数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 1-8

Some remarks on the method of moving planes

神戸大学工学部　　内藤　雄基 (Yūki Naito)

Abstract. In 1979, Gidas, Ni, and Nirenberg [3] establish radial symmetry of positive solutions to certain nonlinear elliptic equations. The technique is based on the maximum principle. In this note, we shall consider the simplest case of their results and give a proof following the idea of Berestycki and Nirenberg [1]. Next we consider the Poincaré metric in the domain and then employ the moving plane method to obtain new results on symmetry. Finally we give an approach in a different direction to the symmetry results.

1. 序

次の非線形楕円型偏微分方程式に対する境界値問題の解の対称性について考える：

$$\begin{cases} \Delta u+f(u)=0, \quad u>0, \quad x\in D, \\ u=0, \quad x\in\partial D, \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで $D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$, $n\geq 2$, とし、f は C^1 級の関数とする.

1979 年の Gidas-Ni-Nirenberg [3] の moving plane method による結果はよく知られている. ここでは、その後 Berestycki-Nirenberg [1] によって一般化された結果を述べる.

定理 1.1. $u\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$ は (1.1) の解とする. このとき $u=u(|x|)$ であり、$r=|x|$ として $\partial u/\partial r<0$, $0<r<1$, が成り立つ.

ここでは [1] に沿った形で moving plane method による証明を与えるとともに、関連する結果を述べる. また、moving plane method とは異なる方法による解の対称性へのアプローチを紹介する.

2. 最大値原理

moving plane method においては、最大値原理が重要な役割を果たす. 次の微分不等式を考える：

$$Lu\equiv-\Delta u+c(x)u\leq 0, \quad x\in\Omega, \tag{2.1}$$

ここで、Ω は $\mathbb{R}^n$ における有界領域、$c\in L^\infty(\Omega)$ とする. 次の弱最大値原理、 Hopf の補題、強最大値原理はよく知られている ([4, 6, 9, 10]).

弱最大値原理. u は (2.1) の解とし $c(x)\geq 0$ とする. このとき $u\leq 0$ on $\partial\Omega$ ならば $u\leq 0$ in Ω.

Hopf の補題. $B\subset\Omega$ は球とし、u は (2.1) の解、$u<0$ in B、ある $x_0\in\partial B$ において $u(x_0)=0$ とする. このとき $\partial u/\partial n(x_0)>0$ が成り立つ. ただし、n は B に関する外向き単位法線ベクトルとし $\partial/\partial n$ は n 方向の方向微分とする.

強最大値原理. u は (2.1) の解とし $u \le 0$ in Ω とする．このとき $u < 0$ or $u \equiv 0$ in Ω.

moving plane method においては $c(x) \ge 0$ でない場合の弱最大値原理を必要とする．

命題 2.1. ある $h \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ で、$Lh \ge 0$ in Ω かつ $h > 0$ in $\overline{\Omega}$ なるものが存在するとする．このとき $u \le 0$ on $\partial\Omega$ ならば $u \le 0$ in Ω.

証明. $v(x) = u(x)/h(x)$ とおくと

$$-\Delta v - \frac{2}{h}\nabla h \cdot \nabla v + \frac{1}{h}(Lh)v \le 0, \quad x \in \Omega.$$

弱最大値原理により $v \le 0$, すなわち $u \le 0$ を得る． $\square$

係数関数 c および $\partial\Omega$ が十分滑らかな場合、命題 2.1 の仮定は、弱最大値原理が成り立つための必要十分条件であることが知られている ([6]).

この命題を用いて領域が十分薄い帯領域に入るならば弱最大値原理が成立することを示すことができる．

命題 2.2. $\overline{\Omega} \subset \{0 < x_1 < d\}$, $|c(x)| \le M$ とする．ある定数 $\delta = \delta(M) > 0$ が存在し、$d < \delta$ であり、$u \le 0$ on $\partial\Omega$ であれば $u \le 0$ in Ω.

