数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 173-178

Stark-新谷の単数とイデアル類群について

伊藤 剛司 (早稲田大学大学院理工学研究科博士課程)

1 導入

k を実アーベル体、p を奇素数とし、$K=\bigcup_{n=0}^{\infty}k_n$ を k の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 (k に全ての 1 の p 冪乗根を添加した体に含まれる唯一の $\mathbb{Z}_p$ 拡大) とする。E_n, Φ_n をそれぞれ k_n の全単数群、(Sinnot の意味での) 円単数群とする。さらに、A_n, B_n をそれぞれ k_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群、E_n/Φ_n の p-Sylow 部分群とする。

A_n と B_n の間には、良く知られているように解析的類数公式や Iwasawa main conjecture といった密接な関係が存在することが知られているが、そこでこれらが Galois 加群として同型であるか?という問いが自然に考えられる。

これに関して、島根大の尾崎氏は次のような結果を得られている。

定理 1 (cf. [7]) p が $k/\mathbb{Q}$ で不分解、かつ拡大次数 $[k:\mathbb{Q}]$ が p と互いに素であるとする。A_n の位数が $n\mapsto\infty$ に関して有界 (すなわち K/k の岩澤 λ 不変量が 0) であるならば、十分大きい全ての n に対して Galois 加群としての同型

$$A_n\cong B_n$$

が存在する。 □

今回報告する主結果は、上記の結果の実 2 次体のある種のアーベル拡大の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と、"Stark-新谷の単数" に対する類似である。

2 Stark-新谷予想

ここでは、新谷先生の論文 [8] に沿って「実 2 次体のアーベル拡大の単数が 2 重ガンマ関数の特殊値で得られるであろう」という Stark-新谷の予想について述べる。一般の Stark 予想については [10], [11] 等を参照の事。[4],[9] 等にも日本語による詳しい解説が述べられている。

代数体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 内に埋め込まれているものとする。F を実 2 次体とし、F の整イデアル $\mathfrak{f}$ に対し $H_F(\mathfrak{f})$ を F の $\mathfrak{f}$ を法とする narrow ray class group とする。以下、$\mathfrak{f}$ は self conjugate であり、かつ次の性質を満たすと仮定する。

F の任意の総正な単数 u に対し、$u+1$ は $\mathfrak{f}$ に含まれない。

このとき、a を F の総正な整数で $a+1 \in \mathfrak{f}$ を満たすものとし、ν を (a) で代表される $H_F(\mathfrak{f})$ の類とすると、上記の仮定から ν は $H_F(\mathfrak{f})$ においてちょうど位数が 2 となる。

以下 F の元 z に対し z' で z の共役を表すことにする。

$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ を $H_F(\mathfrak{f})$ の代表元とし、ε を F の総正基本単数とするとき、$c \in H_F(\mathfrak{f})$ に対して次の集合を定める。

$$R(\varepsilon, c) = \left\{ z = x + y\varepsilon \in (\mathfrak{a}_j\mathfrak{f})^{-1} | x, y \in \mathbb{Q}, 0 < x \leq 1, 0 \leq y < 1, (z)\mathfrak{a}_j\mathfrak{f} = c \right\}$$

このとき、$R(\varepsilon, c)$ は有限集合となる。そこで、

$$X_{\mathfrak{f}}(c) = \prod_{z \in R(\varepsilon,c)} \left\{ \frac{\Gamma_2(z,(1,\varepsilon))}{\Gamma_2(1+\varepsilon-z,(1,\varepsilon))} \cdot \frac{\Gamma_2(z',(1,\varepsilon'))}{\Gamma_2(1+\varepsilon'-z',(1,\varepsilon'))} \right\}$$

と置く。但し、$\Gamma_2(z, \cdot)$ は 2 重ガンマ関数（詳しい定義は [9] 等を参照）である。

$X_{\mathfrak{f}}(c)$ が ray class c のみに依存することは、次の解析的表示が保証している。

定理 2 (cf. [8]) $c \in H_F(\mathfrak{f})$ に対し、$\zeta_F(s,c) = \sum_{\mathfrak{a} \in c} N(\mathfrak{a})^{-s}$ と定義する。このとき、

$$\zeta'_F(0,c) - \zeta'_F(0,c\nu) = \log X_{\mathfrak{f}}(c)$$

が成立する。 □

さらに、$\mathfrak{f}$ に対して次のような仮定を追加する。「F の単数 u で、$u > 0, u' < 0$ かつ $u - 1 \in \mathfrak{f}$ を満たすものは存在しない」。この仮定のもとで、b を F の整数で、$b > 0, b' < 0$ を満たすものとし、μ を (b) で代表される $H_F(\mathfrak{f})$ の類とする。

G を $H_F(\mathfrak{f})$ の部分群で、ν を含み μ を含まないものとする。さらに、$K_F(\mathfrak{f})$ を F の $\mathfrak{f}$ を法とする narrow ray class field とし、M を G に対応する部分体とする。

