数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 114-127

粘性解の L^p 理論について

(On L^p theory of viscosity solutions)

神戸商船大学　　石井克幸 (Katsuyuki Ishii)

Abstract. This note presents a brief introduction of L. A. Caffarelli-M. G. Crandall-M. Kocan-A. Święch [3]. In [3] They provide a unified treatment of L^p theory of viscosity solutions of second order elliptic PDE's with measurable ingredients.

1 Introduction

考える方程式は以下のものとする.

$$-a(x)\Delta u(x) - f(x) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

$\Omega \subset \mathcal{R}^N$ は有界領域で $a(x)$ は

$$a(x) = 1 \qquad \text{in} \quad \Omega_1, \quad = 2 \qquad \text{in} \quad \Omega \backslash \Omega_1,$$

とする. ただし, $\Omega_1 \subset \Omega$ はルベーグ可測とする.

1983 年に提出されて以来, 粘性解の概念は非発散形の非線形偏微分方程式に対する解の存在, 一意性に関する研究に大きな貢献をしている. しかし, 正則性等の粘性解の性質に関してはほとんど論じられていなかった. 1988, 1989 年に N. S. Trudinger [13], [14], L. A. Caffarelli [1], [2] によって粘性解の正則性に関する研究が発表された. その後, L. Wang [15], L. Escauriaza [7] 等の論文が現われ, 現在も研究が進展している.

その中で, L. A. Caffarelli-M. G. Crandall-M. Kocan-A. Święch [3] では粘性解の L^p 理論の基礎について一つの枠組みを与えた. このノートでは上のような簡単な方程式に限定し, 彼らの結果を紹介することにする.

2 Preliminaries

まず, L^p-粘性解の定義を与える. $p > n/2$, $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ と仮定する.

定義 2.1 $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) とは次の事柄が成り立つときをいう. 任意の $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ をとる. このとき, $\varepsilon > 0$ と開集合 $\mathcal{O} \subset \Omega$ が存在して

$$-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) \geqq (\text{resp.}, \leqq)\ \varepsilon \qquad \text{a.e. in} \quad \mathcal{O}$$

が成り立つならば, $u-\varphi$ は $\mathcal{O}$ で極大値 (resp., 極小値) を取らない. $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の L^p-粘性解であるとは u が (1.1) の L^p-粘性劣解, かつ L^p-粘性優解であるときをいう.

この定義を説明するために従来の粘性解の定義を思い出そう.

定義 2.2 $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) とは次の事柄が成り立つときをいう. 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ をとる. このとき, $u-\varphi$ が $\hat{x} \in \Omega$ で極大値 (resp., 極小値) を取るならば,

$$-a(\hat{x})\Delta\varphi(\hat{x}) - f(\hat{x}) \leqq (\text{resp.}, \geqq)\ 0$$

が成り立つ. $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の粘性解であるとは u が (1.1) の粘性劣解, かつ粘性優解であるときをいう.

定義 2.1 の原形は L. A. Caffarelli [2] によって与えられた. 要は定義 2.2 の対偶である. 定義 2.1 では, a, f の可測性を考慮して, それを修正をしたものとなっている. また, 定義 2.1 は以下のことと同値であることが簡単に分かる. $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) であるとは, 任意の $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ に対して $u-\varphi$ が $\hat{x} \in \Omega$ で極大値 (resp., 極小値) を取ったとすれば,

$$\operatorname{ess.}\liminf_{x \to \hat{x}} (-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x)) \leqq 0$$

$$\left(\text{resp.}, \operatorname{ess.}\limsup_{x \to \hat{x}} (-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x)) \geqq 0\right)$$

が成り立つ. これは各 ε, $r > 0$ に対して, n 次元ルベーグ測度が正の集合 $A \subset B_r(\hat{x})$ が存在して $-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) \leqq (\text{resp.}, \geqq)\ \varepsilon\ (x \in A)$ を満たすことを意味する.

$p > n/2$ という制限は定義 2.1 に現れるテスト関数 φ が連続になるための条件である. このとき, $W^{2,p}$ に属する関数はほとんど至るところ 2 回微分可能である (cf. A. P. Calderón-A. Zygmund [4]).

L^p-粘性解に対して, テスト関数を従来のものと同じように C^2 関数から取った場合の粘性解を C-粘性解と呼ぶことにしよう。即ち,

定義 2.3 $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の C-粘性劣解 (resp., C-粘性優解) とは次の事柄が成り立つときをいう. 任意の $\varphi \in C^2(\Omega)$ をとる. このとき, $\varepsilon > 0$ と開集合 $\mathcal{O} \subset \Omega$ が存在して

$$-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) \geqq (\text{resp.}, \leqq)\ \varepsilon \qquad \text{a.e. in} \quad \mathcal{O}$$

が成り立つならば, $u-\varphi$ は $\mathcal{O}$ で極大値 (resp., 極小値) を取らない. $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の C-粘性解であるとは u が (1.1) の C-粘性劣解, かつ C-粘性優解であるときをいう.

