数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 186-194

Coverings and vector bundles of algebraic curves in positive characteristic (Raynaud の理論とその最近の発展・応用)

玉川安騎男 (Akio Tamagawa)

京都大学数理解析研究所 (RIMS, Kyoto University)

§0. Introduction.

M. Raynaud は、約20年前の論文 [R1] において、正標数代数曲線上に自然なベクトル束を定義し、付随する theta divisor を用いて曲線の被覆や基本群に関する結果を得ました。本稿の目的は、この Raynaud の理論を復習し、その後のさまざまな発展や応用について解説することです。

まず、この節では、代数曲線上の被覆 (covering) とベクトル束 (vector bundle) の関係について述べます。

Notation.

$k = \overline{k}$: 代数閉体

X: k 上の smooth 曲線 (曲線 = 幾何的連結, separated, of finite type, 1 次元)

X^*: X の smooth コンパクト化

g_X: X^* の種数, $0 \leq g_X < \infty$

n_X: $X^* - X$ の点の数, $0 \leq n_X < \infty$

$$\begin{aligned} &X\text{: proper} &&\Longleftrightarrow n_X = 0 \\ &X\text{: affine} &&\Longleftrightarrow n_X > 0 \\ &X\text{: hyperbolic} &&\Longleftrightarrow 2 - 2g_X - n_X < 0 \end{aligned}$$

$J = J_{X^*}$: X^* の Jacobi 多様体 (g_X 次元アーベル多様体)

更に、k の標数が $p > 0$ の時、

$\gamma_X \overset{\mathrm{def}}{=} \dim_{\mathbb{F}_p}(J[p](k))$: p-rank (Hasse-Witt 不変量), $0 \leq \gamma_X \leq g_X$

$$J\text{: ordinary (or } X\text{: ordinary)} \iff \gamma_X = g_X$$

X の被覆とは、finite étale 射 $f : Y \to X$ のことを言います (普通 $Y \neq \emptyset$ は仮定)。X の被覆全体を統制するのが基本群 $\pi_1(X)$ で、だいたい

$$\pi_1(X) = \text{“} \varprojlim_{f\text{: Galois}} \mathrm{Aut}(Y/X) \text{”}$$

と思うことができます。これにより、基本群に自然に profinite 位相群の構造が入ることがわかります。

k の標数が 0 の場合には、$\pi_1(X)$ は、種数 g_X のコンパクト Riemann 面から n_X 個の点を除いたものの通常の位相幾何的な基本群を profinite 完備化したものと同型になります。したがって、この場合には、profinite 群 $\pi_1(X)$ の同型類は (g_X, n_X) だけで決まり、また、逆に $\pi_1(X)$ の同型類だけでは (g_X, n_X) は完全には決まりません。($n_X > 0$ だと $\pi_1(X)$ は階数 $2g_X + n_X - 1$ の自由 profinite 群になるので、$2g_X + n_X$ の情報しか持っていないことになります。) 一方、k の標数が正の場合には、$\pi_1(X)$ の同型類は X のモジュライに依存します (cf. §2, §5)。

X 上のベクトル束とは、(いくつかの定義がありえますが) ここでは、有限階数局所自由 $\mathcal{O}_X$- 加群のことを言うことにします。特に、階数 1 のベクトル束を line bundle と呼びます。

X 上の被覆とベクトル束の間の第一の関係は、おおざっぱに言うと、被覆 $f : Y \to X$ に対して $f_*(\mathcal{O}_Y)$ が X 上のベクトル束になるということです。より詳しく言うと、次の圏同値が存在します (cf. [Mo2, Appendix])。

Proposition 0.1. X: proper と仮定する。この時、

$$\{\pi_1(X) \text{ の有限次元 } k\text{- 線型 (連続) 表現全体}\}$$
$$\simeq\{X \text{ 上 finite étale 局所的に自明なベクトル束全体}\}$$

特に、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1(X), k^\times) \simeq J_{\mathrm{char}(k)'\text{-tors}}(k)$$

但し、'char$(k)'$-tors' で、位数が k の標数で割り切れないような torsion 全体を表す。(char$(k) \nmid N$ に対し、$[L] \in J[N](k)$ は、$\boldsymbol{\mu}_N(k)$- 被覆 $Y = \mathbf{Spec}(\bigoplus_{i=0}^{N-1} L^i)$ に対応する。) $\square$

