数理解析研究所講究録 1204 巻 2001 年 34-49

測度を含む半線型楕円型方程式の正値解について

(On positive solutions to some semilinear elliptic equations involving finite Radon measures)

東北大学大学院理学研究科 佐藤 得志 (Tokushi Sato)

概 要

We consider positive solutions to the scalar field equation with subcritical exponent in some sence involving a nonnegative finite Radon measure as force term. In this case there is no solution provided that the force term is sufficiently large. By using certain continuation method, we may find the maximal force term as constant multiplication of any fixed finite Radon measure with compact support, together with unique solution to the corresponding equation. Moreover, we may show the existence of two solutions in the case that the force term is smaller than the maximal one.

1. Singular ground states.

本稿においては, 空間次元を $n \geq 2$ とし, $\mathbf{R}^n$ における半線型楕円型方程式

$$-\Delta u + u = g(u) \tag{1.1}$$

について考える. ここで, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$ は $\mathbf{R}^n$ 上の Laplace 作用素, 非線型項 g は

$$g(s) = s_+^p \quad \text{for } s \in \mathbf{R} \qquad (p > 1) \tag{1.2}$$

であるとする. このとき, 方程式 (1.1) を scalar field 方程式と呼ぶが, 解としては無限遠で 0 に収束するような正値解を考える. 本稿の主結果においては, 非線型項が必ずしも (1.2) の形であることを要しないが, 以下の議論においてはすべて (1.2) の形で話を進める. 以下,

$$p_* = \frac{n}{n-2} < 2p_* - 1 = \frac{n+2}{n-2} \quad \text{if } n \geq 3, \quad p_* = 2p_* - 1 = 2p_* = \infty \quad \text{if } n = 2 \tag{1.3}$$

とする.

本稿の目的は, (1.1) において特異点をもつ解について調べること, 及び (1.1) において方程式の右辺に非負の外力項 μ を加えた問題

$$-\Delta u + u = g(u) + \mu \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \tag{1.4}$$

の解について調べることである. $p \in (1, 2p_* - 1)$ のとき, (1.4) において μ が何らかの意味で小さい場合には,

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u), \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n, \\ u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

の解 (ground state と呼ばれる) との関連などで様々な結果がある.

ここでは, (1.1) において特異点をもつ解を考え, その中で最も単純な問題

$$(\mathrm{P})^0_* \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u), \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \to \infty \quad \text{as } x \to 0, \quad u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

について述べておく. $(\mathrm{P})^0_*$ の解を singular ground state と呼ぶが, これが解をもつための必要十分条件は $p \in (1, 2p_* - 1)$ である (see [8], [4], [9]). 更に, $(\mathrm{P})^0_*$ の解 $u \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ はすべて球対称であり (see [2]), 次が成り立つ (see [4], [6]):

$$(1.5) \quad u(x) \sim \begin{cases} \left[\dfrac{2}{p-1}\Big(n - 2 - \dfrac{2}{p-1}\Big)\dfrac{1}{|x|^2}\right]^{1/(p-1)} & \text{as } x \to 0 \quad \text{if } p \in (p_*, 2p_* - 1), \\ \left[\dfrac{(n-2)^2}{2}\dfrac{1}{|x|^2 \log(1/|x|)}\right]^{(n-2)/2} & \text{as } x \to 0 \quad \text{if } p = p_*, \\ \kappa E(x) \qquad \text{for some } \kappa > 0 & \text{as } x \to 0 \quad \text{if } p \in (1, p_*). \end{cases}$$

ここで, $u(x) \sim v(x)$ は $u(x)/v(x) \to 1$ を表し, E は $\mathbf{R}^n$ 上の $-\Delta$ の基本解

$$(1.6) \qquad E(x) = E(|x|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)n\omega_n}\dfrac{1}{|x|^{n-2}} & \text{if } n \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{|x|} & \text{if } n = 2 \end{cases}$$

(ω_n は $\mathbf{R}^n$ における単位球の体積) である.

以下において $p \in (1, p_*)$ の場合のみを考え, $(\mathrm{P})^0_*$ の代わりに, $\kappa > 0$ に対して

$$(\mathrm{P})^0_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u), \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u \sim \kappa E(x) \quad \text{as } x \to 0, \quad u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

を考える. このとき, $(\mathrm{P})^0_\kappa$ の解 $u \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ に対して

$$(1.7) \qquad -\Delta u + u = g(u) + \kappa\delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \quad u = E_1 * [g(u)] + \kappa E_1 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

が成り立つ (see [6]). ここで, δ_0 は原点に台をもつ Dirac の delta 函数, E_1 は $\mathbf{R}^n$ 上の $-\Delta + I$ の基本解であり, これは変形 Bessel 函数 $K_{(n-2)/2}$ (see [7]) を用いて

$$(1.8) \qquad E_1(x) = E_1(|x|) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{|x|^{(n-2)/2}}K_{(n-2)/2}(|x|)$$

と表される. 更に, E_1 は次の性質をみたす (see e.g. [2, Appendix C]):

$$(1.9) \quad \begin{cases} -\Delta E_1 + E_1 = \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \quad E_1 > 0, \quad \dfrac{\partial E_1}{\partial r} < 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ E_1(x) \sim E(x) \qquad \text{as } x \to 0, \quad E_1(x) \sim c_{(n)}\dfrac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-1)/2}} \quad \text{as } |x| \to \infty, \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial r}(x) \sim \dfrac{\partial E}{\partial r}(x) \quad \text{as } x \to 0, \quad \dfrac{\partial E_1}{\partial r}(x) \sim -E_1(x) \qquad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

($c_{(n)} > 0$ は定数). 特に, $q \in [1, p_*)$ に対して $E_1 \in L^q(\mathbf{R}^n)$ であり, $\|E_1\|_1 = 1$ が成り立つ. ここで, $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L^q(\mathbf{R}^n)}$ $(1 \leq q \leq \infty)$ である.

以下, $q \in (p, p_*)$ なる q を固定し,

$$BC(\mathbf{R}^n) = (C \cap L^\infty)(\mathbf{R}^n) \tag{1.10}$$

とおく. このとき, 次が成り立つことに注意しておく.

Lemma 1.1. $u \in L^q(\mathbf{R}^n)$, $0 \le u \not\equiv 0$ on $\mathbf{R}^n$ と仮定する.

(i)
$$\lambda^1[u] = \inf\Big\{ \frac{\|\nabla\phi\|_2^2 + \|\phi\|_2^2}{\|g'(u)\phi^2\|_1} \ \Big|\ \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \setminus \{0\} \Big\}$$

の minimizer $\varphi^1 \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \setminus \{0\}$ が存在する.

(ii) $\lambda^1[u]$ は線型化固有値問題

$$(\mathrm{L}\,;u)^\lambda \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi = \lambda g'(u)\varphi & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \\ \varphi(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

の (単純な) 第 1 固有値である. φ^1 は固有値 $\lambda^1[u]$ に対応する固有函数であって, $\varphi^1 \in BC(\mathbf{R}^n)$ かつ $\varphi > 0$ on $\mathbf{R}^n$ (または $\varphi < 0$ on $\mathbf{R}^n$) をみたす.

(iii) $(\mathrm{L}\,;u)^\lambda$ の正値解 $\varphi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \setminus \{0\}$ が存在するならば, $\lambda = \lambda^1[u]$ である.

$\lambda^1[u]$ の定義によって

$$\lambda^1[u]\|g'(u)\phi^2\|_1 \le \|\nabla\phi\|_2^2 + \|\phi\|_2^2 \quad \text{for all } \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \tag{1.11}$$

が成り立つことに注意する. $(\mathrm{P})_\kappa^0$ の解 $u \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ が $\lambda^1[u] > 1$ をみたすとき, これを $(\mathrm{P})_\kappa^0$ の狭義最小解と呼ぶことにすると, 以下が成り立つ.