テスト関数の取り方から, 明らかに L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解, L^p-粘性解) は C-粘性劣解 (resp., C-粘性優解, C-粘性解) である. また, a, f が連続ならば C-粘性解は従来の粘性解の定義と同値になる.

従来の理論において, 粘性解の大きな特徴は解の一意性 (or 比較定理) が成り立つことである (cf. M. G. Crandall-H. Ishii-P.-L. Lions [6]). そこで, 上で定義した L^p-, C-粘性解について一意性が成り立つか, という疑問が生じる. C-粘性解の場合は一意性が成り立たない. 例を挙げよう.

例 2.4 $A \subset [-1,1]$ を任意の区間 $I \subset [-1,1]$ に対して $|A \cap I|, |A^c \cap I| > 0$ が成り立つような可測集合とする. χ_A を A の特性関数とし, $f(x) = \chi_A - \chi_{A^c}$ とおく. このとき $x \in (-1,1)$ に対して

$$\mathrm{ess.}\liminf_{y \to x} f(y) = -1, \mathrm{ess.}\limsup_{y \to x} f(y) = 1$$

であることより, $|\nu''| \leqq 1$ を満たす全ての $\nu \in C^\infty([-1,1])$ は $-u''(x) - f(x) = 0$ in $(-1,1)$ の C-粘性解である. よってディリクレ問題

$$-u''(x) - f(x) = 0 \quad \text{in } (-1,1), \quad u(\pm 1) = 0$$

は無数に C-粘性解をもつ.

更に M. G. Crandall-Z. Huan [5] では空間 1 次元で係数が連続な方程式について, 連続な粘性解の一意性, 非一意性, 及び $W^{2,1}$ に属する強解の存在とそれが C^1 関数に属する粘性解の中で一意であることが示されている. この結果より L^p-強解の存在が解の一意性に対して重要であると思われる. このことについて見ていこう.

定義 2.5 関数 $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ が (1.1) の L^p-強劣解 (resp., L^p-強優解, L^p-強解) であるとは

$$-a(x)\Delta u(x) - f(x) \leqq (\text{resp.}, \geqq, =)\ 0 \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega$$

を満たすときをいう.

これは D. Gilbarg-N. S. Trudinger [8] にも見られるように, 楕円型偏微分方程式ではよく用いられる解の概念である. (1.1) の L^p-強解については次の評価が得られている: ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $p > n - \varepsilon_0$, かつ $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ が (1.1) の L^p-強劣解ならば

$$\sup_{\Omega} u \leqq \sup_{\partial\Omega} u + C_1 \|f^+\|_{L^p(\Omega)} \tag{2.1}$$

となる. ただし, $C_1 = C_1(n, \Omega) > 0$ は定数. この scaled version として

$$\sup_{B_r(x)} u \leqq \sup_{\partial B_r(x)} u + C_2 r^{2-n/p} \|f^+\|_{L^p(B_r(x))} \tag{2.2}$$

となる. ただし, $C_2 = C_2(n) > 0$ は r にはよらない定数.

L^p-粘性解と L^p-強解の関係は以下のようになっている.

補題 2.6 $p \geqq n$, $f \in L^p(\Omega)$ を仮定する. このとき, $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の L^p-強劣解 (resp., L^p-強優解) ならば, L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) である.

これは P.-L. Lions [11] による $W^{2,p}$ 関数 ($p \geqq n$) に対する最大値原理を使うと証明できる.

補題 2.7 (1.1) の L^p-強劣解に対して, (2.1), (2.2) が成り立つとする. $f \in L^p(\Omega)$ とする. このとき, $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の L^p-強劣解 (resp., L^p-強優解) ならば, L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) である.

証明. u を (1.1) の L^p-強劣解ではあるが, L^p-粘性劣解ではないと仮定する. このとき $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, 及び $u - \varphi$ の狭義最大点 $\hat{x} \in \Omega$ が存在して

$$-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) \geqq \varepsilon > 0 \qquad \text{a.e. } x \text{ near } \hat{x}$$

を満たす. すると u が (1.1) の L^p-強劣解であることより

$$-a(x)\Delta(u(x) - \varphi(x)) \leqq -\varepsilon \qquad \text{a.e. } x \text{ near } \hat{x}$$

が言える. (2.2) より, 小さな $r > 0$ に対して

$$u(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) \leqq \sup_{\partial B_r(\hat{x})} (u - \varphi)$$

が成り立つ. これは $\hat{x}$ が $u - \varphi$ の狭義最大点であることに矛盾する. □

L^p-粘性解が L^p-強解になるか? ということについては後で述べることにする. 上の補題と同じことが半凸 (半凹) 関数についても成り立つ.