X 上の被覆とベクトル束の間の第二の関係は、k の標数が $p > 0$ の時、Y の構造層 $\mathcal{O}_Y$ が Artin-Schreier 理論を通じて Y の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$- 被覆全体を統制するということです。

第一、第二の関係を合わせると、k の標数が $p > 0$ の時、X 上のある種のベクトル束が X の被覆のそのまた $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$- 被覆を統制することになります。これが、§1, §4 で解説する Raynaud の理論の出発点です。

§1. Review of Raynaud's theory.

出典: [R1] (cf. [Ma])

この節では、X: proper と仮定し、$g \stackrel{\text{def}}{=} g_X$ とおきます。

1.0. A general theory of vector bundles on curves.

Notation.

E: X 上のベクトル束
rk(E): E の階数
deg(E): E の次数、すなわち、line bundle det(E) $(\stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{rk}(E)}{\wedge} E)$ の次数
$h^i(E) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k(H^i(X, E))$ $(i = 0, 1)$
$\chi(E) \stackrel{\text{def}}{=} h^0(E) - h^1(E)$: E の Euler-Poincaré 標数

Lemma 1.1.

$$\chi(E) = \deg(E) - (g-1)\,\mathrm{rk}(E)$$

Proof. E は line bundle たちの successive extension として表すことができるので、Riemann-Roch の定理より従う。 □

Corollary 1.2. 任意の line bundle L に対し、$\chi(E \otimes L) = \chi(E) + \mathrm{rk}(E)\deg(L)$。特に、$L$ の次数が 0 の時は、$\chi(E \otimes L) = \chi(E)$。 □

1.0 では、$\chi(E) = 0$ の場合に、E の theta divisor について説明します。

Definition. $\chi(E) = 0$ と仮定する。この時、

$$\Theta_E \stackrel{\text{def}}{=} \{[L] \in J \mid h^0(E \otimes L) > 0\}$$

と定義する。

Semicontinuity Theorem により、Θ_E は Jacobi 多様体 J の閉集合になりますが、実際には、次のように、Θ_E には自然に J の閉 subscheme の構造が入ります。

Lemma 1.3. $\chi(E) = 0$ と仮定する。この時、Θ_E は $R^1(p_J)_*((p_X)^*(E) \otimes \mathcal{L})$ の 0-th Fitting ideal を定義 ideal とする J の閉 subscheme の台集合である。ここで、$p_J : X \times J \to J$, $p_X : X \times J \to X$ は自然な射影を表し、また、$\mathcal{L}$ は $X \times J$ 上の universal line bundle を表す。 □

Corollary 1.4. Θ_E は、J 全体と一致するかまたは J の divisor となる。(後者が成立する時、「E は theta divisor を持つ」という。) □

Remark. $\chi(L) = 0$ ($\iff$ $\deg(L) = g - 1$) を満たす任意の line bundle L は theta divisor を持ちます。この時、Θ_L は古典的な theta divisor Θ (の translation) と一致します。

Proposition 1.5. $\chi(E) = 0$ と仮定する。もし E が theta divisor を持てば、Θ_E は $\mathrm{rk}(E) \cdot \Theta$ に代数的同値である。

Sketch of proof. 階数と次数を固定した (semi-stable) ベクトル束 のモジュライ空間の既約性により、E が line bundle の直和である場合に帰着される。あとは直前の Remark による。 □

Corollary 1.6. $\chi(E) = 0$ と仮定する。もし E が theta divisor を持てば、任意の自然数 N に対し

$$\sharp(\Theta_E \cap J[N]) \leq C(g)\,\mathrm{rk}(E) N^{2g-2}$$

が成立する。但し、$C(g)$ は g にしかよらないある定数。

Sketch of proof. J 内の適当な曲線 Y で原点 0 を通るものを取れば、左辺は交点数 $(\Theta_E.(N_J)^*(Y))$ で上から評価できる。ここで、N_J は、J 上の N 倍自己準同型を表す。あとは、Proposition 1.5 と交点理論を用いて交点数を評価すればよい。 □

