

# Topological representations of the Iwahori-Hecke algebra —Monodromy representations associated with a Selberg type integral

東京工業大学理学部数学科  
三町勝久

ここでいうセルバーグ型積分とは、

$$\Phi(z; t) = \prod_{1 \leq i \leq m} \prod_{1 \leq j \leq n} (t_i - z_j)^{\lambda_j} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (t_i - t_j)^{\nu} \quad (1)$$

として

$$\int_{\gamma} \Phi(z; t) dt_1 \cdots dt_m$$

により定まる  $z = (z_1, \dots, z_n)$  についての多変数函数を指すものとする。ただし、函数  $\Phi(z; t)$  の多価性による曖昧さを除くために、その偏角を

$$t_i - z_j > 0 \text{ のときに } \arg(t_i - z_j) = 0,$$

$$1 \leq i < j \leq m \text{ に対して } t_i - t_j > 0 \text{ のときに } \arg(t_i - t_j) = 0$$

と固定する。また、積分領域を与える  $\gamma$  は  $\Phi(z; t)$  により決まる局所系を係数にもつ捩れホモロジー  $H_m$  の元である。

この積分は特別な場合としてつぎのようなものを含んでいる.

- $n = 2$ : Selberg 積分,
- $m = 1$ ;
  - $n = 2$ : ベータ函数,
  - $n = 3$ : Gauss の超幾何函数,
  - $n = 4$ : Appell の  $F_1$  函数,
  - $n \geq 5$ : Lauricella の  $F_D$  函数,
- $SU(2)$ Wess-Zumino-Witten 模型の場合の Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解
- ある対称空間の球函数 (Heckman-Opdam の超幾何函数).

今回は、この函数のもつ大域的性質のひとつとして、そのモノドロミー表現を考察する

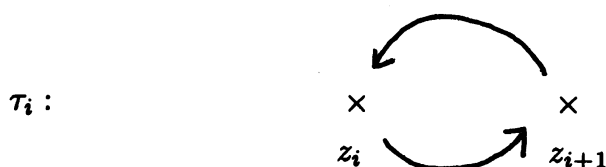
まず、説明を分かりやすくするために、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  上の異なる  $n$  個の点

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \dots \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \text{diagonal}$$

を実軸上に

$$-\infty < z_1 < z_2 < \dots < z_n < +\infty$$

と配置する. そのうえで、反時計回りの半回転 (ハーフ・デーン・ツイスト)



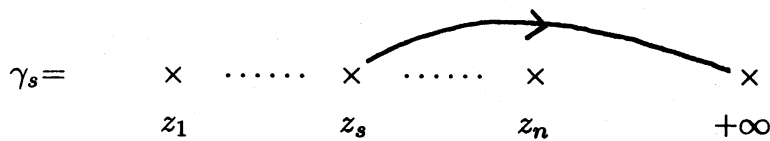
の効果を考察するのが、我々の実際的な問題である.

まず手始めに、一重積分 ( $m = 1$ ) の場合の状況を考察してみよう。

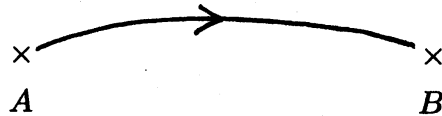
そこで改めて、 $s = 1, \dots, n$  に対して

$$F_s(z) = \int_{\gamma_s} \prod_{1 \leq j \leq n} (t - z_j)^\lambda dt$$

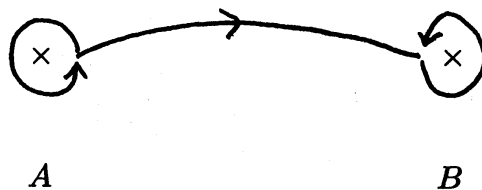
とおく。ここで、積分を与えるサイクル  $\gamma_s$  ( $1 \leq s \leq n$ ) は