補題 2.8 (1.1) の L^p-強劣解に対して (2.1), (2.2) が成り立つとする. また $f \in L^p(\Omega)$ とする. $u \in C(\Omega)$ を Ω で半凸 (半凹) かつ

$$-a(x)\Delta u(x) - f(x) \leqq 0 \text{ (resp., } \geqq 0) \qquad \text{a.e. in} \quad \Omega$$

を満たすとする. このとき, u は L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) である. 更に, u は (2.1), (2.2) を満たす.

証明は省略する. C-粘性解と L^p-粘性解の関係は次の補題のとおりである.

補題 2.9 a, $f \in C(\Omega)$ と仮定する. (1.1) に対して (2.1), (2.2) が成り立つとする. このとき $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の C-粘性劣解 (resp., C-粘性優解) ならば, L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) である.

証明. u を (1.1) の C-粘性劣解であるが, L^p-粘性劣解でないと仮定しよう. すると, $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(B_{2r}(x_0))$, x_0: $u - \varphi$ の $B_r(x_0)$ での狭義最大点, が存在して

$$(2.3) \qquad -a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) \geqq \varepsilon > 0 \qquad \text{a.e. in} \quad B_r(x_0)$$

が成り立つ. ψ に定数を加減したり, r を小さく取り直すなどして, $u(x_0) - \varphi(x_0) = 3\delta > 0$, $u(x) - \varphi(x) \leqq -3\delta$ on $\partial B_r(x_0)$ としてよい. 更に, 簡単のため, $\varphi \in C^2(\Omega)$ とする. $w = u - \varphi$ とおくと u が (1.1) の C-粘性劣解であることより w は

$$-a(x)\Delta w(x) - g(x) = 0 \qquad \text{in} \quad B_r(x_0)$$
$$(g(x) = f(x) + a(x)\Delta\varphi(x) \in C(B_r(x_0)))$$

の C-粘性劣解である. (2.3) より $g \leqq 0$ in $B_r(x_0)$ であるから,

$$(2.4) \qquad \|g^+\|_{L^p(B_r(x_0))} = 0$$

を得る. $\eta > 0$ に対して

$$w^\eta(x) = \sup_{y \in B_{2r}(x_0)} \left(w(y) - \frac{1}{2\eta}|y - x|^2 \right)$$

とおくと, w^η は半凸であり, 十分小さな η に対して

$$-a(x)\Delta w^\eta(x) - \tilde{g}(x) \leqq 0 \qquad \text{a.e. in} \quad B_r(x_0)$$

が成り立つ. ただし, $\tilde{g}(x) = \max\{g(z) \mid |z - x| \leqq C_1\sqrt{\eta}\}$ で $C_1 > 0$ は定数. w^η の性質, 上の微分不等式についてはR. Jensen [9], R. Jensen-P.-L. Lions-P. E. Souganidis [10] を参照. また, 補題 2.8 より w^η は (2.1), (2.2) を満たす. $\|w^\eta - w\|_{C(B_r(x_0))} \to 0$ $(\eta \to 0)$ であるから, 十分小さな $\eta > 0$ に対して

$$\max_{B_r(x_0)} w^\eta \geqq \delta, w^\eta \leqq -\delta \quad \text{on } \partial B_r(x_0)$$

が言えて, (2.2) とこれらの不等式より $\delta \leqq \|\tilde{g}^+\|_{L^p(B_r(x_0))}$ を得る. 定義より $\|\tilde{g} - g\|_{C(B_r(x_0))} \to 0$ $(\eta \to 0)$ なので (2.4) と合わせて矛盾を得る. □

先程触れた L^p-粘性解の一意性については以下が成り立つ.

定理 2.10 (1.1) の L^p-強劣解に対して (2.1), (2.2) が成り立つとする. $f \in L^p(\Omega)$ とする. $u \in C(\overline{\Omega})$, $\psi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ をそれぞれ (1.1) の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解), L^p-強優解 (resp., L^p-強劣解) とする. このとき, $u \leqq \psi$ (resp., $\psi \leqq u$) on $\partial\Omega$ ならば$u \leqq \psi$ (resp., $\psi \leqq u$) on $\overline{\Omega}$ である. 特に u , ψ がそれぞれ (1.1) の L^p-粘性解, L^p-強解で $u = \psi$ on $\partial\Omega$ ならば $u = \psi$ on $\overline{\Omega}$ である.

この定理の証明には (1.1) に対する次の補助方程式と Alexandorff-Bakelman-Pucci 型の最大値原理を用いる. $u \in C^2(\Omega)$ とすると $a(x)$ においた仮定より

$$-\underline{\Delta}u(x) \equiv 2\sum_{\lambda_i \leqq 0} \lambda_i + \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \leqq -a(x)\Delta u(x) \leqq \sum_{\lambda_i \leqq 0} \lambda_i + 2\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \equiv -\overline{\Delta}u(x)$$

が成り立つ. ここで, $\{\lambda_i\}$ は $D^2u(x)$ の固有値. $-\underline{\Delta}u(x)$, $-\overline{\Delta}u(x)$ は Pucci の extremal operator と呼ばれる一様楕円型作用素である ([3] では $\mathcal{P}^{\pm}$ という記号を使っている). この作用素を使って以下の補助方程式を得る.