証明. $h(x) = e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}$ とおくと $h > 0$ in $\overline{\Omega}$. このとき

$$Lh = \alpha^2 e^{\alpha x_1} + c(x)\left(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}\right) \ge \alpha^2 - M(e^{\alpha d} - 1).$$

ある定数 $\delta = \delta(M) > 0$ が存在し、$d < \delta$ であれば、ある $\alpha > 0$ に対して $Lh \ge 0$ in Ω となる．命題 2.1 より $u \le 0$ in Ω. $\square$

より一般に Ω が十分 “狭い” ならば弱最大値原理が成立することを示すことができる．

命題 2.3 ([1]). $d \ge \mathrm{diam}(\Omega)$ とし $|c(x)| \le M$ とする．ある定数 $\delta = \delta(n, M, d)$ が存在し、$\mathrm{meas}(\Omega) = |\Omega| < \delta$ であり、$u \le 0$ on $\partial\Omega$ であれば $u \le 0$ in Ω.

証明には次の Alexandroff-Bakelman-Pucci の不等式 ([4, Theorem 9.1]) を用いる．

Alexandroff-Bakelman-Pucci の不等式. $c(x) \ge 0$ in Ω, $d \ge \mathrm{diam}(\Omega)$, $f \in L^n(\Omega)$ とし、$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ は次を満たすとする：

$$-\Delta u + c(x)u \le f(x), \quad x \in \Omega, \qquad u \le 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

このときある定数 $C = C(n, d) > 0$ に対して次が成り立つ：

$$\sup_{\Omega} u \le C\|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

命題 2.3 の証明. $CM\delta^{1/n} < 1$ なる $\delta > 0$ をとる. $\sup_\Omega u^+ > 0$ と仮定する. このとき

$$-\Delta u + c^+(x)u \le c^-(x)u \le c^-(x)u^+, \quad x \in \Omega.$$

よって

$$\sup_\Omega u^+ = \sup_\Omega u \le C\|c^- u^+\|_{L^n(\Omega)} \le CM|\Omega|^{1/n} \sup_\Omega u^+.$$

ところが、$CM|\Omega|^{1/n} \le CM\delta^{1/n} < 1$ より矛盾. 従って $\sup_\Omega u^+ = 0$, すなわち $u \le 0$ in Ω.
□

次節の定理 1.1 の証明における moving plane method では、強最大値原理と "狭い" 領域における弱最大値原理(命題 2.3)のみを用いる. しかしながら moving plane method の直感的理解には、Hopf の補題が役立つと思われる.

3. moving plane method: 定理 1.1 の証明

パラメータ $\lambda \in (-1, 0]$ に対して T_λ, Σ_λ を次で定める:

$$T_\lambda = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \lambda\}; \qquad \Sigma_\lambda = \{x \in D : x_1 < \lambda\}.$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と定める. $x \in \Sigma_\lambda$, $\lambda < 0$, に対して $|x^\lambda| < |x|$ が成り立つ.

(1.1) の解 u に対して $u_\lambda(x) = u(x^\lambda)$ とおくと u_λ は次を満たす:

$$\Delta u_\lambda + f(u_\lambda) = 0, \quad x \in \Sigma_\lambda.$$

次の補題が成り立つ.

補題 3.1. $w_\lambda(x) = u(x) - u_\lambda(x)$ とおくと

$$-\Delta w_\lambda + c_\lambda(x) w_\lambda = 0, \quad x \in \Sigma_\lambda, \qquad w_\lambda \le 0, \quad x \in \partial\Sigma_\lambda, \tag{3.1}$$

ここで

$$c_\lambda(x) = \int_0^1 f'\Big(u(x) + t(u^\lambda(x) - u(x))\Big)\, dt.$$

$\Lambda \subset (-1, 0)$ を次で定める:

$$\Lambda = \{\lambda \in (-1, 0) : w_\lambda(x) = u(x) - u_\lambda(x) < 0,\ x \in \Sigma_\lambda\}.$$

$\Lambda = (-1, 0)$ であることを次の 3 つの step により示す.

Step 1. $\Lambda \ne \emptyset$.

$\lambda \in (-1, 0)$ を -1 に十分近くとり $|\Sigma_\lambda| < \delta$ とする. (3.1) と命題 2.3 により $w_\lambda \le 0$ in Σ_λ. 強最大値原理より $w_\lambda < 0$ in Σ_λ, すなわち $\lambda \in \Lambda$. □

Step 2. $\Lambda \subset (-1,0)$ は閉集合.

$\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in (-1,0)$, $n \to \infty$, と仮定する. $\lambda_0 \in \Lambda$ を示す. λ に関する連続性より $w_{\lambda_0} \le 0$ in Σ_{λ_0}. $\lambda_0 \in (-1,0)$ より $w_{\lambda_0} \not\equiv 0$. (3.1) と強最大値原理より $w_{\lambda_0} < 0$ in Σ_{λ_0}, すなわち $\lambda_0 \in \Lambda$. □

Step 3. $\Lambda \subset (-1,0)$ は開集合.

