数理解析研究所講究録 1203 巻 2001 年 57-70

ガルニエ系の階層構造と対称性

東大数理　津田 照久 (TSUDA,Teruhisa)

0　はじめに

本稿では，ガルニエ系の新しい特殊解およびベックルント変換の対称性について論じる．

1) ガルニエ系にはパンルベ方程式で解かれるような (つまり非線形の) 特殊解が存在することを見る．

2) またこのことからガルニエ系の対称性はパンルベ系の対称性 (アフィン・ワイル群) を「含む」ことが期待される．ある 2 変数のガルニエ系を例にその対称性を考察する．

1　自然数の分割とパンルベ，ガルニエ系

パンルベ方程式と「4 の分割」

「パンルベ方程式 P_J $(J=I,\cdots,VI)$ はある 2 階線形常微分方程式

$$L_J: \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=R_J(x,\lambda,t)y$$

のモノドロミーやストークス係数を不変にする変形理論から導かれる.」

このことは P_{VI} については Fuchs，他の $P_J(J=I,\cdots,V)$ については Garnier によって最初に示された．2 階線形常微分方程式 L_J の特異点の個数を下表にまとめておく．

	L_Jの特異点の個数	「4 の分割」
P_{VI}	確定特異点 4 つ	(1, 1, 1, 1)
P_V	確定特異点 2 つ + 1 級不確定特異点 1 つ	(1, 1, 2)
P_{IV}	確定特異点 1 つ + 2 級不確定特異点 1 つ	(1, 3)
P_{III}	1 級不確定特異点 2 つ	(2, 2)
P_{II}	3 級不確定特異点 1 つ	(4)

上表で「4 の分割」とあるのは，特異点に

確定特異点 $=1$，　1 級不確定特異点 $=2$，　2 級不確定特異点 $=3$，$\cdots$

のように重みをつけておいて，例えば P_{IV} なら

確定特異点 1 つ + 2 級不確定特異点 1 つ $\rightarrow (1,3)$

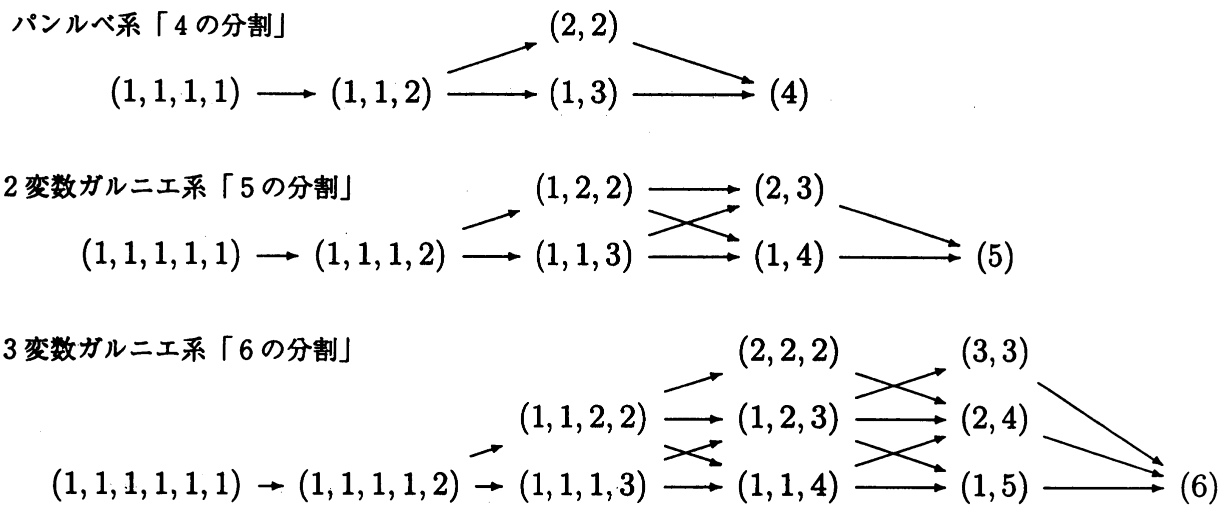

図 1: パンルベ, ガルニエ系の地図

という様にある「4の分割」を対応させている. なお P_I はパラメタを含まないので, これからの議論では例外としておく. 上の表にみるように「パンルベ方程式とは『4の分割』に付随した方程式」と理解することができる.

ガルニエ系 = 「自然数 $N(\geq 5)$ の分割」に付随した方程式の族

ガルニエ系とは, パンルベ方程式のモノドロミー保存変形の立場からの一般化 (多変数化) である.

- ガルニエ系 ([1], [2], [5])
  R.Garnier は $n+3$ 個の確定特異点を持つ2階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形から, 独立変数 n 個の非線形偏微分方程式系を導いた ($n=1$ の場合には P_{VI} に一致する). これをガルニエ系とよぶ. 自然数の分割との対応で言えば $(1,1,\cdots,1)$ の系列である.

- 退化ガルニエ系 ([3], [4], [6], [7], [8])
  パンルベ方程式と同様に, ガルニエ系の退化版も H.Kimura, Okamoto, Liu, Kawamuko らによっていくつかの系列についてはその具体形が得られている.