補題 2.11 $f \in L^p(\Omega)$ とする. $u \in C(\Omega)$ が (1.1) の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) ならば, u は

$$-\underline{\Delta}u(x) - f(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2.5}$$

$$(\text{resp.}, -\overline{\Delta}u(x) - f(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega) \tag{2.6}$$

の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) である.

証明は易しいので省略する.

命題 2.12 $f \in L^n(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ とする. 定数 $C_1 > 0$ が存在して以下を満たす. $u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$-\underline{\Delta}u(x) - f(x) \leqq 0 \quad \text{in} \quad \{u > 0\}$$

の C-粘性解ならば

$$\sup_{\Omega} u^+ \leqq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C_1 \mathrm{diam}(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}$$

を満たす. ただし,

$$\Gamma^+(w) = \{x \in \Omega \mid \exists p \in \mathcal{R}^n \text{ s.t. } w(y) \leqq w(y) + \langle p, y - x \rangle \text{ for } y \in \Omega\}$$

同様に $u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$-\overline{\Delta}u(x) - f(x) \geqq 0 \quad \text{in} \quad \{u < 0\}$$

の C-粘性解ならば

$$\sup_{\Omega} u^- \leqq \sup_{\partial\Omega} u^- + C_1 \mathrm{diam}(\Omega) \|f^-\|_{L^n(\Gamma^+(u^-))}$$

を満たす.

長くなるので証明は省略する. 補題 2.11 より (1.1) の L^p-粘性劣解, L^p-粘性優解についてもこの命題の主張が成り立つ.

定理 2.10 の証明. u が L^p-粘性劣解, ψ が L^p-強優解の場合を証明する. $w = u - \psi$ とする. $\psi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ かつ (2.4) の L^p-強優解なので w は

$$-a(x)\Delta w(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

の L^p-粘性劣解となる. すると $w \leqq 0$ on $\partial\Omega$ に注意して命題 2.12 を使うと $w \leqq 0$ on $\overline{\Omega}$ となり, $u \leqq \psi$ on $\overline{\Omega}$ を得る. □

3 Results

まず次の補題から証明する.

補題 3.1 $p > n - \varepsilon_0$ $(\exists \varepsilon_0 > 0)$ とし, Ω は一様外錐条件 (uniform exterior cone condition) を満たすとする. 更に, $f \in L^p(\Omega)$, $\psi \in C(\partial\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ とする. このとき C_0, $C_1 > 0$ が存在して以下が成り立つ. u, $v \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ をそれぞれ (2.5) の L^p-強劣解, (2.6) の L^p-強優解とし, $u = v = \psi$ on $\partial\Omega$ を満たすとする. このとき $C_1 > 0$ はこのような u, v に関して有界である. 更に u, v は

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')}, \|v\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leqq C_0(\|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}) \tag{3.1}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \|\psi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C_1(\mathrm{diam}(\Omega))^{2-n/p}\|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{3.2}$$

を満たす.

証明. u についてのみ証明する. $\{f_j\} \subset C^\infty(\Omega)$ を $f_j \to f$ in $L^p(\Omega)$ かつ a.e. in Ω となる関数列とする. D. Gilbarg-N. S. Trudinger [8] より

$$-\Delta u(x) - f_j(x) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \psi \quad \text{on } \partial\Omega$$

は古典解をもつので, それを u_j とする. u_j に対しても (2.1), (2.2) は成り立つので, $u \to u_j$, $f \to f_j$ に置き換えて (3.2) が成り立つ. 簡単のため, $\Omega' = B_R(0)$ とし,

$$\Psi_k(u) = \sup_{0<\rho<1} (1-\rho)^k R^k \|D^k u\|_{L^p(B_{\rho R})}, (k = 0, 1, 2)$$

とおくと D. Gilbarg-N. S. Trudinger [8] と同じ方法で,

$$\Psi_2(u_j) \leqq C_3(R^2\|f_j\|_{L^p(B_R)} + \Psi_1(u_j) + \Psi_0(u_j)). \tag{3.3}$$

が導ける. また, 補間不等式より

$$\Phi_1(u_j) \leqq \varepsilon\Psi_2(u_j) + \frac{C_4}{\varepsilon}\Psi_0(u_j)$$

を得る. これと (3.2), (3.3) を組み合わせて (3.1) を得る. 従って, (部分列を取ることにより)

$$u_j \to \exists u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \quad \text{weakly in } W^{2,p}_{loc}(\Omega) \ (j \to +\infty)$$

となる. 写像 $D^2u \to -\Delta u$ の弱下半連続性より $-\Delta u(x) - f(x) \leqq 0$ がわかり, (3.2) を得る.