Fact([10]).

$$\kappa^* = \sup\{\, \kappa > 0 \mid (\mathrm{P})_\kappa^0 \text{ has a solution} \,\} \tag{1.12}$$

とすると, 次が成り立つ:

(I) (i) $0 < \kappa^* < \infty$ である.

(ii) $(\mathrm{P})_{\kappa^*}^0$ の解 $u_{\kappa^*} \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ が一意的に存在し, $\lambda^1[u_{\kappa^*}] = 1$ をみたす.

(iii) $(\mathrm{P})_\kappa^0$ が $\lambda^1[u] = 1$ をみたす解 $u \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ をもつならば, $\kappa = \kappa^*$ である.

(II) (i) 任意の $\kappa \in (0, \kappa^*)$ に対し, $(\mathrm{P})_\kappa^0$ の狭義最小解 $u_\kappa \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ が一意的に存在する.

(ii) 写像 $[0, \kappa^*] \ni \kappa \mapsto \dfrac{u_\kappa}{E_1} \in BC(\mathbf{R}^n)$ は連続である. 但し, $u_0 \equiv 0$ とする.

(III) 任意の $\kappa \in (0, \kappa^*)$ に対し, $(\mathrm{P})_\kappa^0$ の解 $\overline{u}_\kappa \in C^2(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ で $\overline{u}_\kappa - u_\kappa$, $\dfrac{\overline{u}_\kappa - u_\kappa}{E_1} \in BC(\mathbf{R}^n)$, $\overline{u}_\kappa - u_\kappa > 0$ on $\mathbf{R}^n$, $\lambda^1[\overline{u}_\kappa] < 1$ をみたすものが存在する.

2. General problems and main result.

前節の Fact は, δ_0 の定数倍を外力項にもつ問題に対する結果と考えることができる. 以下においては, δ_0 の代わりに一般の compact な台をもつ非負値有限 Radon 測度 μ_* を考えたときの結果について述べる. 例えば $\mu_* = \sum_{i=1}^{N} c_i\delta_{a_i}$ ($c_i > 0$, $a_i \in \mathbf{R}^n$) のときは, 複数の特異点をもつ解について考えることに対応する.

そこで, $\mathbf{R}^n$ 上の非負値有限 Radon 測度 $\mu_*(\not\equiv 0)$ で $\mathrm{supp}\,\mu_*$ が compact であるものを固定し, $\kappa > 0$ に対して

$$(\mathrm{P})_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u) + \kappa\mu_* & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \\ u \geq 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n, \quad u(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

なる問題を考える.

Remark 2.1. 一般の (台が compact とは限らない) 非負値有限 Radon 測度 μ_* に対して問題 $(\mathrm{P})_\kappa$ を考える場合, 解 u に対する連続性は期待できないため, 無限遠での条件 $u(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$ の解釈が問題となる. しかし, $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ が上の (超函数の意味での) 方程式をみたすならば, 楕円型方程式の正則性の理論によって $u \in C^2(\mathbf{R}^n \backslash \mathrm{supp}\,\mu_*)$ が得られる. 従って, $\mathrm{supp}\,\mu_*$ が compact なときは, $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ が $(\mathrm{P})_\kappa$ をみたすときに, これを $(\mathrm{P})_\kappa$ の解と呼ぶことにする.

以下が本稿における主結果である. $(\mathrm{P})_\kappa$ の解 u が $\lambda^1[u] > 1$ をみたすとき, これを $(\mathrm{P})_\kappa$ の狭義最小解と呼ぶことにする.

Theorem. $\mu_*(\not\equiv 0)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の非負値有限 Radon 測度で, $\mathrm{supp}\,\mu_*$ は compact とする. このとき,

$$\kappa^* = \sup\{\, \kappa > 0 \mid (\mathrm{P})_\kappa \text{ has a solution} \,\} \tag{2.1}$$

とすると, 次が成り立つ:

(I) (i) $0 < \kappa^* < \infty$ である.

(ii) $(\mathrm{P})_{\kappa^*}$ の解 u_{1,κ^*} が一意的に存在し, $\lambda^1[u_{1,\kappa^*}] = 1$ をみたす.

(iii) $(\mathrm{P})_\kappa$ が $\lambda^1[u] = 1$ をみたす解 u をもつならば, $\kappa = \kappa^*$ である.

(II) 任意の $\kappa \in (0, \kappa^*)$ に対し, $(\mathrm{P})_\kappa$ の狭義最小解 $u_{1,\kappa}$ が一意的に存在する.

(III) 任意の $\kappa \in (0, \kappa^*)$ に対し, $(\mathrm{P})_\kappa$ の解 $\overline{u}_{1,\kappa}$ で $\overline{u}_{1,\kappa} - u_{1,\kappa} \in BC(\mathbf{R}^n)$, $\overline{u}_{1,\kappa} - u_{1,\kappa} > 0$ on $\mathbf{R}^n$, $\lambda^1[\overline{u}_{1,\kappa}] < 1$ をみたすものが存在する.

Remark 2.2. (II) の狭義最小解については, 写像 $[0, \kappa^*] \ni \kappa \mapsto u_{1,\kappa}$ $(u_{1,0} \equiv 0)$ は適当な意味で連続である. しかし, (III) で得られる解 $\overline{u}_{1,\kappa}$ の一意性及び連続性については分からない.

以下の節において, 上の Theorem の証明, 特に (I) の証明について述べる.

3. Outline of the proof of (I).

この節では, Theorem (I) の証明の概略について述べる. [10] と同様に, Keener–Keller [5] による continuation method を用いる. 以下, μ_* は Theorem の仮定をみたすとし,

$$\phi_* = E_1 * \mu_* \; (\in (L^1 \cap L^q)(\mathbf{R}^n)) \tag{3.1}$$

とおく. このとき, parameter $\tau \in [0,1]$ を導入し, $\kappa \geq 0$ に対して

$$(\mathrm{P}_\tau)_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = g(u) - (1-\tau)g(\kappa\phi_*) + \kappa\mu_* & \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \\ u \geq \kappa\phi_* \quad \text{on } \mathbf{R}^n, \quad u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

なる問題を考える. 但し, 解の意味は Remark 2.1 と同様であり, $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解 u が $\lambda^1[u] > 1$ をみたすとき, これを $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の狭義最小解と呼ぶことにする.

Remark 3.1. (i) $\kappa > 0$ に対して $(\mathrm{P})_\kappa$ と $(\mathrm{P}_1)_\kappa$ は同値である.
(ii) $\tau \in [0,1]$ に対し, $u \equiv 0$ は $(\mathrm{P}_\tau)_0$ の解である. また, $\kappa > 0$ に対して $u = \kappa\phi_*$ は $(\mathrm{P}_0)_\kappa$ の解である.

Theorem (I) の証明のためには, 次の意味での (Q_1) の解を見つけることが重要である.

Definition 3.1. $\tau \in [0,1]$ に対し, $(u, \varphi; \kappa)$ が (Q_τ) の解であるとは, u が $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解であって, φ が $(\mathrm{L}; u)^1$ の正値解となることである. このとき,

$$T = \{\, \tau \in [0,1] \mid (\mathrm{Q}_\tau) \text{ has a solution} \,\} \tag{3.2}$$

とおく.