で定まるものとする。ただし、ここでもそうだし、以下ずっとそうするのであるが、



と書いても、実際にはこの絵でもって必ずしも局所有限なサイクルを表すこととは限らず、



というコンパクト・サポートのサイクル (いわゆるポツホハンマー・サイクルと定数倍を除き一致。詳しくは吉田正章「私説超幾何関数」(共立出版)の p.80 あたりを見よ) を表すと思ってもよいことにする。両者は函数  $\Phi(z; t)$  の指数に関する適当な条件のもとでは同型なので、今回の話は、殆ど平行に話が進む。要は、何を考えたいのかによって好きな方を選べ



$$= (1 - e(2\lambda)) \left\{ \begin{array}{c} \cdots \times \times \cdots \times \\ z_{i+1} \quad z_i \quad \quad \quad +\infty \end{array} \right\}$$

$$+ e(2\lambda) \left\{ \begin{array}{c} \cdots \times \times \cdots \times \\ z_{i+1} \quad z_i \quad \quad \quad +\infty \end{array} \right\}$$

$$\cong (1 - e(2\lambda))\gamma_i + e(2\lambda)\gamma_{i+1}. \quad (\text{この添字はミスプリントではない})$$

このようにして、求める関係式が導かれるのである。

さて、ここで、函数  $F_s(z)$  と函数  $F_s(\dots, z_{i+1}, z_i, \dots)$  とを、そして、さらに一般的に函数  $F_s(z)$  と  $F_s(\sigma(z))$  ( $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ) とを同一視することにすれば、ベクトル空間  $\sum_{s=1}^n \mathbb{C}F_s$  上に  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) の作用が定まったと考えることができる。そして、 $\tau_i$  の作用が関係式

$$\begin{aligned} \tau_i \tau_{i+1} \tau_i &= \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i, & |i-j| \geq 2 \end{aligned}$$

および

$$(\tau_i - 1)(\tau_i + e(2\lambda)) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

という二次関係式を満たすことが示される。これは岩堀・ヘッケ代数の基本関係式に他ならない。つまり、積分に付随するモノドミー表現として岩堀・ヘッケ代数の実現が得られたのである。

ここで、岩堀・ヘッケ代数に関する基本事項をまとめておこう。  $n$  個の元  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$  を生成元、

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \\ \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad |i-j| \geq 2, \\ (\tau_i - 1)(\tau_i + q) = 0, \quad q \in \mathbb{C} \end{array} \right.$$

を基本関係式とする  $\mathbb{C}$  代数  $H(\mathfrak{S}_n) = \mathbb{C} \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle$  を岩堀・ヘッケ代数という。

ここで、 $q \in \mathbb{C}$  が

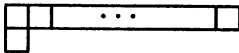
$$q(1+q) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \neq 0 \quad (2)$$

という条件を満たす時、岩堀・ヘッケ代数  $H(\mathfrak{S}_n)$  は  $\mathbb{C}$  代数として対称群  $\mathfrak{S}_n$  の群環  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$  と同型であることが知られている (行者、Wenzl). そして、このことから、上の条件下では  $H(\mathfrak{S}_n)$  の表現論は  $\mathfrak{S}_n$  の表現論に還元され、特に、

$$H(\mathfrak{S}_n) \text{ の既約表現} \xrightarrow{1:1} \mathfrak{S}_n \text{ の既約表現}$$

であり、けっきょく、岩堀・ヘッケ代数  $H(\mathfrak{S}_n)$  の既約表現が  $n$  個の箱からなるヤング図形でパラメトライズされることになる.

この基本事項を知ったうえで、われわれのモノドロミー表現を見直すと、先程得た岩堀・ヘッケ代数  $H(\mathfrak{S}_n)$  の表現がいかなるものかを明確にする問題が生じる. そして、その答えは次の通りである.

$\sum_{s=1}^n \mathbb{C}F_s$  はヤング図形   $\begin{matrix} n-1 \\ 1 \end{matrix}$  でパラメトライズされる  $H(\mathfrak{S}_n)$  の  $n-1$  次元既約表現である.