最後に $u \in C(\overline{\Omega})$ を示す.

$$-\Delta(u_j - u_k) - (f_j - f_k) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, u_j - u_k = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega$$

と (3.1) より

$$\sup_{\Omega}(u_j - u_k)^- \leqq C_2\|f_j - f_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \qquad (j,k \to +\infty)$$

となる．同様に $\sup_{\Omega}(u_j - u_k)^+ \to 0$ $(j,k \to +\infty)$ であることが言えるので $\{u_j\} \subset C(\overline{\Omega})$ は Cauchy 列である．よって $u \in C(\overline{\Omega})$ であることが言える． □

この補題の結果として次のような最大値原理を得る．これは命題2.12 の拡張でもある．

命題 3.2 $f \in L^n(\Omega)$ とする．定数 $C_1 > 0$ が存在して以下を満たす．$u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$-\underline{\Delta}u(x) - f(x) \leqq 0 \qquad \text{in} \quad \{u > 0\}$$

の L^n-粘性解ならば

$$\sup_{\Omega} u^+ \leqq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C_1 \mathrm{diam}(\Omega)\|f^+\|_{L^n(\Gamma^+(u^+))}$$

を満たす．同様に $u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$-\overline{\Delta}u(x) - f(x) \geqq 0 \qquad \text{in} \quad \{u < 0\}$$

の L^n-粘性解ならば

$$\sup_{\Omega} u^- \leqq \sup_{\partial\Omega} u^- + C\mathrm{diam}(\Omega)\|f^-\|_{L^n(\Gamma^+(u^-))}$$

を満たす．

証明． 最初の主張のみを示す．Ω は一様外錐条件を満たすとしてよい．$\{f_j\} \subset C^\infty(\Omega)$ を $\|f_j - f\|_{L^n(\Omega)} \to 0$ となる関数列とする．補題 3.1 より

$$-\underline{\Delta}\psi_j(x) - (f_j(x) - f(x)) \leqq 0 \qquad \text{in} \quad \Omega, \quad \psi_j = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega$$

を満たす $\psi_j \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ が取れ，(3.2) より $\|\psi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ である．$w_j = u + \psi_j - \|\psi_j\|_{L^\infty(\Omega)}$ とおくと，w_j は

$$-\underline{\Delta}w_j(x) - f_j(x) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega$$

の L^n-粘性劣解である．$f_j \in C(\Omega)$ なので w はこの方程式の C-粘性劣解になることは定義よりチェックできる．故に，命題 2.12 を使って

$$\sup_{\Omega} w_j^+ \leqq \sup_{\partial\Omega} w_j^+ + C_1 \mathrm{diam}(\Omega)\|f_j^+\|_{L^n(\Gamma(w^+))}$$

を得る．ここで，$j \to +\infty$ とすることで証明が終わる． □

補題 3.1 から導かれる別の結果は L^p-粘性解の微分可能性である (命題 3.4, 定理 3.5). ただし, $\|Du\|_{L^p}$ などのような評価は伴わない. まず, 記号を準備する.

$$\mathcal{D}^{2,+}u(x) = \Big\{(p,X) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{S}^n \ \Big|\ u(x+h) \leqq u(x) + \langle p,h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh,h\rangle + o(|h|^2)\ (h \to 0)\Big\},$$

$$\mathcal{D}^{2,-}u(x) = \Big\{(p,X) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{S}^n \ \Big|\ u(x+h) \geqq u(x) + \langle p,h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh,h\rangle + o(|h|^2)\ (h \to 0)\Big\}.$$

命題 3.3 $p > n - \varepsilon_0$ $(\exists\varepsilon_0 > 0)$ とし, $f \in L^p(\Omega)$ とする. このとき, n 次元ルベーグ測度 0 の集合 $\mathcal{N}' \subset \Omega$ が存在して, もし u が (1.1) の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解), $x \in \Omega\backslash\mathcal{N}'$, $(p,X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(x)$ (resp., $(p,X) \in \mathcal{D}^{2,-}u(x)$) ならば

$$-a(x)\mathrm{tr}X - f(x) \leqq (\text{resp.}, \geqq)\ 0$$

が成り立つ.

この命題は L^p-粘性解は n 次元ルベーグ測度 0 の集合を除けば, 従来の粘性解の定義を満たすことを意味する.