以上の準備のもとで、[8] において「modified version of Stark conjecture」と呼ばれている予想を述べる。

予想 ある正の整数 m が存在して $X_{\mathfrak{f}}(c, G)^m$ は M に属する単数であり、σ を Artin 写像としたとき、$\{X_{\mathfrak{f}}(c,G)^m\}^{\sigma(c_0)} = X_{\mathfrak{f}}(cc_0, G)^m$ を満たす。 □

この予想はまだ一般的には解決されていないが、特別な場合にはすでに新谷先生自身によってこの予想が提出された論文 [8] で証明されている。

定理 3 M がその $\mathbb{Q}$ 上最大アーベル部分体上 2 次拡大で、かつ F の 2 つある無限素点のうち、$\mathbb{R}$ への埋め込みに対応しているもののみが分解しているならば、予想は正しい。 □

この場合は、M の Galois 閉包がある虚 2 次体のアーベル拡大になることがわかり、楕円単数を用いて $X_{\mathfrak{f}}(c, G)^m$ を構成することができるのである。

3　円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大

我々の興味は（予想が成立している場合の）円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大における Stark- 新谷の単数群の挙動である。ζ_{p^n} を 1 の原始 p^n 乗根とし、$\mathbb{Q}_n$ を $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ に含まれる唯一の p^n 次巡回拡大体とする。このとき、$M_\infty = \bigcup_{n\geq 0} M\mathbb{Q}_n$ を M の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と呼ぶ。

もし、M が定理 1 の条件を満たしている場合は、M_n も明らかに定理 1 の条件を満たすので、各 M_n に関して予想が成立していることがわかる。

以下、簡単の為に M は F 上 2 次拡大とする。この場合は次の結果が知られている。

定理 4 (cf. [5])　α を F の整数で、$\alpha > 0, \alpha' < 0$（α' は α の共役）を満たすものとし、$M = F(\sqrt{\alpha})$ とする。p を奇素数とし、p の上にある F の全ての素点は M において不分解であるとする。M_n/F の導手を $\mathfrak{f}_n$、M_n に対応する $H_F(\mathfrak{f}_n)$ の部分群を G_n とすると、任意の $c \in H_F(\mathfrak{f}_n)/G_n$ に対して $X_{\mathfrak{f}_n}(c, G_n)$ は M_n の単数となる。 □

さて、そこで

$$C_n = \langle \pm 1, X_{\mathfrak{f}_n}(c, G_n) | c \in H_F(\mathfrak{f}_n)/G_n \rangle$$

と定義し、これを M_n における Stark- 新谷の単数群と呼ぶことにする。E_n を M_n の全単数群とすると、C_n は E_n の部分群となるが、有限指数ではない。そこで、単数群の「マイナス部分」すなわち、

$$E_n^- = \{u \in E_n | N_{M_n/F\mathbb{Q}_n}(u) = 1\}$$

を考える（M_n は CM 体ではないので、一般にマイナス部分と言われているものとは違うものなので注意）。$X_{\mathfrak{f}_n}(c, G_n)$ の定義と、定理 1 から $C_n \subseteq E_n^-$ がわかる。

代数体 K に対して、$h(K)$ を K の類数とする。このとき、次のような相対類数に関する解析的類数公式が知られている。

定理 5 (cf. [1],[6])

$$h(M_n)/h(F\mathbb{Q}_n) = [E_n^- : C_n] \times \text{ (a power of 2)}$$

が成立する。 □

即ち、Stark- 新谷の単数群は円単数や楕円単数と同様にイデアル類群と何かしらの関係があるのではないかという期待ができる。

これに関して、今回得られた主結果は次のようなものである。

主定理　p を奇素数、F を実 2 次体とする。α を F の整数で、$\alpha > 0, \alpha' < 0$（α' は α の共役）を満たすものとし、$M = F(\sqrt{\alpha})$ とする。M_n, E_n^-, C_n を上記

の通りとし、B_n を E_n^-/C_n の p-Sylow 部分群、A_n を M_n のイデアル類群の p-Sylow 部分群とする。さらに、

$$A_n^- = \{c \in A_n | N_{M_n/F\mathbb{Q}_n}(c) = 1\}$$

と定義する。

もし、F の p の上にある素点が M において不分解かつ A_n^- の位数が n に関して有界であるならば、十分大きい全ての n に対して Galois 加群としての同型

$$A_n^- \cong B_n$$

が存在する。 □

注意 1 主定理は実際は F 上の 2 次拡大に限らなくとも、もう少し広い範囲でも成立する。また、定理 3 の下にある注意より、上記の場合は Stark- 新谷の単数は楕円単数から得られるが、この定理の証明は $X_{\mathfrak{f}}(c, G)$ の性質のみを用いて示される。

