

ニュートン図形とベルグマン核・セゲー核の特異性

神本 丈 (JOE KAMIMOTO)  
九州大学大学院数理学研究院

この講演では、有限型擬凸領域のベルグマン核とセゲー核の特異性について、特異点論的な概念を導入することで、詳しい考察を行なう。

1. 強擬凸領域の場合

強擬凸領域のベルグマン核とセゲー核に関しては、すでに C. Fefferman [8], Boutet de Monvel-Sjöstrand [3] 等により、完全な漸近展開の形が知られており、他の数学の研究分野と結び付き、さまざまな解釈がなされている。実際、 $\mathbb{C}^n$  内の境界が滑らかな有界強擬凸領域  $\Omega$  のベルグマン核  $B(z)$  とセゲー核  $S(z)$  (これらは、対角線集合上に制限してある) は、次のように表される:

$$B(z) = \frac{\varphi^B(z)}{r(z)^{n+1}} + \psi^B(z) \log r(z)$$

$$S(z) = \frac{\varphi^S(z)}{r(z)^n} + \psi^S(z) \log r(z).$$

上の  $r(z) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  は領域  $\Omega$  の定義関数、すなわち  $\Omega = \{z; r(z) > 0\}$  かつ  $|dr(z)| > 0$  on  $\partial\Omega$ , である。さらに、 $\varphi^B(z), \psi^B(z), \varphi^S(z), \psi^S(z)$  は境界までこめて滑らかに拡張され、 $r(z)$  に関して展開されることが知られている。境界のレビ形式の行列式が  $\varphi^B(z), \varphi^S(z)$  に現れ、境界上で正の値をとる ([10],[4],[5])。

2. セミ・レギュラー擬凸領域の場合

上の結果は、レビ形式の退化した場合には、どのような形で一般化されるかという問題意識は自然である。しかし、強擬凸領域の漸近展開に関するいずれの研究をながめてみても、それらを容易には一般化することができない。弱擬凸領域の場合、特異性の発散の強さに関する評価や、さらに詳しい境界値に関する研究はたくさんあるが、意味のある漸近展開を求めたという結果は、ほとんど知られていないようである。

まず、境界値に関する Boas-Straube-Yu [2], Diederich-Herbort [7] の結果は重要なので、ここで紹介しておく。 $\Omega$  は、 $\mathbb{C}^{n+1}$  内の有界擬凸領域で、 $p \in \partial\Omega$  は、多重タイプ  $(1, 2m_1, \dots, 2m_n)$  のセミ・レギュラー (h-extendible と呼ばれることもある) な点とする。(詳しい定義は、[6],[13] を見よ。) このとき、ベルグマン核  $B(z)$  は以下をみたとす。

$$\lim_{\substack{z \rightarrow p \\ z \in \Lambda}} B(z) \cdot d(z-p)^{2+\sum_{j=1}^n 1/m_j} = B_0(\varpi).$$

ここで,  $\Lambda$  は境界に接することのない角錐,  $B_0$  は  $p$  における局所モデルのベルグマン核,  $\omega$  は  $\Omega$  内のある点とする.

漸近展開に関するものとしては, 最近私 [11] が得た柱状領域の場合についての結果を紹介したい.

以下のような, 柱状領域を考える.

$$\Omega_f = \mathbb{R}^{n+1} + i\omega_f.$$

ここで,  $\omega_f = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0 > f(x')\}$  ( $x' := (x_1, \dots, x_n)$ ).  $f(x')$  は以下の条件をみたすとする.

- (a)  $f(0) = |df(0)| = 0$ .
- (b)  $\omega_f$  は, 凸状をしている.
- (c)  $\partial\omega_f$  に関するいずれの接線の接触度数は有限である.

条件 (c) は,  $\Omega_f$  が (D'Angelo の意味で) 有限型領域であることを意味している. このとき,  $f(x')$  はある種の斉次性を持つ多項式で近似されることが分かっている.