ここで、ベクトル空間  $\sum_{s=1}^n \mathbb{C}F_s$  には  $q = e(2\lambda)$  として

$$F_1 + qF_2 + \cdots + q^{n-1}F_n = 0 \quad (3)$$

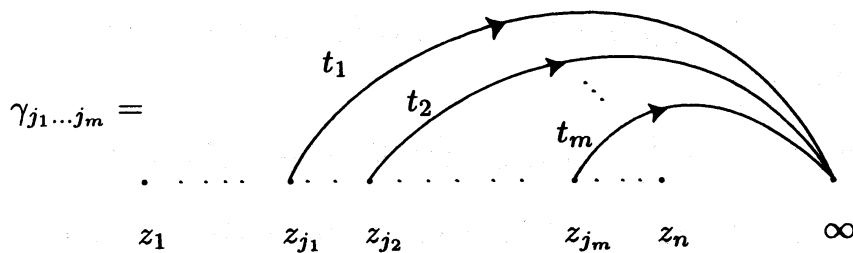
なる一次関係式がある. したがってベクトル空間  $\sum_{s=1}^n \mathbb{C}F_s$  の次元は生成元  $F_s$  の個数  $n$  より一つ小さい  $n-1$  になっている (残りの一次独立性は表現論を使う).

以上の考察により我々の解くべき具体的な問題が浮かびあがってきた。つまり、一般の  $m$  の場合に岩堀・ヘッケ代数の表現を構成し、その表現の素性を明確にすることである。

それを述べる為に  $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n$  なる添字を用いて  $m$  重積分を

$$F_{j_1 \dots j_m}(z) = \int_{\gamma_{j_1 \dots j_m}} \Phi(z; t) dt_1 \dots dt_m$$

とおく。ここで  $\gamma_{j_1 \dots j_m}$  は次のような捩れホモロジー  $H_m$  の元とする。

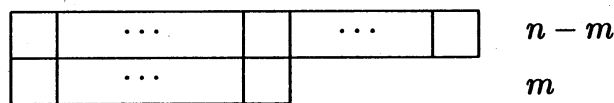


このとき、我々の主定理は次の通り。

**定理** 函数  $\Phi(z; t)$  の指数  $\lambda_j, \nu$  が  $2\lambda_j + \nu = 0$  をみたし、 $\nu/2$  が  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}, \dots, \frac{1}{n}\mathbb{Z}$  の元でなく、 $n \geq 2m$  をみたす時、

$$\sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \mathbb{C} F_{j_1 \dots j_m}(z)$$

はヤング図形



でパラメトライズされる  $H(\mathfrak{S}_n)$  の既約表現であり、その次元は

$$\binom{n}{m} - \binom{n}{m-1}$$

である。

ここで、いくつかの注意を述べておく。

- $\sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \mathcal{CF}_{j_1 \dots j_m}(z)$  中の一次関係式の個数は  $\binom{n}{m-1}$  である。  $m = 1$  のときには一次関係式が一つあったが、それは  $\binom{n}{0} = 1$  に対応していたのである。
- もし、  $2\lambda_j + \nu \neq 0$  ならば、  $\sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \mathcal{CF}_{j_1 \dots j_m}(z)$  は組み紐群の作用に対して閉じない。それが閉じる為には少し空間を膨らませて

$$\sum_{0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n} \mathcal{CF}_{j_1 \dots j_m}(z)$$

を考える必要がある。なお、この場合には、岩堀・ヘッケ代数の二次関係式は満たされない。そして、対応する表現行列は量子群  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  の  $m$  次対称テンソル表現に付随する  $R$  行列に一致する。

- $2\lambda_j + \nu$  は特異点をブローアップする際の例外因子の持つ指数に対応している。
- 我々の定理の  $m = 2$  の場合は、R.Lawrence, CMP135(1990), 141-191 の定理 4.2 に対応している。そこでは、一般の  $m$  の場合は予想として述べられている。