1.1. The vector bundle B_X.

1.1 と 1.2 では、k の標数は $p > 0$ であると仮定します。

一般に、$\mathbb{F}_p$-scheme S に対し、p 乗写像 $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S$, $x \mapsto x^p$ によって定まる射 $S \to S$ を絶対 Frobenius 射と呼び、F_S で表します。ここで、$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} X \underset{\mathrm{Spec}(k), F_{\mathrm{Spec}(k)}}{\times} \mathrm{Spec}(k)$ とおくと、F_X は k- 射 $X \to X_1$ を引き起こすので、これを相対 Frobenius 射と呼び、$F_{X/k}$ で表します。

この時、次の $\mathcal{O}_{X_1}$- 加群の完全列が存在することが知られています:

$$0 \to \mathcal{O}_{X_1} \xrightarrow{i} (F_{X/k})_*(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} (F_{X/k})_*(\Omega_{X/k}) \xrightarrow{c} \Omega_{X_1/k} \to 0$$

ここで、i は $F_{X/k}$ に付随する構造層の k- 準同型、d は 自然な derivation、c は Cartier operator を表します。

Definition. i の余核 (= d の像 = c の核) を $B = B_X$ とおく。

Lemma 1.7. B は X_1 上のベクトル束であり、$\mathrm{rk}(B) = p-1$, $\chi(B) = 0$, $\deg(B) = (p-1)(g-1)$ となる。 □

次の定理が [R1] の主結果の一つです。

Theorem 1.8. B は theta divisor を持つ。

Sketch of proof. $\Theta_B \subsetneq J_1$ を示せばよい (J_1 は X_1 の Jacobi 多様体)。$V : J_1 \to J$ を Verschiebung 射とする。この時、モジュライ的な意味を考えて $\Theta_B|_{\mathrm{Ker}(V)} \subsetneq \mathrm{Ker}(V)$ を証明する。(例えば X が ordinary の時は、$\mathrm{Ker}(V)$ は constant 群 scheme $J_1[p](k)$ と一致するが、$J_1[p](k)$ の 0 以外の点は全て Θ_B に含まれるのに対し、原点 0 は Θ_B に含まれない。) □

1.2. The p-rank of cyclic coverings.

Theorem 1.9. 十分大きな素数 $l \neq p$ に対し、連結な $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$- 被覆 $Y \to X$ で、Jacobi 多様体 J_Y の 'new part' $J_Y^{\mathrm{new}} \stackrel{\text{def}}{=} J_Y / \mathrm{Im}(J_X)$ が ordinary であるものが存在する。

Proof. $[L] \in J[l](k) - \{0\}$ に対応する $\boldsymbol{\mu}_l(k)$- 被覆 Y (Proposition 0.1 参照) に対し、J_Y^{new} が ordinary でないための必要十分条件は、ある $i = 1, \ldots, l-1$ に対して

$i \cdot [L] = [L^i]$ が Θ_B に入ることである。したがって、Theorem 1.8 と Corollary 1.6 により、このような $[L]$ の個数はたかだか l^{2g-1} の定数倍である。一方 $\sharp(J[l](k)) = l^{2g}$ であるから、定理が従う。 □

Corollary 1.10. $\pi_1(X)$ は pro-prime-to-p 群ではない。 □

§2. Application 1 — Work of Pop and Saïdi.

出典: [PS]

この節では、X: proper, hyperbolic ($\iff$ $n_X = 0$, $g_X \geq 2$) を仮定し、更に、$k = \overline{\mathbb{F}}_p$ とします。

F. Pop と M. Saïdi は、Raynaud の理論を応用して次の定理を証明しました。

Theorem 2.1. Jacobi 多様体 J が simple であること、及び $\gamma_X \geq g_X - 1$ を仮定する。この時、X の同型類は有限の可能性を除いて $\pi_1(X)$ から群論的に復元される。すなわち、このような曲線たちの中で、基本群が互いに同型になるようなものは、たかだか有限個の同型類をなす。