つまり「任意の自然数 $N(\geq 4)$ の分割に対してそれに付随する非線形微分方程式系 (パンルベ, ガルニエ系) がある」と考えられる.

以下, (#) を自然数 N (≥ 4) の分割として, 「分割 (#)」に付随するパンルベ, ガルニエ系の方程式を

$$G(\#)eq$$

と書くことにする. 例えば

$$\begin{array}{rcl} \text{パンルベ V 型方程式 } P_V & \longleftrightarrow & G(1,1,2)eq \\ \text{2 変数ガルニエ系} & \longleftrightarrow & G(1,1,1,1,1)eq \end{array}$$

のように記す.

2 ガルニエ系の特殊解

良く知られているようにパンルベ方程式やガルニエ系はガウスの超幾何方程式などの線形微分方程式系で解かれる特殊解を持つ.

ここで見るのはガルニエ系の持つ非線形の特殊解である. 次の「予想」を提出する.

「予想」 $(\#)$: 自然数の分割 $N\ (\geq 4)$ の分割. $G(1,\#)eq$ はその特殊解として $G(\#)eq$ を含む.

この予想は少なくとも $(\#) = (1,1,\cdots,1), (1,1,2), (1,3), (4), (5)$ について真である. このことはガルニエ系を具体的に観察することで確かめられる. 後で例として $G(1,4)eq \supset G(4)eq$ を見ることにする. モノドロミー保存変形の立場からの「予想」の証明が期待される.

またこの予想から, ガルニエ系の対称性はパンルベ系の対称性 (= アフィン・ワイル群) を含んでいることが期待される. 実際に $G(1,4)eq$ の対称性が $G(4)eq$ の対称性を含んでいることを見るのが, 以下の本稿の目的である.

3 ベックルント変換

パンルベ方程式やガルニエ系は, ハミルトン系としての表示を持つ. (パンルベ, ガルニエ系の) ベックルント変換とは「ハミルトン系の双有理な正準変換で, 定数パラメタを動かすことは許して系を不変にするもの」をいう. この節では P_{II} すなわち $G(4)eq$ を例にベックルント変換およびその「簡単な発見法」を紹介する.

P_{II} のハミルトン系

パンルベ II 型方程式 P_{II} は次のハミルトン系 $\mathcal{H}_{II}(q,p,s,H;\kappa_\infty)$:

$$H = p^2 - (q^2+s)p + \kappa_\infty q$$

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{ds} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = 2p - q^2 - s \\[2ex] \dfrac{dp}{ds} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = 2qp - \kappa_\infty, \end{cases}$$

と等価である. 今, ベックルント変換を「発見」するためにこのハミルトン系から変数を一つ消去することを考える.

(1) のハミルトン系から p を消去すると

$$(2) \qquad \frac{d^2q}{ds^2} = 2q^3 + 2sq - (2\kappa_\infty + 1).$$

変数の規格化は通常と異なるが，上式はパンルベ II 型方程式 P_{II} と同等である．
また q を消去すると

$$p\frac{d^2p}{ds^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{dp}{ds}\right)^2-4p^3+2sp^2+\frac{\kappa_\infty^2}{2}=0, \tag{3}$$

を得る．

方程式から見てとれる自明な対称性とベックルント変換

q,p それぞれについての単独 2 階微分方程式 (2), (3) は以下のように自明な対称性を持つ．(2) は，

$$r_1 : q \mapsto \tilde{q}=-q,\quad \kappa_\infty \mapsto -\kappa_\infty-1,$$

について不変である．また (3) は，

$$r_2 : p \mapsto \tilde{p}=p\quad ,\kappa_\infty \mapsto -\kappa_\infty,$$

について不変である．

この自明な対称性 r_1, r_2 は $\mathcal{H}_{II}(q,p,s,H;\kappa_\infty)$ のベックルント変換に持ち上がる．

- r_1 について．$r_1(p)=\tilde{p}$ は，

  $$\frac{d\tilde{q}}{ds}=2\tilde{p}-\tilde{q}^2-s,$$

  を満たすが $\tilde{q}=-q$ より，

  $$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= -\frac{dq}{ds}=-(2p-q^2-s)\\ (\text{右辺}) &= 2\tilde{p}-(-q)^2-s,\end{aligned}$$

  となる．つまり

  $$\tilde{p}=-p+q^2+s,$$

  を得る．

- r_2 について．$r_2(q)=\tilde{q}$ は，

  $$\frac{d\tilde{p}}{ds}=2\tilde{q}\tilde{p}-(-\kappa_\infty)$$

  を満たすが $\tilde{p}=p$ より，

  $$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{dp}{ds}=2qp-\kappa_\infty\\ (\text{右辺}) &= 2\tilde{q}p-(-\kappa_\infty),\end{aligned}$$

  となる．つまり

  $$\tilde{q}=q-\frac{\kappa_\infty}{p},$$

  を得る．

まとめ　P_{II} は以下の双有理正準変換 r_1, r_2 をもつ．

$$r_i : \mathcal{H}_{II}(q,p;\kappa_\infty) \to \mathcal{H}_{II}(\tilde{q},\tilde{p};r_i(\kappa_\infty))$$