Remark 3.2. (i) (P) の解 $\overline{u}$ に対して $\lambda^1[\overline{u}] < 1$ が成り立つことを用いると, $(u, \varphi; \kappa)$ が (Q_τ) の解ならば, $\kappa > 0$ であることが分かる.
(ii) $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解 u で $\lambda^1[u] = 1$ をみたすものが存在すれば, $\tau \in T$ である. 実際, この u に対して Lemma 1.1 で得られる φ^1 を用いれば, $(u, \varphi^1; \kappa)$ は (Q_τ) の解である.

Theorem (I) は次の 2 つの Propositions から得られる.

Proposition 3.1. (Q_τ) の解 $(u, \varphi^1; \kappa)$ が存在すると仮定する.
(i) $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解は一意的である.
(ii) $\tau \in (0,1]$ ならば, $\overline{\kappa} > \kappa$ に対して $(\mathrm{P}_\tau)_{\overline{\kappa}}$ は解をもたない.

Proposition 3.2. $T = [0,1]$ が成り立つ.

Proposition 3.2 の証明は次の 3 つの Step による.

Step 1. $0 \in T$ である.
Step 2. T は $[0,1]$ における開集合である.
Step 3. T は $[0,1]$ における閉集合である.

いま Step 1 を示す. 他は以下の節において示していく.

Proof of Step 1. まず, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\kappa\phi_*$ が $(\mathrm{P}_0)_\kappa$ の解であることに注意する. Lemma 1.1 を用いると, 適当な $\kappa_0 > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda^1[\kappa_0\phi_*] &= \inf\left\{ \frac{\|\nabla\phi\|_2^2 + \|\phi\|_2^2}{\|g'(\kappa_0\phi_*)\phi^2\|_1} \;\middle|\; \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \setminus \{0\} \right\} \\ &= \frac{1}{p\kappa_0^{p-1}} \inf\left\{ \frac{\|\nabla\phi\|_2^2 + \|\phi\|_2^2}{\|\phi_*^{p-1}\phi^2\|_1} \;\middle|\; \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \setminus \{0\} \right\} = 1 \end{aligned}$$

が成り立ち, Remark 3.2 (ii) から $0 \in T$ が従う. q.e.d.

4. Minimal solutions.

この節では, 優解–劣解の方法を用いた解の構成について述べる. このために, 次の記号を導入する:

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} u_{\tau,\kappa}^k = \sum_{j=0}^{k} \phi_{\tau,\kappa}^j \ \ (k \geq 0), \quad \phi_{\tau,\kappa}^0 = \kappa\phi_*, \quad \phi_{\tau,\kappa}^k = E_1 * g_{\tau,\kappa}^{k-1} \ \ (k \geq 1), \\ g_{\tau,\kappa}^0 = \tau g(\kappa\phi_*), \quad g_{\tau,\kappa}^k = g(u_{\tau,\kappa}^k) - g(u_{\tau,\kappa}^{k-1}) \ \ (k \geq 1). \end{cases}
$$

以下の議論により, $u = \lim_{k\to\infty} u_{\tau,\kappa}^k$ が適当な意味で収束するならば, これは $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の 1 つの解を与える.

Remark 4.1. (i) $\phi_{\tau,0}^k = 0$ $(k \geq 0)$ であり, これは $u \equiv 0$ が $(\mathrm{P}_\tau)_0$ の解となることに対応する.
(ii) $\phi_{0,\kappa}^k = 0$ $(k \geq 1)$ であり, これは $u = \kappa\phi_*$ が $(\mathrm{P}_0)_\kappa$ の解となることに対応する.

必要ならば $q \in (p, p_*)$ を少しずらすことにより, ある $\overline{k} \in \mathbf{N}$ に対して

$$
(4.2)\qquad \overline{\alpha} = \frac{2}{n} - \frac{p-1}{q}, \quad \frac{1}{q_k} = \frac{1}{q} - k\overline{\alpha} \ \ (k \geq 0), \quad \frac{1}{q_{\overline{k}-1}} > 0 > \frac{1}{q_{\overline{k}}} = -\overline{\alpha}_1
$$

が成り立つようにする $(0 < \overline{\alpha}_1 < \overline{\alpha} < 1)$. このとき,

$$
(4.3)\qquad \begin{cases} \phi_{\tau,\kappa}^{k+1} = E_1 * [\psi_{\tau,\kappa}^k \phi_{\tau,\kappa}^k] \ \ (k \geq 0), \\ \psi_{\tau,\kappa}^0 = \tau \int_0^1 g'(t\kappa\phi_*)dt, \quad \psi_{\tau,\kappa}^k = \int_0^1 g'(u_{\tau,\kappa}^{k-1} + t\phi_{\tau,\kappa}^k)dt \ \ (k \geq 1) \end{cases}
$$

において $\psi_{\tau,\kappa}^k \in L^{q/(p-1)}(\mathbf{R}^n)$ $(k \geq 0)$ となることを用いると, boot-strap argument によって次が成り立つ.

Lemma 4.1. (i) $\phi_{\tau,\kappa}^k \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^{q_k}(\mathbf{R}^n)$ $\quad (0 \leq k \leq \overline{k} - 1)$.
(ii) $\phi_{\tau,\kappa}^{\overline{k}} \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap C^{\overline{\alpha}_1}(\mathbf{R}^n)$ かつ $\phi_{\tau,\kappa}^{\overline{k}}(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$.
(iii) $\phi_{\tau,\kappa}^k \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap C^{\overline{\alpha}}(\mathbf{R}^n)$ かつ $\phi_{\tau,\kappa}^k(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$ $\quad (k \geq \overline{k}+1)$.

このとき, $w = u - u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}}$ とおくと, u が $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解であるための必要十分条件は, $w \in BC(\mathbf{R}^n)$ かつ

$$
(4.4)\qquad w = E_1 * [g(u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}} + w) - g(u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}-1})] \geq 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n, \quad w(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty
$$

であることが分かる. そこで, 次によって $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解を定義する.

Definition 4.1. $\tilde{u}$ が $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解であるとは, $\tilde{w} = \tilde{u} - u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}}$ としたとき, $\tilde{w} \in BC(\mathbf{R}^n)$ かつ

$$
(4.5)\qquad \tilde{w} \geq E_1 * [g(u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}} + \tilde{w}) - g(u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}-1})] \geq 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n, \quad \tilde{w}(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty
$$

をみたすことである.

明らかに, $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解である. $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解 $\tilde{u}$ が存在するとき, 帰納的に

$$\kappa\phi_* \leq u_{\tau,\kappa}^{k-1} \leq u_{\tau,\kappa}^{k} \leq \tilde{u} \quad \text{on } \mathbf{R}^n \quad (k \geq 1) \tag{4.6}$$

が得られ, これを用いることにより次が成り立つ.

Lemma 4.2. $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解 $\tilde{u}$ が存在すると仮定する. このとき, $w = \sum_{j=\bar{k}+1}^{\infty} \phi_{\tau,\kappa}^{j}$ は $\mathbf{R}^n$ 上局所一様収束する. 更に, $u = u_{\tau,\kappa}^{\bar{k}} + w$ は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解であって,

$$\kappa\phi_* \leq u \leq \tilde{u} \quad \text{on } \mathbf{R}^n \tag{4.7}$$

をみたす.

上によって得られる解を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の最小解と呼ぶ. $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の狭義最小解は最小解であることが分かる.

Remark 4.2. $\bar{u}$ を $(\mathrm{P}_\tau)_{\bar{\kappa}}$ の解とし, $\bar{w} = \bar{u} - u_{\tau,\bar{\kappa}}^{\bar{k}}$ とおく. このとき, $\kappa < \bar{\kappa}$ に対して $\tilde{u} = u_{\tau,\kappa}^{\bar{k}} + \bar{w}$ は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解である. 従って, Theorem (I) が成り立てば, Theorem (II) も成り立つ.