補題 1 (Schulz). 上の条件を満たすとき,  $f(x')$  は次のように表される:

$$f(x') = P(x')[1 + h(x')],$$

ここで, 次を満たすような数の組  $(2m_1, \dots, 2m_n) \in \mathbb{N}^n$  が存在する.

- (i)  $P(x')$  は斉次性:  $P(t^{1/2m_1}x_1, \dots, t^{1/2m_n}x_n) = tP(x_1, \dots, x_n)$  を持つ.
- (ii)  $|h(x')| \leq C\sigma(x')^\gamma$  が成り立つ. ただし,  $\sigma(x') := \sum_{j=1}^n x_j^{2m_j}$  ( $C > 0, \gamma \in (0, 1)$ ).

さて, 集合  $\Delta_P = \{\tau \in \mathbb{R}^n; P(\tau) < 1\}$  とするとき, 写像  $\sigma: \omega_f \rightarrow \Delta_P \times (0, \infty)$  を以下のように定める:  $\sigma(x_0, x_1, \dots, x_n) = (\tau_1, \dots, \tau_n, \varrho)$ , ここで,

$$\tau_j = -x_j \cdot x_0^{-1/2m_j}, \quad \varrho = -x_0$$

とする.  $\mathbb{R}^{n+1}$  内の集合  $\Gamma_\delta$  を

$$\Gamma_\delta = \Gamma_\delta(f) = \{(\tau, \varrho^{1/m}) \in \Delta_P \times [0, \delta]; P(\tau)[1 + C\varrho^\gamma\sigma(\tau)^\gamma] < 1\}$$

と定義する. ただし,  $C, \gamma$  は上の補題にある正の定数. 境界点  $z^0 = (z_j^0) \in \partial\Omega_f$  は,  $\Im(z_j^0) = 0$  とする.

定理 1.  $\Omega_f$  のベルグマン核  $B(z)$  とセゲー核  $S(z)$  は,  $z^0$  の近傍で以下の形に書ける:

$$B(z) = \frac{\varphi^B(\tau, \varrho^{1/m})}{\varrho^{\sum_{j=1}^n 1/m_j + 2}} + \psi^B(\tau, \varrho^{1/m}) \log \varrho,$$

$$S(z) = \frac{\varphi^S(\tau, \varrho^{1/m})}{\varrho^{\sum_{j=1}^n 1/m_j + 1}} + \psi^S(\tau, \varrho^{1/m}) \log \varrho,$$

ここで  $\varphi^B(\tau, \varrho^{1/m}), \varphi^S(\tau, \varrho^{1/m}) \in C^\infty(\Gamma_\delta)$ ,  $\psi^B(\tau, \varrho^{1/m}), \psi^S(\tau, \varrho^{1/m}) \in C^\infty(\overline{\Delta_P} \times [0, \delta])$ , ただし,  $\delta > 0$  は小さい定数であり,  $m$  は  $\{m_1, \dots, m_p\}$  の最小公倍数とする. さらに,  $\varphi(\tau, 0) > 0$ .

### 3. HERBORT の反例

ところで、上の結果の主張するところは、強擬凸の場合と  $\Omega_f$  の場合の漸近展開の形に関する相違点は、展開の変数の巾乗にしか現れないということであり、もっと一般の有限型領域の場合にも、同様な一般化ができそうな楽観的な気分をもたらしてくれる。実際、2次元の場合や、凸領域の場合などは、上の結果は、自然に一般化されると私は信じている。しかし、次の Herbort [9] により発見された例により、このような形では一般の有限型領域の場合には、拡張されないことがわかる。

有限型擬凸領域:

$$\Omega_{HE} = \{z \in \mathbb{C}^3; \Re(z_0) + |z_1|^6 + |z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^6 < 0\}$$

のベルグマン核について、以下の不等式が成り立つ。

$$\frac{c_1}{t^3 \log(1/t)} < B(z_t) < \frac{c_2}{t^3 \log(1/t)},$$

ただし、 $z_t = (-t, 0, 0)$ ,  $t > 0$ .