$\lambda_0 \in \Lambda$ とする. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ ならば $\lambda \in \Lambda$ を示す. G は $G \subset \Sigma_{\lambda_0}$, $|\Sigma_{\lambda_0} \setminus G| < \delta/2$ を満たすコンパクト集合とする. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ ならば次が成り立つ：

$$w_\lambda < 0 \quad \text{in } G, \qquad |\Sigma_\lambda \setminus G| < \delta. \tag{3.2}$$

ところで w_λ は次を満たす：

$$-\Delta w_\lambda + c_\lambda(x) w_\lambda = 0, \quad x \in \Sigma_\lambda \setminus G, \qquad w_\lambda \le 0, \quad x \in \partial(\Sigma_\lambda \setminus G).$$

$(3.2)_2$ と命題 2.3 より $w_\lambda \le 0$ in $\Sigma_\lambda \setminus G$. $w_\lambda \not\equiv 0$, 強最大値原理より $w_\lambda < 0$ in $\Sigma_\lambda \setminus G$. $(3.2)_1$ により $w_\lambda < 0$ in Σ_λ, すなわち $\lambda \in \Lambda$. □

以上より $\Lambda = (-1,0)$. 従って任意の $\lambda \in (-1,0)$ に対して $u_\lambda > u$. $\lambda \to 0$ により $u_0 \ge u$. 領域と方程式の対称性から x_1 方向を逆向きにとって同様の議論をすることにより $u_0 \le u$. 従って $u_0 \equiv u$ in D. すなわち u は $x = x_1$ に関して対称となる. $x = x_1$ を任意の方向にとることにより u の球対称性が従う. □

4. Poincaré disc における moving plane method

次の非線形楕円型偏微分方程式に対する境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \Delta u + f(|x|, u) = 0, \quad u > 0, \quad x \in D, \\ \qquad u = 0, \quad x \in \partial D, \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$、$f(r,t)$ は連続とし $t \in \mathbb{R}$ に関して C^1 級の関数とする. 非線形項 f が $|x|$ に依存する場合には次の結果が得られる.

定理 4.1. $f(r,t)$ は $r \in (0,1)$ について非増加とし、$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ は (1.1) の解とする. このとき $u = u(|r|)$ となり、$\partial u / \partial r < 0$, $0 < r < 1$, が成り立つ.

証明. 補題 3.1 において $|x^\lambda| < |x|$ に注意することにより

$$\Delta w_\lambda = -f(|x|, u) + f(|x^\lambda|, u_\lambda) \ge -f(|x|, u) + f(|x|, u_\lambda) = c_\lambda(x) w_\lambda.$$

従って w_λ は $-\Delta w_\lambda + c_\lambda(x) w_\lambda \le 0$ を満たす. 定理 1.1 の証明と同様の議論により結果を得る.

ここでは、$f(r,t)$ の r についての単調性に関する仮定が本質的であるかという問題を考える．[3] における次の例より、$r \mapsto f(r,t)$ になんらかの仮定が必要であることがわかる．

例． $w(x)$ は $-\Delta w = \lambda w$ in D, $w = 0$ on ∂D の非球対称な固有関数とする．$u(x) = 1 - |x|^2 + \varepsilon w(x)$ とおくと、十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して D 上 $u > 0$ であり $f(r,t) = \lambda t + 2n - \lambda(1 - r^2)$ に対して (4.1) を満たす．

$D \subset \mathbb{R}^2$ とする．領域 D に Poincaré 計量 $ds_D^2 = |dx|^2/(1-|x|^2)^2$ を導入する．Poincaré disc における Laplace-Beltrami 作用素は $\Delta_g = (1-r^2)^2\Delta$ であることより (4.1) の解 u は次を満たす：

$$\Delta_g u + (1-|x|^2)^2 f(|x|, u) = 0.$$

Poncaré disc において moving plane method を行うことにより次を得る：

定理 4.2. ([7]) $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ とする．$(1-r^2)^2 f(r,t)$ は $r \in (0,1)$ について減少とし、$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ は (4.1) の解とする．このとき $u = u(|x|)$ であり $u_r < 0$, $0 < r < 1$, となる．