Remark 4.3. $\operatorname{supp}\mu_*$ が compact とは限らないときでも, (4.4) によって $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解を定義すれば, この節における議論は成り立つ.

5. Invertibility of linearized operators.

この節の議論は $\operatorname{supp}\mu_*$ が compact であることを本質的に用いる. u を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解とし, φ^1 を Lemma 1.1 によって得られる $(\mathrm{L}\,;u)^{\lambda^1[u]}$ の正値解とする. このとき,

$$u - u_{\tau,\kappa}^{\bar{k}} = w = z\zeta, \quad \varphi^1 = \psi^1\zeta^\nu = y^1\zeta, \quad g'(u)\varphi^1 = \psi_*^1\zeta^{-\nu} \tag{$\sharp$}$$

なる notation を用いる. 但し, $0 < 1-\nu \ll 1$ であり, $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ は

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq |x| \ll 1, \\ E_1(x) & \text{for } |x| \gg 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

をみたすとする. $\operatorname{supp}\mu_*$ が compact であることを用いると, 次が成り立つ.

Lemma 5.1. u を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解とし, φ^1 を $(\mathrm{L}\,;u)^{\lambda^1[u]}$ の正値解とする. このとき, ($\sharp$) の記号の下で, $z, y^1 \in BC(\mathbf{R}^n)$, $\psi^1 \in L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n)$, $\psi_*^1 \in L^{\hat{q}'}(\mathbf{R}^n)$ が成り立つ. 但し, $0 < \dfrac{1}{\hat{q}} < (p-1)\Big(\dfrac{1}{q} - \dfrac{n-2}{n}\Big)$ である.

そこで,

$$\Psi[u]\phi = \zeta^{-\nu}\cdot E_1 * [g'(u)\zeta^\nu\phi] \quad \text{for } \phi \in L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n) \tag{5.2}$$

とおく. $z \in BC(\mathbf{R}^n)$ であることを用いると, [10, Proposition 4.1] と同様にして次が得

Lemma 5.2. u を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解とすると, $\Psi[u]: L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n) \to L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n)$ は compact 作用素である.

Fredholm の交代定理を用いることにより, 次が成り立つ.

Lemma 5.3. $u\,(\not\equiv 0)$ を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解とする.

(i) $$\operatorname{Ker}(I - \lambda^1[u]\Psi[u]) = [\psi^1], \quad (I - \lambda^1[u]\Psi[u])(L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n)) = [\psi^1_*]^\perp$$

であり, 作用素 $\Phi^1[u] = (I - \lambda^1[u]\Psi[u])|_{[\psi^1_*]^\perp} : [\psi^1_*]^\perp \to [\psi^1_*]^\perp$ は可逆である.
(ii) $\lambda^1[u] > 1$ ならば, 作用素 $I - \Psi[u] : L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n) \to L^{\hat{q}}(\mathbf{R}^n)$ も可逆である.

次に,

$$(5.3) \qquad \begin{cases} Y[u]\xi = \dfrac{1}{\zeta} E_1 * [g'(u)\zeta\xi] & \text{for } \xi \in BC(\mathbf{R}^n), \\ J^1[u]\eta = \dfrac{1}{\zeta^{1-\nu}} \Phi^1[u]^{-1}(\zeta^{1-\nu}\eta) & \text{for } \eta \in \Lambda^1[u], \\ \tilde{J}[u]\xi = \dfrac{1}{\zeta^{1-\nu}} [I - \Psi[u]]^{-1}(\zeta^{1-\nu}\xi) & \text{for } \xi \in BC(\mathbf{R}^n) \quad (\text{ if } \lambda^1[u] > 1) \end{cases}$$

とおく. 但し,

$$(5.4) \qquad \Lambda^1[u] = \left\{ \eta \in BC(\mathbf{R}^n) \,\middle|\, \int_{\mathbf{R}^n} g'(u)\varphi^1\zeta\eta\, dx = 0 \right\}$$

である. Lemma 5.3 によって次が得られる.

Lemma 5.4. $u\,(\not\equiv 0)$ を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解とする.
(i) 作用素 $Y[u] : BC(\mathbf{R}^n) \to BC(\mathbf{R}^n)$ は有界である.

(ii) $$\operatorname{Ker}(I - \lambda^1[u]Y[u]) = [y^1], \quad (I - \lambda^1[u]Y[u])(BC(\mathbf{R}^n)) \subset \Lambda^1[u]$$

であり, $J^1[u]$ は作用素 $(I - \lambda^1[u]Y[u])|_{\Lambda^1[u]} : \Lambda^1[u] \to \Lambda^1[u]$ の右側逆作用素である.
(iii) $\lambda^1[u] > 1$ ならば, $\tilde{J}[u]$ は作用素 $I - Y[u] : BC(\mathbf{R}^n) \to BC(\mathbf{R}^n)$ の右側逆作用素である.

上の Lemma を用いることによって Step 2 が得られるが, これについては次節で述べる. いま, Proposition 3.1 を証明する.

Proof of Proposition 3.1. (i) $\overline{u}$ も $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解ならば, $\xi = \dfrac{\overline{u} - u}{\zeta}$ は $BC(\mathbf{R}^n)$ に属し, g の凸性から

$$(I - Y[u])\xi = \frac{1}{\zeta} E_1 * [g(\overline{u}) - g(u) - g'(u)(\overline{u} - u)] \geq 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n$$

が成り立つ. 一方, Lemma 5.4 (ii) より $(I - Y[u])\xi \in \Lambda^1[u]$ であることから, $\overline{u} \equiv u$ on $\mathbf{R}^n$ が従う.

(ii) ある $\overline{\kappa} > \kappa$ に対して $(\mathrm{P}_\tau)_{\overline{\kappa}}$ が解 $\overline{u}$ をもつと仮定する $(\tau \neq 0)$. $\overline{w} = \overline{u} - u^{\overline{k}}_{\tau,\overline{\kappa}}$ とおくと, Remark 4.2 によって $\widetilde{u} = u^{\overline{k}}_{\tau,\kappa} + \overline{w}$ は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の優解であるから, Lemma 4.2 及び (i) により, $u \le \widetilde{u}$, $w \le \overline{w}$ on $\mathbf{R}^n$ が成り立つ. このとき, $\xi = \dfrac{\overline{u} - u}{\zeta} (\in BC(\mathbf{R}^n))$ とおくと, (4.4) 及び g の凸性を用いることにより,

$$(I - Y[u])\xi \ge \frac{1}{\zeta} E_1 * [g'(u)(\phi^{\overline{k}}_{\tau,\overline{\kappa}} - \phi^{\overline{k}}_{\tau,\kappa})] > 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n$$

が得られる. これは $(I - Y[u])\xi \in \Lambda^1[u]$ に矛盾する. q.e.d.

6. Openness of T.

Step 2 を証明するためには, $(\mathrm{Q}_{\overline{\tau}})$ の解 $(\overline{u}, \overline{\varphi}; \overline{\kappa})$ が存在するときに, $|\tau - \overline{\tau}| \ll 1$ なる τ に対して (Q_τ) の解 $(u, \varphi; \kappa)$ を構成すればよい. このために,

$$(\overline{\sharp}) \qquad \overline{u} - u^{\overline{k}}_{\overline{\tau},\overline{\kappa}} = \overline{w} = \overline{z}\zeta, \quad \overline{\varphi} = \overline{y}\zeta$$

及び ($\sharp$) の記号の下で, small parameter ε を導入し, 次の形で解を構成する:
(i) $\overline{\tau} = 0$ のとき,

$$(z, y^1; \kappa, \tau) = (\varepsilon(\overline{y} + \varepsilon\xi), \overline{y} + \varepsilon\eta; \overline{\kappa} - \varepsilon\rho, \varepsilon^2\mu) \quad \text{with } (\xi, \eta; \rho, \mu) \in \Lambda^1[\overline{u}]^2 \times (0,\infty)^2.$$

(ii) $\overline{\tau} \in T \setminus \{0\}$ のとき,

$$\begin{cases} (z, y^1; \kappa, \tau) = (\overline{z} + \varepsilon(\xi - \mu\overline{y}), \overline{y} + \varepsilon\eta; \overline{\kappa} - \varepsilon\rho, \overline{\tau} + \varepsilon) \\ \qquad\qquad \text{with } (\xi, \eta; \rho, \mu) \in \Lambda^1[\overline{u}]^2 \times ((0,\infty) \times \mathbf{R}). \end{cases}$$

Lemma 5.4 (ii) を用いることにより, 次が成り立つ. 実際には, いくつかの段階に分けて縮小写像の原理を適用して解を構成するが, ここでは詳しい証明については述べない.