Herbort の例の重要な特徴として、すぐに分かることだが、領域  $\Omega_{HE}$  は原点で凸状でない擬凸領域である。さらに、 $|z_1|^2|z_2|^2$  のせいで、セミ・セギュラーと呼ばれるクラスに属さないことがわかる。対数関数というのは、弱い特異性しか持たないが、これのおかげで、このベルグマン核がどのような形の漸近展開を持つのかを想像することが困難になっている。私の目標は、この Herbort の例を、単に反例とみなすのではなく、このような例を含むような広い領域のクラスに関しても適応できるような計算方法を見つけることである。セミ・レギュラーのクラスというのは、ある意味で実の意味で凸状に近い形状の領域を集めたもので、このクラスの研究には Real Analysis 的な手法が有用である。逆に、このクラスに含まれない擬凸領域というのは、本質的に複素解析学的であり、この意味では面白い研究対象が残されたままになっているといえる。次の節では、この未知な世界への第一歩を踏み出すために、新しい道具を用意する。

### 4. ニュートン図形

我々は、ベルグマン核・セゲー核の特異性の研究に、次の特異点論的な概念を導入することで、Herbort の例を含むような新しい結果を得ることに成功した。この節では、いくつかの概念の説明を行なう。

以下  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  とする。

まず、実領域上の関数に関する ニュートン図形を定義する。 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は原点の近傍で  $C^\infty$  級関数で、 $f(0) = 0$  を満たすものとする。 $f$  は、原点で以下のように漸近展開される。

$$f(x) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha x^\alpha.$$

ただし、 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  とする。関数  $f$  に関するニュートン多角形  $\Gamma_+(f)$  は、 $c_\alpha \neq 0$  をみたす  $\alpha$  に関する集合  $\{\alpha + \mathbb{R}_+^n\}$  の和集合の凸包で定義される。また、関数  $f$  に関するニュートン図形  $\Gamma(f)$  は、ニュートン多角形  $\Gamma_+(f)$  の境界上のコンパ

クトな平面の和集合で定義される。さらに、以下の多項式  $f_0$  を関数  $f$  の ニュートンの主部 と呼ぶ。

$$f_0(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma(f)} c_\alpha x^\alpha$$

以上の概念を、複素領域上の関数に一般化しよう。  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  を原点の近傍で  $C^\infty$  級の関数で、  $F(0) = 0$  をみたすとする。このとき、  $F$  は次のように漸近展開することができる。

$$F(z) \sim \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_+^n} C_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta.$$

ここで、  $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ ,  $\bar{z}^\beta = \bar{z}_1^{\beta_1} \cdots \bar{z}_n^{\beta_n}$  とする。関数  $F$  に関する ニュートン多角形  $\tilde{\Gamma}_+(F)$  は、  $C_{\alpha,\beta} \neq 0$  をみたす  $\alpha, \beta$  に関する 集合  $\{\alpha + \beta + \mathbb{R}_+^n\}$  の和集合の凸包で定義される。また、関数  $F$  に関する ニュートン図形  $\tilde{\Gamma}(F)$  は、ニュートン多角形  $\tilde{\Gamma}_+(F)$  の境界上のコンパクトな平面の和集合で定義される。さらに、以下の多項式  $F_0$  を関数  $F$  の ニュートンの主部 と呼ぶ。

$$F_0(z) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_+^n} C_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta.$$

上のような関数  $F(z)$  に対して、ニュートン距離  $d_F$  は、

$$d_F = \min\{d > 0; (d, \dots, d) \in \tilde{\Gamma}_+(F)\}$$

で定義される。いま、点  $P$  を  $P = \{(d_F, \dots, d_F)\} \in \tilde{\Gamma}(F)$  で定めるとき、  $\tilde{l}_F$  を  $\tilde{\Gamma}(F)$  上で  $P$  を通る  $(n-1)$  次元平面の数とする。そのとき、  $l_F = \min\{\tilde{l}_F, n\}$  とする。

## 5. 主結果

いま、  $F$  を  $\mathbb{C}^n$  で定義された  $C^\infty$  級多重劣調和関数で、  $F(0) = |dF(0)| = 0$  をみたすものとする。  $F$  に関して、次の領域を考える：

$$\Omega_F = \{(z_0, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n; \rho := \Im(z_0) - F(z_1, \dots, z_n) > 0\}.$$

ここで、領域  $\Omega_F$  に以下の条件をつける。

- (i)  $0 \in \partial\Omega_F$  は有限型な点である。
- (ii)  $F(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) = F(z_1, \dots, z_n)$  for  $\theta_j \in \mathbb{R}$ .