Theorem 2.2. $R = k[[t]]$, $K = k((t))$ とする。$\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(R)$ を、種数 $g(\geq 2)$ の曲線の proper, smooth な族とする。$\mathcal{X}$ の special fiber $X = \mathcal{X}_k$ は Theorem 2.1 の条件を満たすと仮定し、また、geometric generic fiber $\mathcal{X}_{\overline{K}}$ は k 上の曲線に descent しない (i.e., $\mathcal{X}_K$: non-isotrivial) と仮定する。この時、specialization 準同型 $\pi_1(\mathcal{X}_{\overline{K}}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathcal{X}_k)$ は同型でない。

Sketch of proof of Theorem 2.2 $\Longrightarrow$ Theorem 2.1. 基本群が互いに同型になるような曲線の同型類の無限集合があったとする。モジュライ空間の中でその集合の閉包を取ると、1 次元以上になる。ここで、有限生成 profinite 群の二つの性質 (有限商の同型類の集合で元の群の同型類が決まること、及び Hopfian property) を用いれば、この閉包の中の適当な specialization に対応する、曲線の基本群の specialization 準同型が、Theorem 2.2 に反して同型になることがわかり、矛盾が生じる。 □

Sketch of proof of Theorem 2.2. 曲線の基本群は、(次数が p と素な) 巡回被覆たちの p-rank の情報を持っている。したがって、theta divisor Θ_B がどのくらい $J_{p'\text{-tors}}(k)$ と交わるかの情報を (ある程度) 持っている。Anderson-Indik の定理 ([AI]) により、special fiber ではこの交わりは無限集合であり、一方、Hrushovski の定理 (Mordell-Lang 予想の関数体版、[Hr]) により、Theorem 2.2 の仮定の下ではこの交わりは有限集合である。したがって、基本群の specialization 準同型は同型にはなりえない。 □

Note. Theorem 2.1, 2.2 のいくつかの拡張が、その後 Raynaud によって口頭発表されました：$g = 2$ の一般の場合 (2000 年 7 月、長野)；一般種数で J が supersingular の場合 (2001 年 1 月、Orsay)。更に、ごく最近 (2001 年 2 月)、筆者は Theorem 2.1, 2.2 における J の仮定を完全に取り除けることを証明しました（論文執筆中）。

§3. Application 2 — Correspondences on curves.

この節では、正標数代数曲線上の (étale な) 代数的対応と Raynaud の theta divisor B との関係について述べます。Notation は §0 の通りで、とりあえず k の標数は任意とします。

Definition. X と Y を k 上の smooth 曲線とする。k 上の smooth 曲線 Z と finite étale k- 射 $Z \to X$, $Z \to Y$ が存在する時、$X \sim Y$ と書く ('isogenous')。

標数 0 の時には、Mochizuki により、(数論的部分群に関する Margulis, Takeuchi の結果を用いて) 次の有限性定理が示されています。

Theorem 3.1 (Mochizuki [Mo1]). k の標数は 0 とし、X: hyperbolic と仮定する。自然数の組 (g, n) を固定する。この時、k 上の smooth 曲線 Y であって、$(g_Y, n_Y) = (g, n)$ かつ $X \sim Y$ となるようなものは、同型を除いてたかだか有限個しかない。 □

一方、正標数では、非常に特殊な場合ではありますが、次のように全く異なった現象が見られます。

Proposition 3.2 (T). $k = \overline{\mathbb{F}}_2$ とする。この時、k 上の任意の affine, smooth 曲線 X, Y に対して $X \sim Y$ が成立する。

Sketch of proof. 次の二つの Lemma を組み合わせればよい。(正確には、Lemma 3.3 (iv) $\Longrightarrow$ (iii) と $x = [B_X]$ に対する Lemma 3.4。Raynaud のベクトル束 B の formation が étale 射と可換であることに注意。)

Lemma 3.3. k を標数 $p > 0$ の代数閉体、X を k 上の affine, smooth 曲線とする。この時、次は同値：

(i) $\exists f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $\Omega_X = \mathcal{O}_X df$
(ii) $\exists f : X \to \mathbf{A}^1_k$ étale k- 射
(iii) $\exists f : X \to \mathbf{A}^1_k$ finite étale k- 射