Lemma 6.1. ($\overline{\tau} = 0$ のとき) $(\overline{u}, \overline{\varphi}; \overline{\kappa}) = (\kappa_0\phi_*, \varphi_0; \kappa_0)$ を Step 1 によって得られた (Q_0) の解とすると, 以下をみたす定数 $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{M} > 0$ が存在する:
任意の $\varepsilon \in [0, \widetilde{\varepsilon}]$ に対して $(\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon; \rho^\varepsilon, \mu^\varepsilon) \in \Lambda^1[\overline{u}]^2 \times (0,\infty)^2$ が存在し, $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon; \kappa^\varepsilon)$ は $(\mathrm{Q}_{\tau^\varepsilon})$ の解であって,

$$\text{(6.1)} \qquad \|\xi^\varepsilon - \xi^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + \|\eta^\varepsilon - \eta^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + |\rho^\varepsilon - \rho^{\overline{\varepsilon}}| + |\mu^\varepsilon - \mu^{\overline{\varepsilon}}| \le \widetilde{M}|\varepsilon - \overline{\varepsilon}| \quad \text{for } \varepsilon, \overline{\varepsilon} \in [0, \widetilde{\varepsilon}]$$

が成り立つ. 但し,

$$\text{(6.2)} \qquad \begin{cases} (z^\varepsilon, y^\varepsilon; \kappa^\varepsilon, \tau^\varepsilon) = (\varepsilon(\overline{y} + \varepsilon\xi^\varepsilon), \overline{y} + \varepsilon\eta^\varepsilon; \overline{\kappa} - \varepsilon\rho^\varepsilon, \varepsilon^2\mu^\varepsilon), \\ u^\varepsilon - u^{\overline{k}}_{\tau^\varepsilon,\kappa^\varepsilon} = w^\varepsilon = z^\varepsilon\zeta, \quad \varphi^\varepsilon = y^\varepsilon\zeta \quad \text{for } \varepsilon \in [0, \widetilde{\varepsilon}] \end{cases}$$

である.

Lemma 6.2. ($\overline{\tau} \in T \setminus \{0\}$ のとき) $\overline{\tau} \in T \setminus \{0\}$ とし, $(\overline{u}, \overline{\varphi}; \overline{\kappa})$ を $(\mathrm{Q}_{\overline{\tau}})$ の解とすると, 以下をみたす定数 $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{M} > 0$ が存在する:

任意の $\varepsilon \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}]$ に対して $(\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon; \rho^\varepsilon, \mu^\varepsilon) \in \Lambda^1[\overline{u}]^2 \times ((0,\infty)\times\mathbf{R})$ が存在し，$(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon; \kappa^\varepsilon)$ は $(\mathrm{Q}_{\tau^\varepsilon})$ の解であって，

$$\|\xi^\varepsilon - \xi^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + \|\eta^\varepsilon - \eta^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + |\rho^\varepsilon - \rho^{\overline{\varepsilon}}| + |\mu^\varepsilon - \mu^{\overline{\varepsilon}}| \le \widetilde{M}|\varepsilon - \overline{\varepsilon}| \quad \text{for } \varepsilon, \overline{\varepsilon} \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}] \tag{6.3}$$

が成り立つ. 但し，

$$\begin{cases} (z^\varepsilon, y^\varepsilon; \kappa^\varepsilon, \tau^\varepsilon) = (\overline{z} + \varepsilon(\xi^\varepsilon - \mu^\varepsilon \overline{y}), \overline{y} + \varepsilon\eta^\varepsilon; \overline{\kappa} - \varepsilon\rho^\varepsilon, \overline{\tau} + \varepsilon), \\ u^\varepsilon - u^{\overline{k}}_{\tau^\varepsilon, \kappa^\varepsilon} = w^\varepsilon = z^\varepsilon \zeta, \quad \varphi^\varepsilon = y^\varepsilon \zeta \quad \text{for } \varepsilon \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}] \end{cases} \tag{6.4}$$

である.

以上によって Step 2 が成り立つ.

次に，$\overline{\tau} \in (0,1]$, $\overline{\kappa} > 0$ とし，$\overline{u}$ を $(\mathrm{P}_{\overline{\tau}})_{\overline{\kappa}}$ の狭義最小解，$\overline{\varphi}$ を $(\mathrm{L}; \overline{u})^{\overline{\lambda}}$ ($\overline{\lambda} = \lambda^1[\overline{u}]$) の正値解とする. このとき, 次の形で κ-方向及び τ-方向への解の接続が可能である:

(i) κ-方向について，

$$(z, y^1; \kappa, \lambda^1) = (\overline{z} + \varepsilon\xi, \overline{y} + \varepsilon\eta; \overline{\kappa} + \varepsilon, \overline{\lambda} - \varepsilon\mu) \quad \text{with } (\xi, \eta; \mu) \in (BC(\mathbf{R}^n) \times \Lambda^1[\overline{u}]) \times \mathbf{R}.$$

(ii) τ-方向について，

$$(z, y^1; \tau, \lambda^1) = (\overline{z} + \varepsilon\xi, \overline{y} + \varepsilon\eta; \overline{\tau} + \varepsilon, \overline{\lambda} - \varepsilon\mu) \quad \text{with } (\xi, \eta; \mu) \in (BC(\mathbf{R}^n) \times \Lambda^1[\overline{u}]) \times \mathbf{R}.$$

Lemma 5.2 (ii), (iii) を用いることにより, 次が成り立つ.

Lemma 6.3. $\overline{\tau} \in (0,1]$, $\overline{\kappa} > 0$ とし，$\overline{u}$ を $(\mathrm{P}_{\overline{\tau}})_{\overline{\kappa}}$ の狭義最小解, $\overline{\varphi}$ を $(\mathrm{L}; \overline{u})^{\overline{\lambda}}$ ($\overline{\lambda} = \lambda^1[\overline{u}]$) の正値解とすると, 以下をみたす定数 $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{M} > 0$ が存在する:
任意の $\varepsilon \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}]$ に対して $(\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon; \mu^\varepsilon) \in (BC(\mathbf{R}^n) \times \Lambda^1[\overline{u}]) \times \mathbf{R}$ が存在し，u^ε は $(\mathrm{P}_{\overline{\tau}})_{\kappa^\varepsilon}$ の狭義最小解, φ^ε は $(\mathrm{L}; u^\varepsilon)^{\lambda^\varepsilon}$ の正値解であって，

$$\|\xi^\varepsilon - \xi^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + \|\eta^\varepsilon - \eta^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + |\mu^\varepsilon - \mu^{\overline{\varepsilon}}| \le \widetilde{M}|\varepsilon - \overline{\varepsilon}| \quad \text{for } \varepsilon, \overline{\varepsilon} \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}] \tag{6.5}$$

が成り立つ. 但し，

$$\begin{cases} (z^\varepsilon, y^\varepsilon; \kappa^\varepsilon, \lambda^\varepsilon) = (\overline{z} + \varepsilon\xi^\varepsilon, \overline{y} + \varepsilon\eta^\varepsilon; \overline{\kappa} + \varepsilon, \overline{\lambda} - \varepsilon\mu^\varepsilon), \\ u^\varepsilon - u^{\overline{k}}_{\overline{\tau}, \kappa^\varepsilon} = w^\varepsilon = z^\varepsilon \zeta, \quad \varphi^\varepsilon = y^\varepsilon \zeta \quad \text{for } \varepsilon \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}] \end{cases} \tag{6.6}$$

である.