	パラメタへの作用	$\tilde{q}$	$\tilde{p}$
r_1	$r_1(\kappa_\infty) = -\kappa_\infty - 1$	$\tilde{q} = -q$	$\tilde{p} = -p + q^2 + s$
r_2	$r_2(\kappa_\infty) = -\kappa_\infty$	$\tilde{q} = q - \kappa_\infty/p$	$\tilde{p} = p$

実は P_{II} のベックルント変換群 $Sym(P_{II})$ は上の r_1, r_2 で生成されることが知られていて，それは $A_1^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群 $W(A_1^{(1)})$ と同型な群になる．

$$Sym(P_{II}) = \langle r_1, r_2 \,|\, r_1^2 = r_2^2 = id \rangle = W(A_1^{(1)})$$

4　$G(1,4)eq$ について

以下では 2 変数 (退化) ガルニエ系 $G(1,4)eq$ に対象を限ってその特殊解，双線形形式，およびベックルント変換の対称性を論ずる．

4.1　$G(1,4)eq$ のハミルトン系

$G(1,4)eq$ は次のハミルトン系 $\mathcal{H}(q,p,H,s;\kappa_0,\kappa_\infty)$ で与えられる [6]．

$$\begin{cases} H_1 = p_1^2 - q_2p_2^2 - (q_1^2 + s_1 - q_2)p_1 \\ \qquad +(-q_1q_2 + q_2s_2 + \kappa_0)p_2 + \kappa_\infty q_1, \\ H_2 = -2q_2p_1p_2 - q_2(q_1 + s_2)p_2^2 + (-q_1q_2 + q_2s_2 + \kappa_0)p_1 \\ \qquad +(-q_2^2 + q_2s_2^2 + q_2s_1 + \kappa_0q_1 + \kappa_0s_2)p_2 + \kappa_\infty q_2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial s_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial s_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j} \qquad (i,j = 1,2)$$

$G(4)eq(=P_{II})$ で書かれる特殊解

形式的に $\kappa_0 = 0$, $q_2 = 0$ とおくと H_1 は，

$$H_1|_{\kappa_0=q_2=0} = p_1^2 - (q_1^2 + s_1)p_1 + \kappa_\infty q_1$$

となり P_{II} のハミルトニアンに一致する．このことに注意しながらハミルトン系を見ると以下のような特殊解があると分かる．

$\underline{\kappa_0 = 0}$ の場合に，$q_2 \equiv 0$, $\dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} \equiv \dfrac{\partial p_1}{\partial s_2} \equiv 0$ なる解が存在する．このとき $q_1(s_1)$, $p_1(s_1)$ は P_{II} を満たす．また p_2 は P_{II} の解を係数にもつリッカチ型方程式を満たす．

すなわち，

$$G(1,4)eq \supset G(4)eq$$

が確認できた．

4.2 ハミルトニアンの微分と正準変数の関係式

後の便利のために正準変数 q_i, p_i をハミルトニアンの微分で表すことを考える．ハミルトニアンの微分は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial s_1} &= \sum_{i=1,2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_1}+\frac{\partial H_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s_1}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)H_1 \\
&= \sum_{i=1,2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_i}\frac{\partial H_1}{\partial p_i}+\frac{\partial H_1}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H_1}{\partial q_i}\right)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)H_1 \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)H_1,
\end{aligned}$$

などに気をつけて計算すると以下のようになる (上式において $\frac{\partial H_1}{\partial s_1}$ は H_1 を s_1, s_2 の関数とみた s_1 による偏微分を，$\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)H_1$ は H_1 を q_j, p_j, s_j の関数とみた s_1 による偏微分を表すものとする).

(4)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial s_1} &= -p_1, \\
\frac{\partial H_1}{\partial s_2} = \frac{\partial H_2}{\partial s_1} &= q_2p_2, \\
\frac{\partial^2 H_1}{\partial s_1^2} &= -q_2p_2-2q_1p_1+\kappa_\infty, \\
\frac{\partial^2 H_1}{\partial s_1\partial s_2} &= -q_2p_2^2-q_2p_1+\kappa_0p_2
\end{aligned}$$

これらと H_1 の定義式から，以下の関係式が分かる．

(5)
$$\begin{cases}
p_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial s_1}, \qquad q_1 = \dfrac{\dfrac{\partial H}{\partial s_2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial s_1^2}-\kappa_\infty}{2\dfrac{\partial H}{\partial s_1}}, \\[3ex]
p_2 = \dfrac{F-\dfrac{\partial H}{\partial s_1}\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial s_1\partial s_2}}{2\dfrac{\partial H}{\partial s_1}\left(\dfrac{\partial H}{\partial s_2}-\kappa_0\right)}, \qquad q_2 = \dfrac{F+\dfrac{\partial H}{\partial s_1}\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial s_1\partial s_2}}{2\left(\dfrac{\partial H}{\partial s_1}\right)^2},
\end{cases}$$