証明. $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{S}^n$ を稠密とする. $\mathcal{L}(r,p,X)$ を次を満たす $x \in \Omega$ の全体とする.

$$(3.4)\ \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|(-a(y)\mathrm{tr}X - f(y)) - (-a(x)\mathrm{tr}X - f(x))|^p dy = 0$$

ルベーグの定理より各 (r,p,X) に対して $\mathcal{L}(r,p,X)$ は Ω と同じ測度をもつので,

$$\mathcal{E} = \bigcap_{(r,p,X)\in\mathcal{C}} \mathcal{L}(r,p,X)$$

もそうである. (1.1) は $X \in \mathcal{S}^n$ に関して連続で, それは a.e. $x \in \Omega$ に対して一様であるから, 全ての (r,p,X) に対して $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(r,p,X)$ である.

$\hat{x} \in \mathcal{E}$, $(p,X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(\hat{x})$ に対して $-a(\hat{x})\mathrm{tr}X - f(\hat{x}) \leqq 0$ を示したい. そのために, $-a(\hat{x})\mathrm{tr}X - f(\hat{x}) \geqq \delta > 0$ を仮定して矛盾を導く. $\hat{x} = 0$ としてよい. $(p,X) \in \mathcal{D}^{2,+}u(0)$ より

$$(3.5)\qquad \begin{cases} u(x) \leqq u(0) + \langle p,x\rangle + \frac{1}{2}\langle Xx,x\rangle + o(|x|^2), \\ -a(0)\mathrm{tr}X - f(0) > \delta > 0. \end{cases}$$

任意の $\eta > 0$ に対して X を $X + 2\eta I$ に置き換えることで $r_0 > 0$ が存在して

$$u(x) < u(0) + \langle p,x\rangle + \frac{1}{2}\langle Xx,x\rangle - \eta|x|^2 \quad \text{for } 0 < |x| \leqq r_0$$

が言える．

$$\varphi(x) = u(0) + \langle p, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Xx, x\rangle + \psi(x)$$

とする．(3.4) と (3.5) よりうまく補助関数 ψ を構成して矛盾を導く．$B_r(0)$ で

$$-a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) \geqq -a(x)\mathrm{tr}X - f(x) - \Delta\psi(x)$$

となる．ここで補題 3.1 より

$$\begin{cases} -\Delta\psi(x) \geqq -a(0)\mathrm{tr}X - f(0) + a(x)\mathrm{tr}X + f(x) & \text{in} \quad B_r(0), \\ \psi(x) = 0 & \text{on} \quad \partial B_r(0) \end{cases}$$

を満たす $\psi \in W^{2,p}_{loc}(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ を取る．すると，

$$\begin{aligned} & -a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) > -a(0)\mathrm{tr}X - f(0) > 0 \qquad \text{in} \quad B_r(0), \\ & \|\psi\|_{L^\infty(B_r(0))} \\ & \quad \leqq Cr^{2-n/p}\left\{r^{n/p}\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r(0))}|-a(0)\mathrm{tr}X - f(0) + a(x)\mathrm{tr}X + f(x)|^p dx\right)\right\} \\ & \quad \leqq o(r^2) \qquad (r \to 0) \end{aligned}$$

となる．2 番目の不等式は (2.2) による．$u-\varphi \leqq -\eta r^2/2$ as $r \to 0$, $u(0)-\varphi(0) = -\psi(0) = o(r^2)$ であるから，小さな $r > 0$ に対して $u - \varphi$ は $B_r(0)$ 上で最大値を取る．これは L^p-粘性劣解の定義に矛盾する．故に，$\mathcal{N}' = \Omega\backslash\mathcal{E}$ とおけば，証明が終わる． □

命題 3.4 $f \in L^n_{loc}(\Omega)$ とし，$u \in C(\Omega)$ を (2.5) の L^n-粘性劣解 (resp., (2.6) の L^n-粘性優解) とする．このとき，u は Ω のほとんど至るところで 2 回優微分可能 (劣微分可能) である．特に，u が (1.1) の L^n-粘性解ならば，u はほとんど至るところ 2 回微分可能で (1.1) を Ω のほとんど至るところで満たす．

証明． 劣解の場合のみを証明する．$y \in \Omega$, $0 < R < 1$ を $B = B_R(y) \subset \Omega$ となるように固定する．$k \geqq 1$ に対して，

$$u_k = u - \frac{k}{2}(|x-y|^2 - R^2)$$

とおく．このとき u_k は

$$-\Delta u_k(x) - f(x) \leqq -\Delta u(x) - f(x) + 2kn \leqq 2kn \qquad \text{in} \quad B$$

を L^n-粘性劣解の意味で満たす．命題 3.2 より B 上で

$$\begin{aligned} u_k(x) &\leqq \sup_{\partial B} u_k + CR\left(\|f\|_{L(B)} + k|\Gamma(u_k, B)|^{1/n}\right) \\ &\leqq \sup_{\partial B} u + CR\left(\|f\|_{L(B)} + k|\Gamma(u_k, B)|^{1/n}\right) \end{aligned}$$