Lemma 6.4. $\overline{\tau} \in (0,1]$, $\overline{\kappa} > 0$ とし，$\overline{u}$ を $(\mathrm{P}_{\overline{\tau}})_{\overline{\kappa}}$ の狭義最小解, $\overline{\varphi}$ を $(\mathrm{L}; \overline{u})^{\overline{\lambda}}$ ($\overline{\lambda} = \lambda^1[\overline{u}]$) の正値解とすると, 以下をみたす定数 $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{M} > 0$ が存在する:
任意の $\varepsilon \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}]$ に対して $(\xi^\varepsilon, \eta^\varepsilon; \mu^\varepsilon) \in (BC(\mathbf{R}^n) \times \Lambda^1[\overline{u}]) \times \mathbf{R}$ が存在し，u^ε は $(\mathrm{P}_{\tau^\varepsilon})_{\overline{\kappa}}$ の狭義最小解, φ^ε は $(\mathrm{L}; u^\varepsilon)^{\lambda^\varepsilon}$ の正値解であって，

$$\|\xi^\varepsilon - \xi^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + \|\eta^\varepsilon - \eta^{\overline{\varepsilon}}\|_\infty + |\mu^\varepsilon - \mu^{\overline{\varepsilon}}| \le \widetilde{M}|\varepsilon - \overline{\varepsilon}| \quad \text{for } \varepsilon, \overline{\varepsilon} \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}] \tag{6.7}$$

が成り立つ. 但し，

$$\begin{cases} (z^\varepsilon, y^\varepsilon; \tau^\varepsilon, \lambda^\varepsilon) = (\overline{z} + \varepsilon\xi^\varepsilon, \overline{y} + \varepsilon\eta^\varepsilon; \overline{\tau} + \varepsilon, \overline{\lambda} - \varepsilon\mu^\varepsilon), \\ u^\varepsilon - u^{\overline{k}}_{\tau^\varepsilon, \overline{\kappa}} = w^\varepsilon = z^\varepsilon \zeta, \quad \varphi^\varepsilon = y^\varepsilon \zeta \quad \text{for } \varepsilon \in [-\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\varepsilon}] \end{cases} \tag{6.8}$$

Remark 6.1. $\overline{\kappa}=0$, $\overline{u}\equiv 0$ on $\mathbf{R}^n$ のときにも, その近傍に $(\mathrm{P}_{\overline{\tau}})_\kappa$ $(0<\kappa\ll 1)$ の狭義最小解を構成することができる.

7. Plane reflection method.

Step 3 を証明するためには何らかの a priori 評価が必要である. この問題の場合, 次の節でみるように, w に対する空間一様な a priori 評価が得られる. しかしながら, それだけでは解の無限遠における挙動を制御することができない. この部分を補うため, plane reflection method を用いた議論を行う. ここでは, $\mathrm{supp}\,\mu_*$ が compact であることをある意味で本質的に用いる. 以下, u を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の最小解とし, (♯) の記号を用いる.

Definition 7.1. $\omega\in S^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x|=1\}$, $a\in\mathbf{R}$ とする.

(i) $\quad H^{\omega,a}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid x\cdot\omega<a\},\ \ x^{\omega,a}=x+2(a-x\cdot\omega)\omega\quad$ for $x\in\mathbf{R}^n$.

(ii) $\mathbf{R}^n$ 上の函数 v が条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたすとは,

$$v(x)\geq v(x^{\omega,a})\quad \text{for a.e. } x\in H^{\omega,a}$$

となることである.

Remark 7.1. (i) 点 $x^{\omega,a}$ は超平面 $\partial H^{\omega,a}$ に関する点 x の対称点 (折り返しの点) である. 従って, 条件 $(*)^{\omega,a}$ は函数 v の超平面 $\partial H^{\omega,a}$ に関する折り返しについて, 各点で大小関係が成り立つことを意味している.
(ii) $\mathrm{supp}\,\mu_*\subset B_{R_*}$ ならば, ϕ_* は任意の $\omega\in S^{n-1}$, $a\geq R_*$ に対して条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす. ここで, $B_r=\{x\in\mathbf{R}^n \mid |x|<r\}$ for $r>0$ である.

次がここでの議論における key point である.

Lemma 7.1. $\omega\in S^{n-1}$, $a\in\mathbf{R}$ とし, ϕ_* は条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたすとすると, 次が成り立つ:
(i) $\tau\in[0,1]$, $\kappa\geq 0$ に対し, $\phi^k_{\tau,\kappa}$ $(k\geq 1)$ は条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす.
(ii) u が $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の最小解ならば, w も条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす.

Proof. (i) $k=0$ のときは明らかである. いま $k\geq 0$ とし, $\phi^0_{\tau,\kappa},\phi^1_{\tau,\kappa},\ldots,\phi^k_{\tau,\kappa}$ が条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたすとすると, g の凸性により $g^k_{\tau,\kappa}$ も条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす. このとき,

$$(7.1)\qquad \begin{cases} |x-y^{\omega,a}|=|x^{\omega,a}-y|,\ |x-y|=|x^{\omega,a}-y^{\omega,a}| & \text{for } x,y\in\mathbf{R}^n,\\ |x-y|\leq|x^{\omega,a}-y| & \text{for } x,y\in H^{\omega,a}\end{cases}$$

に注意し, (1.9) 及び変数変換 $\eta=y^{\omega,a}$ $(y\in\mathbf{R}^n\setminus H^{\omega,a})$ を用いると,

$$\begin{aligned}
&\phi^{k+1}_{\tau,\kappa}(x)-\phi^{k+1}_{\tau,\kappa}(x^{\omega,a})\\
&=\int_{H^{\omega,a}}(E_1(x-y)-E_1(x^{\omega,a}-y))g^k_{\tau,\kappa}(y)dy\\
&\quad-\int_{\mathbf{R}^n\setminus H^{\omega,a}}(E_1(x-y^{\omega,a})-E_1(x^{\omega,a}-y^{\omega,a}))g^k_{\tau,\kappa}(y)dy\\
&=\int_{H^{\omega,a}}(E_1(x-\eta)-E_1(x^{\omega,a}-\eta))(g^k_{\tau,\kappa}(\eta)-g^k_{\tau,\kappa}(\eta^{\omega,a}))d\eta\geq 0\quad \text{for a.e. } x\in H^{\omega,a}
\end{aligned}$$

が得られる. 従って, $\phi_{\tau,\kappa}^{k+1}$ も条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす.

(ii) Lemma 4.2 より明らかである. q.e.d.

更に, 次が成り立つ.

Lemma 7.2. $\mathbf{R}^n$ 上の函数 v が任意の $\omega \in S^{n-1}$, $a \geq R_*$ に対して条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたすとすると, 次が成り立つ:

(i) $v(x) \geq v(x + t\omega)$ if $x \in \mathbf{R}^n \setminus H^{\omega,R_*}$, $\omega \in S^{n-1}$, $t > 0$.

