のとき，$M(B) = M(A) \Rightarrow \rho(J_1(B)) < 1$.

これより，Bに関するJacobi法は収束する．反復法は逆行列を求める一手法であるから［3］，Bの逆行列がJacobi法から求まり，$\rho(J_1(B))<1$ならばBは正則になる．

$M(A)$が単調ならばその対角成分は正になり，H-行列Aの対角成分a_{ii}は$a_{ii}\neq 0\quad(i\in N)$である．非零対角成分の複素正則行列の全体を$\mathrm{GL}(n;\mathbf{C})^*$とし，L-行列の全体を$\mathscr{L}$と記すと，$\mathrm{GL}(n;\mathbf{C})^*/\sim$の完全代表系に$\mathscr{L}$をとることができる．定理11から$\mathscr{L}$でJacobi法の収束を論ずればよく，同一の同値類（equimodular set）に属するすべての行列に関するJacobi法の収束は代表元である比較行列の収束で決まる．したがって，$A=M(A)$, $a_{ii}>0\ (i\in N)$の場合を考えれば十分である．以後，AはL-行列と仮定すると，H-行列AはM-行列となる．$D_A=\mathrm{diag}(A)$とし，$D_A^{-1}A$もM-行列となることから$D_A^{-1}A$をAと考えると，Aの分離として$A=I-H$と取れ，$\mathrm{diag}(H)=\mathrm{O}$，$H\geq\mathrm{O}$である．したがって，問題8は

問題12　$H\geq\mathrm{O}\,(\mathrm{diag}(H)=\mathrm{O})$かつ$\rho(H)<1$となる行列$H$を決定せよ．

と書き直すことができる．以下では，特別な場合にHを決定し，従来知られている定理と比較してみる．

2．3重対角行列

反復法は，熱伝導方程式の2点境界値問題としての離散化から得られる，3重対角行列Aを係数行列とする線形方程式系$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$の解法として重要である．そこで，つぎの場合を扱う．

$$H=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & \mathrm{O} \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathrm{O} & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで，$a_i\geq 0, b_i\geq 0, a_ib_i=c^2(i\in N), c\geq 0$とする．$c=0$のとき，$\rho(H)=0$であるから，$\rho(H)<1$である．この例は自明な場合であって，以下では$c>0$とする．$H$を$n$次正方行列とし，その特性多項式を$\Psi_n(\lambda)$と記すと，

補題13　$\Psi_n(\lambda)=\lambda\Psi_{n-1}(\lambda)-c^2\Psi_{n-2}(\lambda)$

であるから，$c>0$から，$\lambda\neq 2c$がいえ，$D=\lambda^2-4c^2\ (\neq 0)$とおくと，

$$\Psi_n(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{D}}\left\{\left(\frac{\lambda+\sqrt{D}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{\lambda-\sqrt{D}}{2}\right)^{n+1}\right\}.$$

特性方程式$\Psi_n(\lambda)=0$のn個の根は，iを虚数単位として，

$$\lambda=\frac{1+e^{ik\omega}}{e^{ik\omega/2}}c=\left(e^{ik\omega/2}+e^{-ik\omega/2}\right)c=2c\cos\frac{k\pi}{n+1}\quad\left(k=1,2,\cdots,n,\ \omega=\frac{2\pi}{n+1}\right)\tag{1}$$

で与えられる．したがって，$\rho(H)=\left|1+e^{i\omega}\right|c$となる．ゆえに，$\rho(H)<1\ \Leftrightarrow\ c<\dfrac{1}{\left|1+e^{i\omega}\right|}$．自明な場合も取り込むと，

命題 14

$$H=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & \mathrm{O} \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathrm{O} & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \left(a_i \ge 0, b_i \ge 0,\ a_i b_i = c^2 (i \in N), c \ge 0\right)$$

のとき,

$$\rho(H) < 1 \iff 0 \le c < \frac{1}{\left|1+e^{i\omega}\right|}.$$

$c=\frac{1}{2}$のときは$\lambda=\cos\frac{k\pi}{n+1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$であるから, $\rho(H)=\cos\frac{\pi}{n+1}$で既知である [2]. また, $a,b \ge 0$のとき, $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$であり, さらに, $\left|1+e^{i\omega}\right| < 2$であるから,

系 15　$a_i \ge 0, b_i \ge 0$ $(i \in N)$のとき, $a_i + b_i \le 1$ $(i \in N) \Rightarrow \rho(H)<1$. とくに$a_i = b_i = c$ $(i \in N)$のとき, $0 \le c \le \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\rho(H)<1$.