となる. ただし, C は $k \geqq 1$, $R \leqq 1$ とは無関係な定数. $\inf_B u + kR^2/2 \leqq \sup_B u_k$ より

$$\inf_B u + \frac{k}{2}R^2 \leqq \sup_B u + CR\left(\|f\|_{L(B)} + k|\Gamma(u_k, B)|^{1/n}\right).$$

$E^+(v)$ を 2 回優微分可能な Ω 内の点の集合とすると, $E^+(u_k) = E^+(u)$, $\Gamma(u_k, B) \subset E^+(u_k)$ であることが簡単にわかる. 上の不等式で $k \to +\infty$ とした後, 少し変形すると

$$\left(\frac{1}{2C}\right)^n \leqq \frac{|E^+(u) \cap B_R(y)|}{R^n}$$

を得る. よって, $\overline{B_R(y)} \subset \Omega$ となる全ての $y \in \Omega, 0 < R < 1$ に対して

$$\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{2C}\right)^n \leqq \frac{|E^+(u) \cap B_R(y)|}{|B_R(y)|}$$

が従う. ここで $g(x) = \chi_{E^+(u)^c}(x)$ とおくと, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ で, 任意の $y \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{|B_R(y)|}\int_\Omega g(x)dx + \frac{1}{B_R(y)}\int_\Omega (g(y) - g(x))dx \\ &\leqq \frac{|E^+(u)^c \cap B_R(y)|}{|B_R(y)|} + \frac{1}{|B_R(y)|}\int_\Omega |g(y) - g(x)|dx \\ &< 1 - \frac{1}{2\omega_n}\left(\frac{1}{2C}\right)^n \quad (R \to 0) \end{aligned}$$

従って, a.e. $y \in \Omega$ で $g(y) = 0$ であることがわかり, $|E^+(u)^c| = 0$ となる. 故に $|E^+(u)| = |\Omega|$ となり, u は Ω のほとんど至る所で 2 回優微分可能である.

後半の主張は補題 2.11, 命題 3.3 と一般化された Rademacher-Stepanov の定理 (cf. A. P. Calderón-A. Zygmund [4], E. Stein [12]) を使って示される. □

この命題を用いて, L^p-粘性解に対しても同様の結論が得られる.

定理 3.5 $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ とし, $p > n - \varepsilon_0$ $(\exists\varepsilon_0 > 0)$ と仮定する. $u \in C(\Omega)$ を (2.5) の L^p-粘性劣解 (resp., (2.6) の L^p-粘性優解) とする. このとき u は Ω 上でほとんど至る所 2 回優微分可能 (resp., 劣微分可能) である. 特に, u が (1.1) の L^p-粘性解ならば, u は Ω 上ほとんど至る所で 2 回微分可能, かつ (1.1) を満たす.

証明. u が (2.5) の L^p-粘性劣解の場合のみを証明する. 各 $B_r(x) \subset \Omega$ に対して補題 3.1 より

$$-\Delta\psi(x) - f(x) \geqq 0 \qquad \text{a.e. in} \quad B_r(x)$$

を満たす関数 $\psi \in W^{2,p}_{loc}(B_r(x))$ を取ることができる. すると, $u-\psi$ は $-\Delta v(x)=0$ in $B_r(x)$ の L^p-粘性劣解 (よって L^n-粘性劣解) となる. 命題 3.4 より $u-\psi$ は a.e. in $B_r(x)$ で 2 回優微分可能である. ψ は $B_r(x)$ でほとんど至る所 2 回微分可能であることより, u は a.e. in $B_r(x)$ で 2 回優微分可能である. 後半の主張は命題 3.4 の証明と同様にして示される. □

命題 3.4 の系として次を得る.

系 3.6 命題 3.4 の仮定のもとで, $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ が (1.1) の L^p-粘性解ならば, L^p-強解になる.

次の定理は従来の粘性解に関する安定性の L^p-粘性解版といえる.

定理 3.7 $p>n-\varepsilon_0$ $(\exists\varepsilon_0>0)$ とし, a_m, f_m, a, $f \in L^p(\Omega)$ とする. $u_m \in C(\Omega)$ を $-a_m(x)\Delta u(x)-f_m(x)=0$ in Ω の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) とする. $m\to+\infty$ としたとき u_m が $u\in C(\Omega)$ に Ω 上で広義一様収束すると仮定する. また, $B_r(x_0)\subset\Omega$, $\varphi\in W^{2,p}_{loc}(B_r(x_0))$ に対して

$$g_m(x)=-a_m(x)\Delta\varphi(x)-f_m(x), g(x)=-a(x)\Delta\varphi(x)-f(x)$$

としたとき,

$$\begin{aligned}(3.6)\qquad & \|(g-g_m)^+\|_{L^p(B_r(x_0))}\to 0\\ & (\text{resp.}, \|(g-g_m)^-\|_{L^p(B_r(x_0))}\to 0)\quad (m\to+\infty)\end{aligned}$$

と仮定する. このとき, u は (1.1) の L^p-粘性劣解 (resp., L^p-粘性優解) となる.