$n \geq 3$ の場合は、次の結果が得られる．

定理 4.3. ([8]) $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $n \geq 3$ とする．各 $t \in (0, \infty)$ に対して $(1-r^2)^{(n+2)/2} f(r, (1-r^2)^{-(n-2)/2} t)$ は $r \in (0,1)$ について減少とし、$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ は (4.1) の解とする．このとき $u = u(|x|)$ であり

$$\left((1-r^2)^{(n-2)/2} u\right)_r < 0, \quad 0 < r < 1,$$

が成り立つ．とくに、$[0,1] \times [0,\infty)$ 上 $f \geq 0$ であれば、$u_r < 0, 0 < r < 1$, となる．

典型的な例として、次の問題を考える：

$$\begin{cases} \Delta u + K(|x|) u^\sigma = 0, \quad u > 0, \quad x \in D, \\ u = 0, \quad x \in \partial D, \end{cases} \tag{4.2}$$

ここで K は $[0,1]$ 上の非負連続関数とし、$1 < \sigma < (n+2)/(n-2)$ とする．定理 4.3 より次の系を得る．

系 4.4. ([8]) $(1-r^2)^{\frac{n+2-\sigma(n-2)}{2}} K(r)$ は減少とし、$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ は (4.2) の解とする．このとき $u = u(|x|)$ であり、$u_r < 0, 0 < r < 1$, となる．

5. その他の方法による解の対称性へのアプローチ

次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \Delta u + f(|x|, u) = 0, \quad x \in D, \\ u = 0, \quad x \in \partial D, \end{cases} \tag{5.1}$$

ここでは $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ あるいは $D = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$, $0 < a < b < \infty$, とする．また、$f(r,t)$ は連続、$t \in \mathbb{R}$ に関して C^1 級の関数とする．

解の球対称性に関して moving plane method とは異なる方法により次の結果が得られることが知られている．

定理 5.1. $u \in C^3(D) \cap C^1(\overline{D})$ は (5.1) の解とし、次を仮定する：

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, u(x)) < \lambda_2, \quad x \in D,$$

ここで λ_2 は $-\Delta u = \lambda u$ in D, $u = 0$ on ∂D の第 2 固有値とする．このとき $u = u(|x|)$ となる．

ここでは解 u の正値性を仮定していないことに注意する．

Dalmasso [2] は多重調和方程式 $(-\Delta)^m u = f(|x|, u)$ の問題に対してこの結果を拡張している．また、Lazer-McKenna [5] は作用素論的にこの結果を示している．ここでは、[2] に沿って証明を行う．

補題 5.1. 関数 $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ に対して u が球対称となるための必要十分条件は

$$x_j D_k u - x_k D_j u \equiv 0, \quad j \neq k,\ j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

証明. 必要条件であることは自明．十分条件であることを示す．$x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $z = x_1^2 + \cdots x_n^2$, $z \neq 0$ とする．$x_1 \neq 0$, $x_1 > 0$ として一般性を失わない．$x = (x_1, x') \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$ に対して $X_1(x', z) = (z - |x'|^2)^{1/2}$ と定めると

$$x_1 = X_1(x', z), \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_j} = -\frac{x_j}{x_1}, \quad j = 2, \ldots, n.$$

$u(X_1(x', z), x') = g(x', z)$ とおくと

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = D_1 u \frac{\partial X_1}{\partial x_j} + D_j u = \frac{-x_j D_1 u + x_1 D_j u}{x_1} \equiv 0, \quad j = 2, \ldots, n.$$

従って $g(x', z)$ は $z = |x|^2$ のみに依存する、すなわち $u = u(|x|)$. □

$j, k = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq k$, に対して $v_{j,k}(x)$ を次で定める：

$$v_{j,k}(x) = x_j D_k u(x) - x_k D_j u(x).$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $\nu_{j,k}(x)$ を第 k 成分を x_j、第 j 成分を $-x_k$、その他の成分を 0 とするベクトル値関数とする．このとき $v_{j,k}(x) = \nu_{j,k}(x) \cdot \nabla u(x)$ が成り立つ．

補題 5.2. $v_{j,k}$ は次を満たす：

$$\Delta v_{j,k} + \frac{\partial f}{\partial t}(|x|, u) v_{j,k} = 0, \quad x \in D, \qquad v_{j,k} = 0, \quad x \in \partial D.$$