更に、$p = 2$ ならば、次も同値：

(iv) $B_X (\stackrel{\text{def}}{=} B_{X^*}|_{X_1}) \simeq \mathcal{O}_{X_1}$

Sketch of proof. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftarrow$ (iii) は明らか。(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は、Riemann-Roch の定理により $X^* - X$ の全ての点で極を持つような $h \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ が存在するので、f を $f + h^{p^N}$ $(N \gg 0)$ に取り替えればよい (Abhyankar の議論)。

次に、§1, 1.1 の記号で $B = \mathrm{Im}(d)$ だったので、(X_1: affine にも注意して) (i) は

(iv′) $\exists s \in \Gamma(X_1, B_X)$, s.t. $\mathcal{O}_X \xrightarrow{s} (F_{X/k})^*(B_X) \twoheadrightarrow \Omega_X$ の合成は同型

と同値になることがわかる。$p = 2$ の時は、rank を考えて $(F_{X/k})^*(B_X) \twoheadrightarrow \Omega_X$ は同型になることがわかるので、(iv′) は (iv) と同値。 □

Lemma 3.4. $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ とし、X を k 上の affine, smooth 曲線とする。この時、任意の $x \in \mathrm{Pic}(X)$ に対し、k 上の曲線 Z と finite étale k- 射 $Z \to X$ が存在して、($\mathrm{Pic}(Z)$ 内で) $x|_Z = 0$ となる。

Sketch of proof. 類体論 (単項化定理) による。 □ □

Remark. (i) Proposition 3.2 は、任意の素数 p に対して成立することを期待してよいかもしれません。
(ii) 代数閉体 $k \supsetneq \overline{\mathbb{F}}_p$ に対しては、k 上の affine, smooth 曲線 X, Y で $X \not\sim Y$ となるものが存在することが証明できます。この場合には、Theorem 3.1 の類似も Proposition 3.2 の類似も期待できず、どのような結果を予想すべきなのか今の所筆者にはわかりません。
(iii) $X \sim Y$ の定義を修正して、k 上の smooth 曲線 Z と finite étale k- 射 $Z \to X$, $Z \to Y$ で $Z^* - Z$ での分岐がたかだか tame なものが存在する時、$X \sim^{\mathrm{t}} Y$ と書くことにします。この同値関係に関しては、Mochizuki の定理の類似が成立することを期待できるのではないかと思いますが、今の所証明のアイディアがありません。

§4. Generalization 1 — Non-abelian version by Raynaud.

出典: [R2] (cf. [Ma])

この節では、k の標数は $p > 0$ とし、X: proper, hyperbolic と仮定します。

まず、次の Nakajima, Raynaud の結果に注意します (証明は退化の手法によります)。

Theorem 4.1. X が (モジュライ空間の中で) 'generic' であると仮定する。G を有限群とし、$Y \to X$ を (連結な) G- 被覆とする。この時、次のいずれかの仮定の下、Y は ordinary である：
(i) (Nakajima [N]) G： アーベル
(ii) G： アーベル群の中心拡大で、$(\sharp(G), g!) = 1$ □

ところが一方、Raynaud は、次の結果も証明し、generic な曲線であってもその被覆は必ずしも ordinary にならないことを示しました。

Theorem 4.2. $(\sharp(G), p) = 1$ なる有限群と (連結な) G- 被覆 $Y \to X$ であって、Y が ordinary でないものが存在する。

§1 の内容を用いると、Theorem 4.2 は次の Theorem 4.3 から従うことが直ちにわかります。

Theorem 4.3. $\pi_1(X)$ の有限次元 k- 線型 (連続) 表現 ρ で、$(\sharp(\mathrm{Im}(\rho)), p) = 1$ なるものであって、$E_\rho \otimes B$ が theta divisor を持たないものが存在する。但し、E_ρ は、ρ を $\pi_1(X_1) = \pi_1(X)$ の表現と見て Proposition 0.1 で対応する X_1 上のベクトル束を表す。

Theorem 4.3 の証明の主な材料は、Mumford の理論 ([Mu]) と Hirschowitz の定理 ([Hi]) です。精密で巧妙なおもしろい証明なのですが、技術的な部分に入り込まずにうまくスケッチする自信がないので、省略させて下さい。

§5. Generalization 2 — Tamely ramified version.