注意 2 上記の結果の虚 2 次体版（modular unit による類似）も最近証明されている（cf. [3]）。k を虚 2 次体、p を k で分解する 5 以上の素数、$\mathfrak{p}$ を p の上にある k の素イデアル、$k(\mathfrak{p}^n)$ を k の $\mathfrak{p}^n$ を法とする ray class field としたとき、$\mathbb{Z}_p$ 拡大 $k(\mathfrak{p}^\infty)/k(\mathfrak{p})$ に関して、modular 関数の特殊値で構成される単数群で同様の定理が成り立つ。

以下、主定理の証明の概略を述べる。方針としては冒頭に挙げた円単数の場合の結果の場合と同様、Stark- 新谷の単数とイデアル類群の Galois コホモロジー群を調べるのが主要部分である。

記号の準備を行なう。$m > n$ に対し $\Gamma_{m,n} = \mathrm{Gal}(M_m/M_n)$、$i_{m,n}$ を A_n^- から A_m^- への自然な持ち上げ写像とする。

このとき、$C_m/\pm 1$ は自由 $\mathbb{Z}[\Gamma_{m,n}]$ 加群であることがわかるので（cf. [6]）、任意の i に対して Tate コホモロジー群 $\hat{H}^i(\Gamma_{m,n}, C_m)$ は自明である。そこで、

$$0 \to C_m \to E_m^- \to E_m^-/C_m \to 0$$

の完全系列から

$$\hat{H}^1(\Gamma_{m,n}, E_m^-) \cong \hat{H}^1(\Gamma_{m,n}, B_m)$$

を得る。

一方、（マイナス部分を扱うので少し議論は複雑になるが）比較的容易に

$$\ker(i_{m,n}) \cong \hat{H}^1(\Gamma_{m,n}, E_m^-)$$

がわかる。また A_n^- の位数が有界であるという仮定から、ある整数 n_0 が存在して、全ての $n > n_0$ に対して $|A_n| = |A_{n_0}|$ となる。さらに定理 3 より $|B_n| = |B_{n_0}|$ も得

この事から、任意の $n > n_0$ に対して充分大きい m を取れば、$\ker(i_{m,n}) = A_n$, $\hat{H}^1(\Gamma_{m,n}, B_m) \cong B_n$ がわかるので、以上を組み合わせて主定理が証明される。

注意 4　冒頭に述べた実アーベル体の場合と違い、主定理が適用される体 M は総実ではない、よってこの体は「総実代数体の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の λ, μ 不変量はそれぞれ 0 であろう」という Greenberg の予想 (cf. [2]) の範囲外である。実際、p が $M/\mathbb{Q}$ で完全分解している場合は、M の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の λ 不変量は必ず正になる。

そこで、主定理の仮定が成立しているような非自明な体の例を見つけることは重要である。筆者は、KASH を用いた類数の計算により $p = 3$ で任意の n に対して $|A_n^-| = 3$ となっている例をいくつか発見した ($|A_0^-| = |A_1^-| = 3$ であれば全ての n についての結果が従う)。このような総実でも CM でもない体において、どういった場合に円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の λ, μ 不変量が消えているかを調べるのは興味深い問題であると思われます。

参考文献

[1] T.Arakawa : *On the Stark-Shintani conjecture and certain relative class numbers.*, Advanced Studies in Pure Mathematics, **7** (1985),1–6.

[2] R.Greenberg : *On the Iwasawa invariants of totally real number fields.*, Amer. J. Mtah.,**93** (1976), 263–284.

[3] T. Itoh and K. Komastu : *On the group of modular units and the ideal class group*, in preparation.

[4] 内藤浩忠 : Stark- 新谷予想の紹介, 第 5 回津田塾大学整数論シンポジウム報告集, (1999),1–13.

[5] J.Nakagawa : *On the Stark-Shintani conjecture and cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions of class fields over real quadratic fields.*, J. Math. Soc. Japan,**36** (1984), 577–588.

[6] J.Nakagawa : *On the Stark-Shintani conjecture and cyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions of class fields over real quadratic fields II.*, Tôhoku Math. J.,**36** (1984), 439–452.

[7] M.Ozaki : *On the cyclotomic unit group and the ideal class group of a real abelian number field.*, J. Number Theory,**64** (1997), 211–222.

[8] T.Shintani : *On certain ray class invariants of real quadratic fields.*, J. Math, Soc. Japan,**30** (1978), 139–167.

[9] 新谷卓郎: 代数体の L- 関数の特殊値について, 数学 **29** (1977), 204–216.

[10] H.M. Stark : *L-functions at* $S = 1$., Advances in Math. I **7** (1971),301–343; II **17** (1975), 60–92; III **22** (1976), 64–84; IV **35** (1980) 197–235.

[11] J. Tate: *Les Conjectures de Stark sur les fonction L d'artin en* $s = 0$, Progress in Math. 47, Birkhäuser, 1984.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING,
WASEDA UNIVERSITY
3-4-1 OKUBO, SHINJUKU, TOKYO 169-8555, JAPAN