ここで $H := H_1$，および,

$$F := \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial s_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial s_1}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial H}{\partial s_2}-\kappa_\infty\right)^2-\frac{\partial H}{\partial s_1}\left(H-s_1\frac{\partial H}{\partial s_1}-s_2\frac{\partial H}{\partial s_2}\right)$$

$H_1(=: H)$ の満たす微分方程式
(5), (4) 式より，H が以下の微分方程式を満たすことが分かる．

$$F^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial s_1 \partial s_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial H}{\partial s_1}\right)^3 \left(\frac{\partial H}{\partial s_2} - \kappa_0\right) \frac{\partial H}{\partial s_2} = 0 \tag{6}$$

この微分方程式は，4.4 節でベックルント変換を求めるときに用いる．

4.3 広田の双線形形式

広田微分を用いた微分方程式の表示を **(広田の) 双線形形式**とよぶ．パンルベ系の場合 [8] と同様に，ガルニエ系も双線形形式で表すことができる．

広田微分の定義
$s_1, s_2, \cdots$ の関数 $g(s_1, s_2, \cdots)$, $f(s_1, s_2, \cdots)$ に対して広田微分:

$$(g, f) \mapsto \mathcal{D}_1^{i_1} \mathcal{D}_2^{i_2} \cdots g \cdot f$$

は次で定まる．

$$g(s_1 + s_1', s_2 + s_2', \cdots)\, f(s_1 - s_1', s_2 - s_2', \cdots) = \exp(s_1' \mathcal{D}_1 + s_2' \mathcal{D}_2 + \cdots)\, g \cdot f.$$

すなわち $g(s_1 + s_1', s_2 + s_2', \cdots)\, f(s_1 - s_1', s_2 - s_2', \cdots)$ の $s' = 0$ での Taylor 展開の係数のことを広田微分と云う．例えば，

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1\, g \cdot f &= \frac{\partial g}{\partial s_1} f - g \frac{\partial f}{\partial s_1}, \\
\mathcal{D}_1^2\, g \cdot f &= \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} f - 2 \frac{\partial g}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_1} + g \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2}, \\
\mathcal{D}_1^3\, g \cdot f &= \frac{\partial^3 g}{\partial s_1^3} f - 3 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} \frac{\partial f}{\partial s_1} + 3 \frac{\partial g}{\partial s_1} \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} - g \frac{\partial^3 f}{\partial s_1^3}, \\
\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2\, g \cdot f &= \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} f - \frac{\partial g}{\partial s_1} \frac{\partial f}{\partial s_2} - \frac{\partial g}{\partial s_2} \frac{\partial f}{\partial s_1} + g \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

である．

$G(1,4)eq$ の双線形形式 (その 1)
τ 函数 (双線形形式の従属変数) $g(s_1, s_2)$, $f(s_1, s_2)$ を以下のように導入する．

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \log \frac{g}{f} = q_i \quad (i = 1, 2).$$

すると $G(1,4)eq$ のハミルトン系は (パラメタ $(\kappa_0,\kappa_\infty)\in\mathrm{C}^2$ が一般の場合), 次の双線形形式と同値である [9].

$$
(7)\qquad \begin{cases}
(\mathcal{D}_1^2-\mathcal{D}_2+s_1)\,g\cdot f=0\\[2ex]
(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2-s_2\mathcal{D}_2-\kappa_0)\,g\cdot f=0\\[2ex]
(\mathcal{D}_1^3-\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2+s_1\mathcal{D}_1+2\kappa_\infty+1)\,g\cdot f=0\\[2ex]
(\mathcal{D}_1^2\mathcal{D}_2+\mathcal{D}_2^2-(2s_2^2+s_1)\mathcal{D}_2-2\kappa_0\mathcal{D}_1-2\kappa_0 s_2)\,g\cdot f=0
\end{cases}
$$

超幾何型の線形微分方程式で書かれる特殊解

上の双線形形式 (7) をみると, 3式目は1式目に形式的に $\mathcal{D}_1$ を掛けて, 定数項を加えたものになっている. そのことから以下のような特殊解があると分かる.

$\underline{\kappa_\infty=0}$ の時 $f=$ 定数 となる解があって, g は

$$
\begin{cases}
(D_1^2-D_2+s_1)\,g=0,\\
(D_1D_2-s_2D_2-\kappa_0)\,g=0,\\
(D_1^2D_2+D_2^2-(2s_2^2+s_1)D_2-2\kappa_0D_1-2\kappa_0s_2)\,g=0
\end{cases}
$$

を満たす (超幾何型の特殊解 [3]). また上の3式目は1式目より

$$(D_2^2-(s_2^2+s_1)D_2-\kappa_0D_1-\kappa_0s_2)\,g=0$$

と書きなおせることに注意しておく.