証明. u が (1.1) の L^p-粘性劣解でないと仮定する. すると $x_0\in\Omega$, ε, δ, $r>0$ が $B_r(x_0)\subset\Omega$ となるように取れ, 更に $\varphi\in W^{2,p}_{loc}(B_r(x_0))$ が存在して

$$(3.7)\qquad -a(x)\Delta\varphi(x)-f(x)>\varepsilon \quad \text{in} \quad B_r(x_0),$$

$$(3.8)\qquad (u-\varphi)(x_0)=0, u-\varphi<-\delta \quad \text{on } \partial B_r(x_0)$$

を満たす. 矛盾を導くために

$$(3.9)\qquad \|\varphi_m\|_{L^\infty(B_r(x_0))}\to 0,$$

$$(3.10)\qquad -a_m(x)\Delta(\varphi+\varphi_m)(x)-f_m(x)\geqq\varepsilon \quad \text{in} \quad B_r(x_0)$$

を満たす $\varphi_m\in W^{2,p}_{loc}(B_r(x_0))\cap C(\overline{B_r(x_0)})$ を求めよう. 求まったとすると, u_m は u に $\overline{B_r(x_0)}$ 上で一様収束するので, (3.7), (3.8) より十分大きな $m>1$ に対して

$$\sup_{B_r(x_0)}(u_m-(\varphi+\varphi_m))>\sup_{\partial B_r(x_0)}(u_m-(\varphi+\varphi_m))$$

が成り立つ. すると $u_m - (\varphi + \varphi_m)$ は $B_r(x_0)$ の内点 x_m で最大値を取る. u_m は L^p-粘性劣解なので, 任意の η, $s > 0$ に対して n 次元ルベーグ測度が正の集合 $A \subset B_s(x_m)$ が存在して

$$-a_m(x)\Delta(\varphi + \varphi_m)(x) - f_m(x) \leqq \eta \qquad \text{in} \quad A$$

となる. $\eta = \varepsilon/2$, $s = (r - |x_0 - x_m|)/2$ として矛盾を得る.

さて,

$$\begin{aligned} &-a_m(x)\Delta(\varphi + \varphi_m)(x) - f_m(x) \\ &\quad = g_m(x) - g(x) - a(x)\Delta\varphi(x) - f(x) - \Delta\varphi_m(x) \\ &\quad \geqq g_m(x) - g(x) + \varepsilon - \Delta\varphi_m(x) \end{aligned}$$

となる. 補題 3.1 より φ_m を

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_m(x) \geqq -g_m(x) + g(x) & \text{in} \quad B_r(x_0), \\ \varphi_m = 0 & \text{on} \quad \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

を満たすものが取れ, それは (3.10) を満たす. 更に (2.2) より

$$\|\varphi_m\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leqq Cr^{2-n/p}\|(g_m - g)^+\|_{L^p(B_r(x_0))}$$

も満たし, (3.6) より (3.9) を得るので証明が終わる. □

本節の結果を使うと, (1.1) に対する L^p-粘性解, L^p-強解の存在が証明できる. 詳細は [3] をご覧ください.

References

[1] L. A. Caffarelli. Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations. *Ann. Math.*, 130:189–213, 1989.

[2] L. A. Caffarelli. A priori estimates for fully nonlinear second order elliptic equations. in *Nonlinear variational problems* II, *Pitman Research Notes in Math., Longman, New York*, 193:99–106, 1989.

[3] L. A. Caffarelli, M. G. Crandall, M. J. Kocan, and A. J. Święch. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49:365–397, 1996.

[4] A. P. Calderón and A. Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Stud. Math.*, 20:171–225, 1961.

[5] M. G. Crandall and Z. Huan. On nonuniqueness of viscosity solutions. *Differential Integral Equations*, 5:1247–1265, 1992.

[6] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. A. M. S.*, 27:1–67, 1992.

[7] L. Escauriaza. $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions of fully non-linear equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 42:413–423, 1993.

[8] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] R. Jensen. The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 101:1–27, 1988.

[10] R. Jensen, P.-L. Lions, and P. E. Souganidis. A uniqueness result for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4:975–978, 1988.

[11] P.-L. Lions. A remark on Bony maximum principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88:503–508, 1983.

[12] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Propeties of Functions.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[13] N. S. Trudinger. Comparison principles and pointwise estimates for visosity solutions. *Ret. Mat. Iberoamericana*, 4:453–468, 1988.

[14] N. S. Trudinger. On the twice differentiability of visosity solutions of nonlinear elliptic equations. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 39:443–447, 1989.

[15] L. Wang. On the regularity of fully nonlinear parabolic equations, I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:27–76, 1992.