$a_i = b_i = c = \frac{1}{2}$ ならば, $\rho(H)<1$であって, 対応するAは一意には決まらないが, 整数成分にとれば, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \mathrm{O} \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathrm{O} & & -1 & 2 \end{pmatrix}$となる. これは, 既約弱優対角行列の例としてよく知られる. しかし, 既約弱優対角行列は, H-行列であるための十分条件ではあっても必要条件ではない点は注意を要する. 命題14から容易に既約H-行列ではあるが, 弱優対角でない例を作れる. $n=3$とすると, AがH-行列であるための条件が$0 \le c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから, $c=\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とすれば, 弱優対角でない既約H-行列$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$を得る. また, 単位行列は可約H-行列であって, 弱優対角ではあるものの既約ではない.

3. 定理11に関する注意

もっと重要なのは, 定理11の逆が成り立たないことである. Aを複素行列とする. $\rho\left(J_1(M(A))\right)<1$ならば$\rho\left(J_1(A)\right)<1$であるが, 逆はいえない. つまり, Aに対するJacobi法は収束するのに, $M(A)$に対しては収束しない例がある.

まず, $\rho\left(J_1(A)\right)=\rho\left(J_1(M(A))\right)$ の場合, すなわち, 定理11の逆が成り立つ例を上げる.

1) $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$とする. Aは2次の複素正方行列である. $H=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $(a,b \in \mathbf{C})$ となり, 固有値の絶対値は$|\lambda|=\sqrt{|a||b|}$ となるから, $\rho\left(J_1(A)\right)=\rho\left(J_1(M(A))\right)$が成り立つ.

2) $H=\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & \mathrm{O} \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathrm{O} & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\left(a_i b_i = c^2 (i \in N), a_i, b_i, c \in \mathbf{C}\right)$ の場合, 固有値は式(1)で与えられる

から，$\rho(J_1(A))=\rho(J_1(M(A)))=|1+e^{i\omega}||c|$である．

つぎに，逆の成り立たない例を構成する．上の１），２）から，多重対角行列に例を求めるには，３次以上，５重以上の対角行列でなければならないことが分かる．行列 H を $H=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & a\\ b & a & 0\end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbf{C},b\neq 0)$ とする．H の固有値は $\lambda=-b,\ \frac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{b^2+8a^2}\right)$ であるから，$\mu=\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$ とおくと，$|\lambda|=|b|$ または，$|\lambda|=\frac{|b|}{2}\left|1\pm\sqrt{1+8\mu^2}\right|$ であって，$\rho(J_1(A))<1\leq\rho(J_1(M(A)))$ すなわち，

$$\frac{2}{1+\sqrt{1+8|\mu|^2}}\leq|b|<\frac{2}{\max\left\{2,\left|1\pm\sqrt{1+8\mu^2}\right|\right\}} \tag{2}$$

となるように，a，bを決めれば所期の行列を得る．いま，$\mu=\frac{1}{i\sqrt{2}}$ とおくと条件式(2)は $\frac{1}{1+\sqrt{5}}\leq|b|<1$ となるので，$b=\frac{1}{i\sqrt{2}}=-\frac{i}{\sqrt{2}}$ にとればよく，$a=-\frac{1}{2}$ である．したがって，

$$H=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$ となり，$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & i\sqrt{2}\\ 1 & 2 & 1\\ i\sqrt{2} & 1 & 2\end{pmatrix}$$ が定理11の逆の成り立たない例である．

命題16

$H=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & a\\ b & a & 0\end{pmatrix}$ $(a,b\in\mathbf{C},b\neq 0)$ とすると，$\rho(J_1(A))<1\Leftrightarrow|b|<\frac{2}{\max\left\{2,\left|1\pm\sqrt{1+8\mu^2}\right|\right\}}$ $\left(\mu=\frac{a}{b}\right)$ である．

References

[1] O. Axelsson, Iterative Solution Methods, Cambridge Univ. Press, New York, (1994).

[2] A. Berman and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, CA, (1979).

[3] Y. Iwasaki, Heritage of original matrix from its preconditioner in the convergent splitting, RIMS Report, **1084**, 87-102 (1999).

[4] Y. Iwasaki, Geometrical aspect of generalized strictly diagonal dominance: (2) Criteria, Abstracts of Autumn Annual Meeting of Jap. Math. Soc., Div. Appl. Math., 137-140 (2000).

[5] H. Minkowski, Zur Theorie der Einkerten in den algebraischen Zahlkörper, Nachr. K. Ges. Wiss. Gött., Math.-Phys. Klasse, 90-93 (1900).

[6] A. Ostrowski, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale, Comment. Math. Helv., **10**, 69-96 (1937).

[7] R. S. Varga, On recurring theorems on diagonal dominance, Lin. Alg. Appl., **13**,1-9 (1976).