$G(1,4)eq$ の双線形形式 (その2)

$G(1,4)eq$ はもう1つの双線形形式を持つ. τ 函数 $h(s_1,s_2)$, $f(s_1,s_2)$ を以下で与える.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1}\log\frac{h}{f}&=-p_2,\\
\frac{\partial}{\partial s_2}\log\frac{h}{f}&=-p_1-(q_1+s_2)p_2.
\end{aligned}
$$

すると $G(1,4)eq$ のハミルトン系は (パラメタ $(\kappa_0,\kappa_\infty)\in\mathrm{C}^2$ が一般の場合), 次の双線形形式と同値である.

$$
(8)\qquad \begin{cases}
(\mathcal{D}_1^2+2s_2\mathcal{D}_1-\mathcal{D}_2)\,h\cdot f=0\\[2ex]
(\mathcal{D}_2^2+(s_2^2+s_1)\mathcal{D}_2+(\kappa_0-1)\mathcal{D}_1-\kappa_\infty s_2)\,h\cdot f-h\cdot D_1f=0\\[2ex]
(\mathcal{D}_1^3+3\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2+4s_1\mathcal{D}_1+2s_2\mathcal{D}_2-2\kappa_\infty)\,h\cdot f=0\\[2ex]
(\mathcal{D}_1^2\mathcal{D}_2+2s_2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2-\mathcal{D}_2^2+2(1-2\kappa_0)\mathcal{D}_1)\,h\cdot f=0
\end{cases}
$$

ここで得た2つの双線形形式 (7), (8) は, 4.4 節でベックルント変換を求めるときに用

4.4 $G(1,4)eq$ のベックルント変換の対称性

$G(1,4)eq$ のベックルント変換を具体的に構成する．ここで用いるのは H の満たす微分方程式 (6) および，2つの双線形形式 (7), (8) の持つ自明な対称性である．

(6), (7), (8) の持つ自明な対称性

- H の満たす微分方程式 (6) は以下の変数変換で不変である．

(9) $\quad \rho_1: \ (\kappa_0,\kappa_\infty)\mapsto(-\kappa_0,-\kappa_\infty), \quad s_2\mapsto -s_2$

(10) $\quad \rho_2: \ (\kappa_0,\kappa_\infty)\mapsto(-\kappa_0,\kappa_\infty-\kappa_0), \quad H\mapsto \tilde{H}=H-\kappa_0 s_2$

- 双線形形式 (その1) (7) は以下の変数変換で不変である．

$$\rho_3:\begin{cases} g\leftrightarrow f \quad (\tau \text{ 函数の入れ替え}) \\ (s_1,s_2)\mapsto(s_1,-s_2) \\ (\kappa_0,\kappa_\infty)\mapsto(-\kappa_0,-\kappa_\infty-1)\end{cases} \tag{11}$$

ここで広田微分の性質：

$$P(\mathcal{D})\,g\cdot f=\begin{cases} -P(\mathcal{D})\,f\cdot g & (P(\mathcal{D}):\mathcal{D}_i \text{ の奇関数}) \\ P(\mathcal{D})\,f\cdot g & (P(\mathcal{D}):\mathcal{D}_i \text{ の偶関数})\end{cases}$$

を用いた．

- 同様に，双線形形式 (その2) (8) は以下の変数変換で不変である．

$$\rho_4:\begin{cases} h\leftrightarrow f \quad (\tau \text{ 函数の入れ替え}) \\ (s_1,s_2)\mapsto(s_1,-s_2) \\ (\kappa_0,\kappa_\infty)\mapsto(-\kappa_0+1,-\kappa_\infty)\end{cases} \tag{12}$$

実は上の対称性 $\rho_i\ (i=1,2,3,4)$ はベックルント変換 (= 正準変数の双有理変換) に持ち上がる．ここでは ρ_2 を例にして具体的なベックルント変換の構成を見ることにする．求めるベックルント変換 ρ_2 は

$$\rho_2:\mathcal{H}(q,p,H,s\,;\kappa_0,\kappa_\infty)\to\mathcal{H}(\tilde{q},\tilde{p},\tilde{H},s\,;-\kappa_0,\kappa_\infty-\kappa_0)$$

である．正準変数とハミルトニアンの微分の関係式 (5) と $\tilde{H}=H-\kappa_0 s_2$ により $\tilde{q},\tilde{p}$ は以下のように定まる．

$$\tilde{p}_1 = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial s_1} = -\frac{\partial H}{\partial s_1} = p_1,$$

$$\tilde{q}_1 = \frac{\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial s_2}+\dfrac{\partial^2\tilde{H}}{\partial s_1^2}-(\kappa_\infty-\kappa_0)}{2\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial s_1}} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial s_2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial s_1^2}-\kappa_\infty}{2\dfrac{\partial H}{\partial s_1}} = q_1,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_2 &= p_2 \cdot \frac{\dfrac{\partial H}{\partial s_2} - \kappa_0}{\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial s_2} - (-\kappa_0)} \\
&= p_2 \cdot \frac{\dfrac{\partial H}{\partial s_2} - \kappa_0}{\dfrac{\partial H}{\partial s_2}} \qquad (\text{ここで } \tilde{F} = F \text{ に注意}) \\
&= p_2 \cdot \frac{q_2 p_2 - \kappa_0}{q_2 p_2} = p_2 - \frac{\kappa_0}{q_2}, \\
\tilde{q}_2 &= q_2.
\end{aligned}$$

他の ρ_i も同様にしてベックルント変換に持ち上がる.