出典: [T2]

この節では、k は標数 $p > 0$ とします。

Theorem 5.1. $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ とし、$g_X = 0$, $n_X \geq 2$ と仮定する。この時、X の (k-scheme としてではなく scheme としての) 同型類は、$\pi_1^{\mathrm{t}}(X)$ から群論的に完全に復元される。

Theorem 5.1 の証明では、[T1] のいくつかの議論に加えて、次の Theorem 5.2 を X の全ての被覆に対して適用することが 1 つの大きなポイントです。

Theorem 5.2. $(g_X, n_X) = (0,0), (0,1)$ の例外を除いて、(g_X, n_X) は $\pi_1^{\mathrm{t}}(X)$ から群論的に復元される。

この Theorem 5.2 の証明の核となるのが、Raynaud の Theorem 1.8 の一般化である後述の Theorem 5.4 です。それを述べるために、まず定義と補題を準備します。

Definition. X: proper と仮定する。自然数 r と X 上の effective divisor D に対し、$\mathcal{O}_{X_r} \xrightarrow{i} (F^r_{X/k})_*(\mathcal{O}_X(D))$ の余核を B^r_D と定義する。ここで、

$$X_r \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \underset{\mathrm{Spec}(k), (F_{\mathrm{Spec}(k)})^r}{\times} \mathrm{Spec}(k)$$

であり、また、$F^r_{X/k}$ は r 個の相対 Frobenius 射の合成 $F_{X_{r-1}/k} \circ \cdots \circ F_{X_1/k} \circ F_{X/k}$ を表す。

Lemma 5.3. 上の定義において、B^r_D が X_r 上のベクトル束になるための必要十分条件は、全ての $P \in X$ に対して $\mathrm{ord}_P(D) < p^r$ が成立することである。更に、この条件の下、$\mathrm{rk}(B^r_D) = p^r - 1$, $\chi(B^r_D) = \deg(D)$, $\deg(B^r_D) = \deg(D) + (g-1)(p^r - 1)$ となる。 □

Theorem 5.4. X: proper と仮定する。r を自然数とし、D を X 上の effective divisor で $\deg(D) = p^r - 1$ を満たすものとする。また、L_{-1} を X_r 上の次数 -1 の line bundle とする。この時、ベクトル束 $B^r_D \otimes L_{-1}$ は theta divisor を持つ。

Sketch of proof. Theorem 1.8 の証明における閉部分 scheme Ker(V) のようなものが標準的にはないことが問題となる。Ker(V) の代替物を構成し、その有限性 (0 次元性) を示すことがポイントである。 □

REFERENCES

[AI] G. W. Anderson and R. Indik, *On primes of degree one in function fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 31–32.

[Hi] A. Hirschowitz, *Problèmes de Brill-Noether en rang supérieur*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), 153–156.

[Hr] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 667–690.

[Ma] D. A. Madore, *Theta divisors and the Frobenius morphism*, in Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998) (J.-B. Bost, F. Loeser and M. Raynaud, eds.), Progr. Math., 187, Birkhäuser, 2000, pp. 279–289.

[Mo1] S. Mochizuki, *Correspondences on hyperbolic curves*, J. Pure Appl. Algebra **131** (1998), 227–244.

[Mo2] ———, *Foundations of p-adic Teichmüller theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 11, Amer. Math. Soc./International Press, 1999.

[Mu] D. Mumford, *On the equations defining abelian varieties I*, Invent. Math. **1** (1966), 287–354.

[N] S. Nakajima, *On generalized Hasse-Witt invariants of an algebraic curve*, in Galois groups and their representations (Nagoya, 1981) (Y. Ihara, ed.), Adv. Stud. Pure Math., 2, North-Holland/Kinokuniya, 1983, pp. 69–88.

[PS] F. Pop and M. Saïdi, *On the specialization homomorphism of fundamental groups of curves in positive characteristic*, preprint.

[R1] M. Raynaud, *Sections des fibrés vectoriels sur une courbe*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 103–125.

[R2] ———, *Revêtements des courbes en caractéristique $p > 0$ et ordinarité*, Compositio Math. **123** (2000), 73–88.

[T1] A. Tamagawa, *On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 16, 853–873.

[T2] ———, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, preprint (in revision).

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502, JAPAN

E-mail address: tamagawa@kurims.kyoto-u.ac.jp