(ii) $v(x) \geq v(y)$ if $|y| \geq 4|x| + 3(2+\sqrt{2})R_*$, $|x| \geq \sqrt{2}R_*$.

(iii) $\gamma = \lim_{r\to\infty} S[v](r) = \lim_{|x|\to\infty} v(x) \in [-\infty, \infty)$ が存在し, $v \geq \gamma$ on $\mathbf{R}^n$ が成り立つ. 但し,

$$S[v](r) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} v(r\omega)d\sigma(\omega) \quad \text{for } r > 0 \tag{7.2}$$

($d\sigma$ は S^{n-1} 上の面積要素) である.

Proof. (i) 定義より明らかである.

(ii) $\omega \in S^{n-1}$, $r \geq \sqrt{2}R_*$ を任意に固定する. $\omega{\cdot}\varpi = 0$ なる任意の $\varpi \in S^{n-1}$ に対して, (i) を用いることにより

$$v(r\omega) \geq v(\alpha\omega + \beta\varpi) \quad \text{for } (\alpha,\beta) \in K(r\,;R_*) \tag{7.3}$$

が成り立つ. 但し,

$$\begin{cases} K(r\,;R) = \bigcup_{j=1}^{5}\left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbf{R}\times[0,\infty) \;\middle|\; \left(\sin\frac{j\pi}{4}\right)\alpha - \left(\cos\frac{j\pi}{4}\right)\beta \geq l_j(r\,;R)\right\}, \\ l_1(r\,;R) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}r, \quad l_2(r\,;R) = r + R, \quad l_3(r\,;R) = \sqrt{2}\,r + (1+\sqrt{2})R, \\ l_4(r\,;R) = 2r + (3+\sqrt{2})R, \quad l_5(r\,;R) = 2\sqrt{2}\,r + 3(1+\sqrt{2})R \end{cases} \tag{7.4}$$

である. このとき,

$$\mathbf{R}^n \setminus B_{4r+3(2+\sqrt{2})R_*} \subset \bigcup_{\substack{\varpi\in S^{n-1} \\ \omega\cdot\varpi=0}} \{\alpha\omega + \beta\varpi \in \mathbf{R}^n \mid (\alpha,\beta) \in K(r\,;R_*)\} \tag{7.5}$$

であるから, (7.3) と合わせて (ii) の主張が成り立つ.

(iii) (i) より v は $\mathbf{R}^n \setminus B_{R_*}$ において動径方向に関して非増大であるから, $S[v]$ は $[R_*, \infty)$ において非増大である. よって $\gamma = \lim_{r\to\infty} S[v](r)$ が存在し, $S[v] \geq \gamma$ on $[R_*, \infty)$ が成り立つ. (ii) より $v \geq \gamma$ on $\mathbf{R}^n$ が得られ, $\lim_{|x|\to\infty} v(x) = \gamma$ が従う. q.e.d.

8. Closedness of T.

この節では T が閉集合であることを示す. Proposition 3.1 及び Step 1 により, $\tau \in T$ に対して (Q_τ) の解は φ^1 の定数倍を除いて一意的である. そこで, $\tau \in T$ に対して (Q_τ) の解を $(u_\tau, \varphi_\tau\,; \kappa_\tau)$ と表し,

$$u_\tau - u_{\tau,\kappa_\tau}^{\bar{k}} = w_\tau = z_\tau\zeta, \quad \varphi_\tau = y_\tau\zeta \tag{$\sharp$)$_\tau$}$$

なる記号を用いることにする. まず, (Q_τ) の解 $(u_\tau, \varphi_\tau; \kappa_\tau)$ に対する a priori 評価を導く. Proposition 3.1 の証明と同様にして, $\{\kappa_\tau\}_{\tau\in T}$ に対する a priori 評価が得られる.

Lemma 8.1. $\tau, \overline{\tau} \in T$, $\tau < \overline{\tau}$ ならば, $\kappa_\tau > \kappa_{\overline{\tau}}$ である. 特に, 次が成り立つ:

$$0 < \kappa_\tau \le \kappa_0 \quad \text{for } \tau \in T. \tag{8.1}$$

次に, $\{u_\tau\}_{\tau\in T}$ に対する a priori 評価を得るために, $\nu_{\overline{k}} < 1$ となるような $\nu \in (0,1)$ をとる. 但し, $\nu_k = \nu(1+(p-1)k)$ $(k \ge 0)$ である. いま, $h \in \mathbf{R}^n$ を任意にとり, u_τ の方程式の両辺に $\zeta(\cdot - h)^\nu$ をかけて $\mathbf{R}^n$ 上積分すると, 部分積分, Jensen の不等式, Young の不等式及び (8.1) を用いることによって次が得られる.

Lemma 8.2. ある定数 $\overline{M} > 0$ が存在して次が成り立つ:

$$\|g(u_\tau)\zeta(\cdot - h)^\nu\|_1 \le \overline{M} \quad \text{for all } \tau \in T,\ h \in \mathbf{R}^n. \tag{8.2}$$

評価式 (8.2) により, (4.3) に注意して boot-strap argument を用いると, 次が得られる.

Lemma 8.3. (i) ある定数 $\overline{M_k} > 0$ が存在して次が成り立つ $(0 \le k \le \overline{k}-1)$:

$$\|(u_\tau - u^k_{\tau,\kappa_\tau})\zeta(\cdot - h)^{\nu_k}\|_{q_k} \le \overline{M_k} \quad \text{for all } \tau \in T,\ h \in \mathbf{R}^n. \tag{8.3}$$

(ii) ある定数 $\overline{M_{\overline{k}}} > 0$ が存在して次が成り立つ:

$$\|w_\tau \zeta(\cdot - h)^{\nu_{\overline{k}}}\|_{C^{\overline{\alpha}_1}(\mathbf{R}^n)} \le \overline{M_{\overline{k}}} \quad \text{for all } \tau \in T,\ h \in \mathbf{R}^n. \tag{8.4}$$

これにより, $\{w_\tau\}_{\tau\in T}$ が $\mathbf{R}^n$ 上一様有界かつ同等連続であることが従う. 以下, $\mathrm{supp}\,\mu_* \subset B_{R_*}$ と仮定して T が閉集合であることを示す. Proposition 3.1 によって $(\mathrm{P}_\tau)_{\kappa_\tau}$ の解は一意的であるから, u_τ は $(\mathrm{P}_\tau)_{\kappa_\tau}$ の最小解となることに注意する.

Proof of Step 3. $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty \subset T$, $\tau_i \to \tau$ as $i \to \infty$ と仮定して $\tau \in T$ を導く. Step 1 によって $\tau \in (0,1]$ としてよい. $i \in \mathbf{N}$ に対して u_{τ_i} は $\lambda^1[u_{\tau_i}] = 1$ をみたす $(\mathrm{P}_{\tau_i})_{\kappa_{\tau_i}}$ の最小解であるから, (1.11) 及び Lemma 7.1 (ii) によって次が成り立つ:

(a)$_i$ $\quad w_{\tau_i} = E_1 * [g(u_{\tau_i}) - g(u^{\overline{k}-1}_{\tau_i,\kappa_{\tau_i}})] \ge 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n.$

(b)$_i$ $\quad \|g'(u_{\tau_i})\phi^2\|_1 \le \|\nabla\phi\|_2^2 + \|\phi\|_2^2 \quad \text{for all } \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n).$

(c)$_i$ $\quad w_{\tau_i}$ は任意の $\omega \in S^{n-1}$, $a \ge R_*$ に対して条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす.