まとめ $G(1,4)eq$ は以下の双有理正準変換 ρ_i $(i = 1,2,3,4)$ をもつ.

$$\rho_i : \mathcal{H}(q,p,s\,;\kappa_0,\kappa_\infty) \to \mathcal{H}(\tilde{q},\tilde{p},\tilde{s}\,;\rho_i(\kappa_0),\rho_i(\kappa_\infty))$$

	パラメタへの作用	$\tilde{q}$	$\tilde{p}$	$\tilde{s}$
ρ_1	(κ_0,κ_∞) $\mapsto (-\kappa_0,-\kappa_\infty)$	$\tilde{q}_1 = \dfrac{q_1p_1 + q_2p_2 - \kappa_\infty}{p_1}$ $\tilde{q}_2 = \dfrac{p_2(\kappa_0 - q_2p_2)}{p_1}$	$\tilde{p}_1 = p_1$ $\tilde{p}_2 = \dfrac{-q_2p_1}{\kappa_0 - q_2p_2}$	$\tilde{s}_1 = s_1$ $\tilde{s}_2 = -s_2$
ρ_2	(κ_0,κ_∞) $\mapsto (-\kappa_0,\kappa_\infty - \kappa_0)$	$\tilde{q}_i = q_i$	$\tilde{p}_1 = p_1$ $\tilde{p}_2 = p_2 - \kappa_0/q_2$	$\tilde{s}_i = s_i$
ρ_3	(κ_0,κ_∞) $\mapsto (-\kappa_0,-\kappa_\infty - 1)$	$\tilde{q}_1 = -q_1$ $\tilde{q}_2 = q_2$	$\tilde{p}_1 = -p_1 - q_2 + q_1^2 + s_1$ $\tilde{p}_2 = p_2 + q_1 - s_2 - \kappa_0/q_2$	$\tilde{s}_1 = s_1$ $\tilde{s}_2 = -s_2$
ρ_4	(κ_0,κ_∞) $\mapsto (-\kappa_0 + 1,-\kappa_\infty)$	$\tilde{q}_1 = (-p_1 + p_2^2 - s_2p_2)/p_2$ $\tilde{q}_2 = (*$下を見よ$*)$	$\tilde{p}_1 = p_2(p_2 + q_1 - s_2)$ $\tilde{p}_2 = -p_2$	$\tilde{s}_1 = s_1$ $\tilde{s}_2 = -s_2$

上表の ρ_4 の $\tilde{q}_2$ は

$$\tilde{q}_2 = -\frac{p_2^2(q_1 + s_2) + 2p_1p_2 + p_2(q_2 - s_1 - s_2^2) + p_1(q_1 - s_2) - \kappa_\infty}{p_2}.$$

である. また $\rho_i^2 = id$ (恒等変換) に注意しておく.

以上の $\langle \rho_i\,(i = 1,2,3,4)\rangle$ によって, $G(1,4)eq$ のベックルント変換群が尽くされているか否かは今のところ分かってはいないが, ともかく

$$\langle \rho_i\,(i = 1,2,3,4)\rangle =: Sym(G(1,4)eq)$$

と書くことにする. 話を見やすくするためにパラメタの置き換え: $(\kappa_0,\kappa_\infty) \to (\alpha,\beta)$ を施す.