以下の定理は、  $\Omega_F$  のベルグマン核とセゲー核の特異性は、ニュートン図形によって決定されることがわかる。さらに詳しく述べれば、それらの特異性の強さは、ニュートン図形の対角線集合の近くの性質だけで決定される。

定理 2. 次のような正定数  $C^B(F), C^S(F)$  が存在する. 領域  $\Omega_F$  のベルグマン核  $B(z)$  とセゲー核  $S(z)$  は,

$$\lim_{\substack{\mathfrak{S}(z_0) \rightarrow 0 \\ (z_0, z) \in \Lambda}} B(z_0, z) \cdot \rho^{2+2/d_F} (\log(1/\rho))^{l_F-1} = C^B(F),$$

$$\lim_{\substack{\mathfrak{S}(z_0) \rightarrow 0 \\ (z_0, z) \in \Lambda}} S(z_0, z) \cdot \rho^{1+2/d_F} (\log(1/\rho))^{l_F-1} = C^S(F)$$

をみます. ただし,  $\Lambda$  は境界に接することのない角錐とする. さらに,  $F_0$  を  $F$  の主部としたとき,  $C^B(F) = C^B(F_0)$ ,  $C^S(F) = C^S(F_0)$  が成り立つ.

注意. 上の定理に関して, 以下の問題を考えることは有益であろう.

- (a) 不変量  $C^B(F_0), C^S(F_0)$  の意味を考えよ.
- (b) 上の定理を, より広いクラスの有限型領域に関して成り立つ (??) ことを示せ.
- (c) 上の定理を, 漸近展開の意味で詳しく調べよ.

#### REFERENCES

- [1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Volume II, Birkhauser, 1988.
- [2] H. P. Boas, E. J. Straube and J. Yu: Boundary limits of the Bergman kernel and metric, *Michigan Math. J.* **42** (1995), 449-461.
- [3] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand: Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, *Soc. Math. de France Astérisque* **34-35** (1976), 123-164.
- [4] K. Diederich: Das Randverhalten der Bergmanschen Kernfunktion und Metrik in streng pseudo-konvexen Gebieten *Math. Ann.* **187** (1970), 9-36.
- [5] ———: Ueber die 1. und 2. Ableitungen der Bergmanschen Kernfunktion und ihr Randverhalten. *Math. Ann.* **203** (1973), 129-170.
- [6] K. Diederich and G. Herbort: Pseudoconvex domains of semiregular type, *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry*, Aspects of Mathematics **E26**, Vieweg 1994.
- [7] ———: An alternative proof of a theorem of Boas-Straube-Yu, *Complex Analysis and Geometry*, Pitman Research notes in Mathematics Series, vol. 366 (1997), 112-118.
- [8] C. Fefferman: The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **26** (1974), 1-65.
- [9] G. Herbort: Logarithmic growth of the Bergman kernel for weakly pseudoconvex domains in  $\mathbb{C}^3$  of finite type, *Manuscripta Math.* **45** (1983), 69-76.
- [10] L. Hörmander:  $L^2$  estimates and existence theorems for the  $\bar{\partial}$ -operator, *Acta Math.* **113** (1965), 89-152.
- [11] J. Kamimoto: Asymptotic expansion of the Bergman kernel for tube domains of finite type, in preparation.
- [12] A. N. Varchenko: Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, *Functional Anal. Appl.*, **10-3** (1976) 175-196.
- [13] J. Yu: Peak functions on weakly pseudoconvex domains, *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), 1271-1295.