(8.4) によって $\{w_{\tau_i}\}_{i=1}^\infty$ は $\mathbf{R}^n$ 上一様有界かつ同等連続であるから, これに対して Ascoli–Arzelà の定理を適用する. Lemma 8.1 と合わせると, 部分列をとることにより

$$\kappa_{\tau_i} \to \kappa\ (\ge 0),\quad w_{\tau_i} \to w\ (\in BC(\mathbf{R}^n)) \quad \text{locally uniformly on } \mathbf{R}^n \quad \text{as } i \to \infty \tag{8.5}$$

が成り立つとしてよい. (a)$_i$, (b)$_i$, (c)$_i$ において $i \to \infty$ とすると, Lebesgue の収束定理等を用いることによって次が成り立つ:

(a) $w = E_1 * [g(u) - g(u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}-1})] \geq 0 \quad \text{on } \mathbf{R}^n.$

(b) $\|g'(u)\phi^2\|_1 \leq \|\nabla\phi\|_2^2 + \|\phi\|_2^2 \quad \text{for all } \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n).$

(c) w は任意の $\omega \in S^{n-1}$, $a \geq R_*$ に対して条件 $(*)^{\omega,a}$ をみたす.

但し, $u = w + u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}}$ である.

(i) (c) 及び Lemma 7.2 により, $\gamma = \lim_{r\to\infty} S[w](r) = \lim_{|x|\to\infty} w(x)$ が存在し, $w \geq \gamma$ on $\mathbf{R}^n$ が成り立つ. このとき,

$$S[w](r) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} E_1 * [g(u) - g(u_{\tau,\kappa}^{\overline{k}-1})](r\omega)d\sigma(\omega) \to g(\gamma) = \gamma^p \quad \text{as } r \to \infty$$

であるから, $\gamma = 0$ または $\gamma = 1$ である. もし $\gamma = 1$ ならば, $g'(u) \geq g'(w) \geq g'(\gamma) = p$ on $\mathbf{R}^n$ であるから, (b) より

$$(p-1)\|\phi\|_2^2 \leq \|g'(u)\phi^2\|_1 - \|\phi\|_2^2 \leq \|\nabla\phi\|_2^2 \quad \text{for } \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)$$

が得られる. これは, $\mathbf{R}^n$ 上で Poincaré の不等式が成り立つことを意味するから, 矛盾である. よって $\gamma = 0$ であり, u は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の解である.

(ii) (b) より $\lambda^1[u] \geq 1$ (または $u \equiv 0$) である. もし $\lambda^1[u] > 1$ (または $u \equiv 0$) ならば, u は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の狭義最小解であるから, Lemma 5.5 (i) (及び Remark 6.1) によって, ある $\overline{\kappa} > \kappa$ に対して $(\mathrm{P}_\tau)_{\overline{\kappa}}$ は狭義最小解をもつ. このとき Lemma 5.5 (ii) により, $\overline{\varepsilon} > 0$ が存在して $|\varepsilon| \leq \overline{\varepsilon}$ に対して $(\mathrm{P}_{\tau+\varepsilon})_{\overline{\kappa}}$ は狭義最小解をもつ. 従って, i が十分大きければ, $\kappa_{\tau_i} < \overline{\kappa}$ かつ $|\tau_i - \tau| \leq \overline{\varepsilon}$ となるから $(\mathrm{P}_{\tau_i})_{\overline{\kappa}}$ は解をもち, Proposition 3.1 (ii) に矛盾する. よって $\lambda^1[u] = 1$ であり, $\tau \in T$ が成り立つ. q.e.d.

9. Existence of nonminimal solutions.

最後に, $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の狭義最小解 u が存在するとき, もう1つの解 $\overline{u}$ の存在について述べる. このために, $\overline{u} = u + v$ ($v > 0$ on $\mathbf{R}^n$) の形で解をみつけることを考える. このとき, v のみたすべき方程式は

$$-\Delta v + v = g(u+v) - g(u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \tag{9.1}$$

であるから, 解の正値性を考慮すると, この問題は汎函数

$$I[u](v) = \frac{1}{2}(\|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_2^2) - \|G(u+v_+) - G(u) - g(u)v_+\|_1 \quad \text{for } v \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \tag{9.2}$$

の非自明な臨界点を求めるという問題に帰着されることが分かる. 但し,

$$G(s) = \int_0^s g(t)dt = \frac{1}{p+1}s_+^{p+1} \quad \text{for } s \in \mathbf{R} \tag{9.3}$$

である. このとき, $I[0]$ はいわゆる '無限遠における問題' に対応する汎函数である. いま, $\lambda^1[u] > 1$ 及び

$$G(t) < G(t+s) - G(s) - g(s)t \quad \text{for } t \geq 0,\ s > 0 \tag{9.4}$$

に注意すると, 次が成り立つ.

Lemma 9.1. $u\,(\not\equiv 0)$ を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の狭義最小解とすると, 次が成り立つ:
(i) 汎函数 $I[u] : W^{1,2}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ は C^1 級であり, その導函数は

$$(9.5)\quad <I[u]'(v), \phi> = \int_{\mathbf{R}^n} (\nabla v \cdot \nabla \phi + v\phi - (g(u+v_+) - g(u))\phi)dx \quad \text{for } v, \phi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)$$

で与えられる.
(ii) $v \equiv 0$ は $I[u]$ の極小点である.
(iii) $I[u](\tilde{v}) \le I[0](\tilde{v}) < 0$ をみたす $\tilde{v} \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ が存在する.

更に,

$$(9.6)\qquad \begin{cases} c[u] = \inf\limits_{P \in \mathcal{P}} \max\limits_{t \in [0,1]} I[u](P(t)), \\ \mathcal{P} = \{\, P \in C([0,1]; W^{1,2}(\mathbf{R}^n)) \mid P(0) = 0,\, P(1) = \tilde{v} \,\} \end{cases}$$

とおくと, (9.4) を用いることにより, [12, Chapter 8] と同様にして次が得られる.

Lemma 9.2. $u\,(\not\equiv 0)$ を $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の狭義最小解とすると, 次が成り立つ:

(i) $$0 < c[u] < c[0].$$

(ii) $I[u]$ は $c[u]$ における Palais–Smale 条件 $(\mathrm{PS})_{c[u]}$ をみたす. i.e., $I[u]'(v_j) \to 0$ (in $W^{-1,2}(\mathbf{R}^n)$), $I[u](v_j) \to c[u]$ (in $\mathbf{R}$) as $j \to \infty$ をみたす列 $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset W^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ は ($W^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ において) 収束する部分列を含む.

上の 2 つの Lemma により, 汎函数 $I[u]$ に対して mountain pass theorem を適用することができ, $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ のもう 1 つの解が得られる.

参考文献

[1] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[2] B. Gidas, W.-M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbf{R}^n$, Advances in Math. Studies **7A** (1981) 369–402.

[3] D. Gilberg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[4] R. A. Johnson, X. Pan and Y. Yi, *Singular solutions of the elliptic equation* $\Delta u - u + u^p = 0$, Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4 **166** (1994), 203–225.

[5] J. P. Keener and H. B. Keller, *Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems*, J. Differential Equations **16** (1974) 103–125.

[6] P. L. Lions, *Isolated singularities in semilinear problems*, J. Differential Equations **38** (1980) 441–450.

[7] W. Magnus, F. Oberhettinger and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[8] W.-M. Ni and J. Serrin, *Nonexistence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) 379–399.

[9] T. Sato, *Positive solutions with weak isolated singularities to some semilinear elliptic equations*, Tôhoku Math. J. **47** (1995) 55–80.

[10] T. Sato, *On the structure of the solution space of singular ground states*, (preprint).

[11] L. Véron, *Singularities of Solutions of Second Order Quasilinear Equations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **353**, Longman, London, 1996.

[12] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **24**, Birkhäuser, Boston, 1996.