$$\alpha := 2\kappa_\infty - \kappa_0, \quad \beta := \kappa_0$$

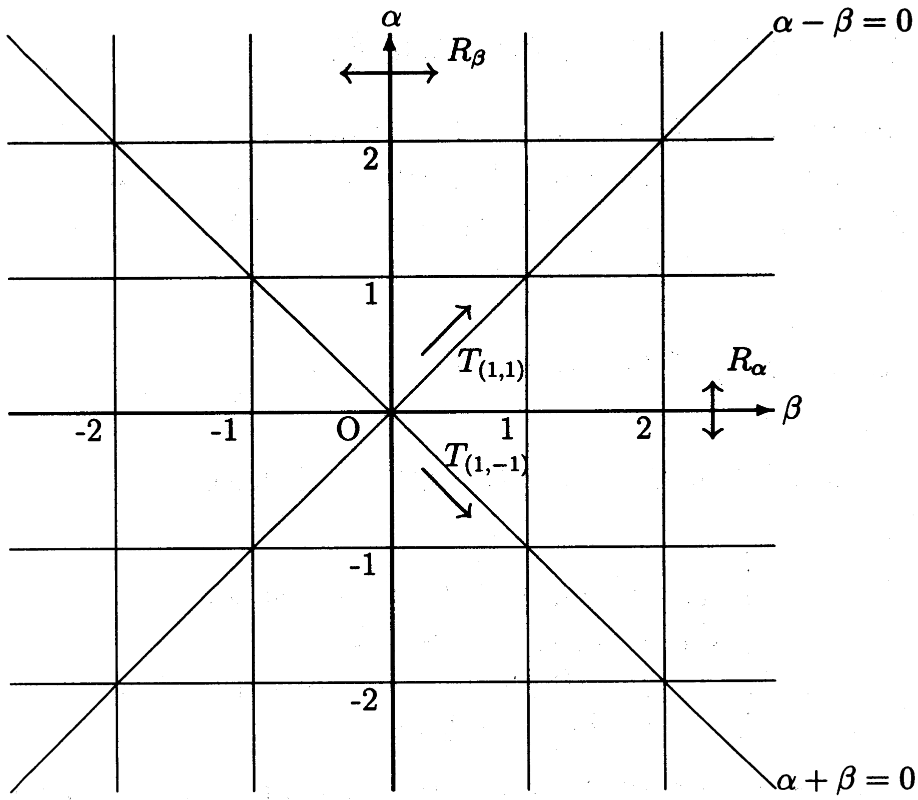

図 2: $G(1,4)eq$ のパラメタ空間

こうしておいて，ベックルント変換群の生成元をうまくとると，

$$Sym(G(1,4)eq) = \langle T_{(1,1)}, T_{(1,-1)}, R_\alpha, R_\beta \rangle$$

$$\begin{cases} T_{(1,1)}: & (\alpha,\beta) \to (\alpha+1,\beta+1) \\ T_{(1,-1)}: & (\alpha,\beta) \to (\alpha+1,\beta-1) \\ R_\alpha: & (\alpha,\beta) \to (-\alpha,\beta) \\ R_\beta: & (\alpha,\beta) \to (\alpha,-\beta) \end{cases}$$

とできる ($T_{(1,1)} := \rho_1 \circ \rho_3 \circ \rho_4 \circ \rho_1$, $T_{(1,-1)} := \rho_1 \circ \rho_4$, $R_\alpha := \rho_1 \circ \rho_2$, $R_\beta := \rho_2$). これより

$$Sym(G(1,4)eq) \supset W(A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)})$$

が分かる．また $\beta = 0$ (ここには $G(4)eq$ で書かれる特殊解が住んでいる) に制限すると

$$Sym(G(1,4)eq) \supset Sym(G(4)eq)$$

であることも確かめられる．

注． 図 2 について．$\beta =$ (整数) には $G(4)eq$ で解かれる解が，$\alpha \pm \beta =$ (整数) には超幾何型微分方程式で解かれる解が存在している．

5 いくつかのガルニエ系の具体形

2 変数 (退化) ガルニエ系のハミルトン系は, H.Kimura によって得られた [4]. しかし, いくつかのハミルトン系においては, 先の予想 : $G(1,\#)eq \supset G(\#)eq$ を確かめるために適当な正準変換を施してハミルトン系を書き直す必要がある. この節では, その正準変換と新しいハミルトニアンを与えておく.

5.1 $G(1,1,1,2)eq$ のハミルトン系

正準変換

[4] にあるハミルトン系 $H_{pol}(1,1,1,2)$ に対して, 正準変換 : $(q,p,s,H) \to (Q,P,S,\tilde{H})$

$$\begin{cases} S_1 = 1/s_1, \quad S_2 = s_2, \\ Q_1 = -q_1/s_1 + 1, \quad P_1 = -s_1 p_1, \\ Q_2 = q_2/s_2, \quad P_2 = s_2 p_2, \\ \tilde{H}_1 = -H_1/S_1^2 + (Q_1 - 1)P_1/S_1 + \kappa/S_1, \\ \tilde{H}_2 = H_2 - Q_2 P_2/S_2 \end{cases}$$

を施す. その上で $(Q,P,S,\tilde{H})$ を (q,p,s,H) に書き直したハミルトン系が以下の新しいハミルトン系である.

$G(1,1,1,2)eq$ のハミルトン系

$$\begin{cases} s_1 H_1 = q_1(q_1-1)^2 p_1^2 + 2(q_1-1)^2 q_2 p_1 p_2 + (q_1-1)q_2(q_2-1)p_2^2 \\ \qquad -\{(\kappa_0+\theta_2)(q_1-1)^2 + (\kappa_1-1)q_1(q_1-1) - \eta s_1 q_1 + \eta s_1 s_2 q_2\}p_1 \\ \qquad -\{(\kappa_0+\kappa_1-1)(q_1-1)q_2 + \theta_2(q_1-1)(q_2-1) + \eta s_1(s_2-1)q_2\}p_2 \\ \qquad +\kappa q_1, \\ (s_2-1)H_2 = (q_1-1)^2 q_2 p_1^2 + 2(q_1-1)q_2(q_2-1)p_1p_2 + \{q_2(q_2-1)^2 + (1-\frac{1}{s_2})q_2(q_2-q_1)\}p_2^2 \\ \qquad -\{(\kappa_0+\kappa_1-1)(q_1-1)q_2 + \theta_2(q_1-1)(q_2-1) + \eta s_1(s_2-1)q_2\}p_1 \\ \qquad -\{(\kappa_0+\theta_2)q_2(q_2-\frac{1}{s_2}) + (\kappa_1-1)q_2(q_2-1) \\ \qquad\quad -\theta_2(q_2-1) - \theta_2(1-\frac{1}{s_2})q_1 + \eta s_1(s_2-1)q_2\}p_2 \\ \qquad +\kappa q_2, \end{cases}$$

パラメタ $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty, \theta_2) \in \mathbf{C}^4$.
η は適当なスケール変換で $\eta = \pm 1$ に規格化できるパラメタ．また,

$$\kappa := \frac{(\kappa_0 + \kappa_1 + \theta_2 - 1 - \kappa_\infty)(\kappa_0 + \kappa_1 + \theta_2 - 1 + \kappa_\infty)}{4}$$

とした.