証明. $\Delta v_{j,k} = \nu_{j,k} \cdot \nabla(\Delta u)$, $\nu_{j,k} \cdot x = 0$ より

$$\Delta v_{j,k} = -\nu_{j,k} \cdot \nabla f(|x|, u) = -f_r(|x|, u)\frac{\nu_{j,k} \cdot x}{|x|} - f_t(|x|, u)\nu_{j,k} \cdot \nabla u = -f_t(|x|, u)v_{j,k}.$$

B に関する外向き単位法線ベクトル n に対して $\nu_{j,k} \cdot n = 0$ on ∂D. $u = 0$ on ∂D. よって $v_{j,k} = \nu_{j,k} \cdot \nabla u = 0$ on ∂D を得る. □

λ_2 は $-\Delta u = \lambda u$ in D, $u = 0$ on ∂D の第 2 固有値とする. mini-max 原理より

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \frac{\int_D |\nabla u|^2 dx}{\int_D u^2 dx} : u \in H_0^1(D),\ \int_D u w_1 dx = 0 \right\}, \tag{5.2}$$

ここで $w_1 = w_1(|x|)$ は第 1 固有関数.

補題 5.3. 次が成り立つ：

$$\int_D v_{j,k} w_1 dx = 0.$$

証明. $\nu_{j,k} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\nu_{j,k} u)$ より

$$\int_D v_{j,k} w_1 dx = \int_D (\nu_{j,k} \cdot \nabla u) w_1 dx = \int_{\partial D} u w_1 (\nu_{j,k} \cdot n) ds - \int_D u(\nu_{j,k} \cdot \nabla w_1) dx,$$

ここで n は D における外向き単位法線ベクトル. ところで、$x \in \partial D$ において $\nu_{j,k} \cdot n = 0$, また、$w_1 = w_1(|x|)$、補題 5.1 より $\nu_{j,k} \cdot \nabla w_1 = 0$. 従って結論を得る. □

定理 5.1 の証明. 補題 5.1 より $v_{j,k} \equiv 0$ を示せばよい. $v_{j,k} \not\equiv 0$ と仮定する. 補題 5.2 より

$$\int_D |\nabla v_{j,k}|^2 dx = \int_D v_{j,k}^2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, u) dx.$$

(5.2) と補題 5.3 より

$$\lambda_2 \int_D v_{j,k}^2 dx \leq \int_D |\nabla v_{j,k}|^2 dx.$$

定理 5.1 の仮定より

$$\lambda_2 \int_D v_{j,k}^2 dx \leq \int_D v_{j,k}^2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, u) dx < \lambda_2 \int_D v_{j,k}^2 dx.$$

これは矛盾. よって $v_{j,k} \equiv 0$. 補題 5.1 より結論を得る. □

最後に、本稿をまとめるにあたり文献 [6], [10], [11] をたいへん参考にさせていただいた.最大値原理やさらに楕円型偏微分方程式論に関しては [6], [10] を参照されたい. また、解の領域と対称性をめぐる詳細に関しては [10], [11] を参照されたい.

REFERENCES

[1] H. Berestycki and L. Nirenberg, On the method of moving planes and the sliding method, Boltetim Soc. Brasileira Mat. Nova Ser. **22** (1991), 1-37.

[2] R. Dalmasso, Symmetry properties in higher order semilinear elliptic equations, Nonlinear Anal. **24** (1995), 1-7.

[3] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.

[4] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed., Springer, 1983.

[5] A. C. Lazer and P. J. McKenna, A symmetry theorem and applications to nonlinear partial differential equations, J. Differential Equations **72** (1988), 95-106.

[6] 村田實・倉田和浩、偏微分方程式１、(岩波講座現代数学の基礎)、岩波書店、1997.

[7] Y. Naito, T. Nishimoto, and T. Suzuki, Radial symmetry of positive solutions for semilinear elliptic equaitons in a disc, Hiroshima Math. J. **26** (1996), 531-545.

[8] Y. Naito and T. Suzuki, Radial symmetry of positive solutions for semilinear elliptic equaitons on the unit ball in $\mathbb{R}^n$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998) 215-234.

[9] M. Protter and H. Weinberger, Maximal Principles in Differential Equations, Prentice-hall, Englewood Cliffs, N.J. 1967.

[10] T. Suzuki, Semilinear Elliptic Equations, Gakkō Tosho, 1994.

[11] 鈴木貴、解の領域と対称性をめぐって、仙台研究集会報告集「非線形楕円型方程式の最近の話題から」(1995) 60-83.