上のハミルトン系に形式的に $\theta_2 = q_2 = 0$ を代入すると H_1 は,

$$s_1 H_1|_{\theta_2=q_2=0} = q_1(q_1-1)^2 p_1^2 - \{\kappa_0(q_1-1)^2 + (\kappa_1 - 1)q_1(q_1-1) - \eta s_1 q_1\}p_1 + \kappa q_1,$$

となる．これは $G(1,1,2)eq(= P_V)$ のハミルトニアンに他ならない.

5.2 $G(1,1,3)eq$ のハミルトン系

[4] にあるハミルトン系 $H_{pol}(1,1,3)$ に対して，正準変換 : $(q,p,s,H) \to (Q,P,S,\tilde{H})$

$$\begin{cases} s_1 &= (S_1 - S_2/2)S_2, \quad s_2 = S_2, \\ q_1 &= -1/S_2Q_2, \\ p_1 &= -S_2Q_2\left(\dfrac{\kappa_0 + \kappa_1 - 1 + \kappa_\infty}{2} - (Q_1 - S_1)P_1 - Q_2P_2\right), \\ q_2 &= -(Q_1 - S_1)/S_2Q_2, \\ p_2 &= -S_2Q_2P_1, \\ \tilde{H}_1 &= S_2H_1 + P_1, \\ \tilde{H}_2 &= H_2 + (S_1 - S_2)H_1 - Q_2P_2/S_2, \end{cases}$$

を施す．その上で $(Q,P,S,\tilde{H})$ を (q,p,s,H) に書き直したハミルトン系が以下の新しいハミルトン系である.

$G(1,1,3)eq$ のハミルトン系

$$\begin{cases} H_1 = q_1p_1^2 + 2q_2p_1p_2 - q_2p_2^2 - (\eta q_1^2 + \eta q_1 s_1 + \eta q_2 s_2 + \kappa_0 + \kappa_\infty)p_1 \\ \qquad + (-\eta q_1 q_2 + \eta q_2(s_2 - s_1) + \kappa_\infty)p_2 + \dfrac{\kappa_0 + \kappa_1 - 1 + \kappa_\infty}{2}\eta q_1, \\ H_2 = q_2p_1^2 - 2q_2p_1p_2 + \dfrac{q_2(q_1 + q_2 + s_2)}{s_2}p_2^2 + (-\eta q_1 q_2 + \eta q_2(s_2 - s_1) + \kappa_\infty)p_1 \\ \qquad - \left(\eta q_2^2 + \eta q_2(s_2 - s_1) + \kappa_\infty\dfrac{q_1 + q_2 + s_2}{s_2} + \kappa_0\dfrac{q_2}{s_2}\right)p_2 + \dfrac{\kappa_0 + \kappa_1 - 1 + \kappa_\infty}{2}\eta q_2. \end{cases}$$

パラメタ $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty) \in \mathbf{C}^3$.
η は適当なスケール変換で $\eta = \pm 1$ に規格化できるパラメタ.

上のハミルトン系に形式的に $\kappa_\infty = q_2 = 0$ を代入すると H_1 は,

$$H_1|_{\kappa_\infty=q_2=0} = q_1p_1^2 - (\eta q_1^2 + \eta q_1 s_1 + \kappa_0)p_1 + \frac{\kappa_0 + \kappa_1 - 1}{2}\eta q_1,$$

となる．これは $G(1,3)eq(= P_{IV})$ のハミルトニアンに他ならない.

参考文献

[1] 岡本和夫 : パンルヴェ方程式序説, 上智大学数学講究録, no.19, 1985.

[2] H.Kimura and K.Okamoto : *On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier system*, J.Math.Pures et Appl., **63**(1984), 129-146.

[3] K.Okamoto and H.Kimura : *On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables* , Quarterly J. Math., **37**(1986), 61-80.

[4] H.Kimura : *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann.Mat.Pura Appl., **155**(1989), 25-74.

[5] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.Yoshida : From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions (Vieweg Verlag, Braunschweig, 1991)

[6] H.Kawamuko : *Studies on the fourth Painlevé equation in several variables*, Thesis,Univ.Tokyo.1997.

[7] D.Liu : *Holonomic deformation of linear differential equations of A_g type and polynomial Hamiltonian structure*, Thesis,Univ.Tokyo.1997.

[8] K.Okamoto : *The Hamiltonians associated with the Painlevé equations*, The Painlevé Property: One Century Later, eds. R.Conte (Springer,1999).

[9] 津田照久 : ガルニエ系について, 東京大学修士論文.1999.