数理解析研究所講究録 1205 巻 2001 年 166-171

有界経路重なり項書換え系の停止性問題について
Termination of Finite Path Overlapping Term Rewriting System

阿部 武徳 高井 利憲 楫 勇一 関 浩之
Takenori Abe Toshinori Takai Yuichi Kaji Hiroyuki Seki

奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
Graduate School of Imformation Science
Nara Institute of Science and technology

概 要

停止性が決定可能となる項書換え系の部分クラス，準直交線形逆有界経路重なり項書換え系を提案する．右線形有界経路重なり項書換え系は，項の集合の正則性を利用して定義される構成的正則保存項書換え系の決定可能な部分クラスとして提案されていた．また，項の集合の正則性を利用して，準直交成長的項書換え系の停止性が決定可能になることが示されていた．そこで，本稿では準直交線形逆有界経路重なり項書換え系を提案し，そのクラスに含まれる項書換え系の停止性問題が決定可能となることを示す．このクラスは，逆右線形有界経路重なり項書換え系の部分クラスであり，準直交成長的項書換え系には含まれないいくつかの項書換え系を含むクラスである．特に，このクラスは，線形な準直交成長的項書換え系のクラスを真に含む．

1 はじめに

項書換え系 (term rewriting system, TRS) とは，項の書換えにより計算の過程を表す計算モデルであり，定理自動証明や関数型言語などの計算機分野で幅広く応用されている．項書換え系の重要な性質として，停止性や合流性が挙げられる．項書換え系が停止性を持つとは，無限の書換え系列を持たないときをいう．このことは，項書換え系をプログラムとしてみたとき，任意の入力に対し必ず出力を返すことを保証する．しかしながら，与えられた項書換え系が停止性を持つか否かは，一般には決定不能であることが示されている [6]．そのため，項書換え系が停止性を持つための十分条件についての研究が行われている．項書換え系の停止性を示す方法として，項に順序をつけて証明する方法がいくつか提案されていた．しかし，これらの方法で停止性を示すことのできる項書換え系は限られている．一方，停止性が決定可能になるような項書換え系の部分クラスとして，基礎書換え系 [6] や右基礎書換え系 [3]，右線形単項的書換え系 [8] などが提案されている．さらに，項の集合の正則性を利用して，準直交成長的項書換え系 (AO-GR-TRS) [7] の停止性が決定可能になることが示されている．

ここで，項の集合 L が正則であるとは，L を受理する木オートマトンが存在することと定義される．そのような項の集合を正則木言語とも呼ぶ．正則木言語は，形式言語における正則言語と同様に，空集合問題が決定可能である，ブール演算 (和集合，共通集合，差集合) について閉じているといった良い性質を持つ．正則木言語によって定義される項書換え系のクラスとして，構成的正則保存項書換え系がある．ある項書換え系 R が正則保存であるとは，任意の正則木言語 L について $(\xrightarrow{*}_R)(L) = \{t \mid \exists s \in L, s \xrightarrow{*}_R t\}$ も正則木言語であるときを言う．

本稿ではまず，項書換え系の新しいクラスとして，準直交線形逆有界経路重なり項書換え系 (almost orthogonal linear inverse finite path overlapping term rewriting system, AO-L-FPO-TRS^{-1}) を提案する．次に，項の集合の正則性を利用して，AO-

L-FPO-TRS^{-1} に含まれる項書換え系の停止性が決定可能になることを示す．AO-L-FPO-TRS^{-1} は，AO-GR-TRS には含まれないいくつかの項書換え系を含むクラスである．

本稿の構成は以下の通りである．2節では，本稿で必要となる定義を与える．3節では，AO-L-FPO-TRS^{-1} を定義し，AO-L-FPO-TRS^{-1} の停止性が決定可能であることを示す．

2 準備

2.1 項書換え系

ここでは，項書換え系に関する基本的な概念と表記法を定義する．詳しくは，[2] などを参照されたい．$F = \{f, g, h, ...\}$ を関数記号の有限集合，$X = \{x, y, z, ...\}$ を変数の集合とする．ここで，各関数記号 $f \in F$ の引数の数を $a(f)$ と表す．特に，$a(f) = 0$ となる f を定数と呼ぶ．F と X により生成される項の集合を $T(F, X)$ で表す．変数を含まない項を基礎項，同じ変数が高々1回しか出現しない項を線形な項と呼ぶ．また，F により生成される基礎項全体の集合を $T(F)$ で表す．

項の出現位置を，正整数の系列で表す．項 t の出現位置の集合を $O(t)$ で表し，根の出現位置を λ で表す．項 t の出現位置 o の部分項を t/o と表す．出現位置 o_1 が o_2 の接頭語であるとき，$o_1 \preceq o_2$ と書く．$o_1 \preceq o_2$ かつ $o_1 \neq o_2$ の時，$o_1 \prec o_2$ と書く．出現位置 o_1 と o_2 が互いに素であるとは，$o_1 \preceq o_2$ でも $o_2 \preceq o_1$ でもない時を言う．項 t の出現位置 $o_1, ..., o_n$ の部分項を，それぞれ項 $s_1, ..., s_n$ で置き換えて得られる項を t' とする時，$t' = t[s_1]_{o_1} \cdots [s_n]_{o_n}$ と書く．代入 σ は X から $T(F, X)$ への写像で，$\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$ と書く．代入 σ は $T(F, X)$ から $T(F, X)$ への写像に拡張することができ，項 s に代入 σ を行って得られる項を $s\sigma$ と書く．項 s, t に対して，$s\sigma = t\sigma$ となる代入 σ が存在する時，s と t は単一化可能であるという．このとき σ を単一化代入と呼ぶ．また，s と t の任意の単一化代入 σ に対して，$\sigma = \sigma' \circ \rho$ となる代入 ρ が存在するような単一化代入 σ' を最汎単一化代入と呼ぶ．ただし，$\sigma' \circ \rho$ は σ' の余域の各項に代入 ρ を行った結果得られる代入を表す．

書換え規則とは，項の順序対 $l \to r$ であり，項書換え系 (TRS) とは書換え規則の有限集合である．すべての書換え規則の両 (左, 右) 辺が線形な項書換え系を，線形 (左線形, 右線形) 書換え系という．項書換え系 R に対し，R の逆を R^{-1} と書き，$R^{-1}\colon = \{r \to l \mid l \to r \in R\}$ と定義する．項書換え系のクラス C に対し，C の逆クラスを C^{-1} と書き，$C^{-1}\colon = \{R^{-1} \mid R \in C\}$ と定義する．TRS R と2つの項 s, t に対し，$s/o = l\sigma$ かつ $t = s[r\sigma]_o$ を満たす s の出現位置 $o \in O(s)$，代入 σ，書換え規則 $l \to r$ が存在する時，s は t に書換えられると言い，$s \to_R t$ と書く．$s \to_R t$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}_R$ と書く．$s \xrightarrow{*}_R t$ の時，s から t への書換え関係が成り立つと言う．書換え規則の左辺の例を可簡約項 (redex) と呼ぶ．可簡約項を持たない項を正規形 (normal form) と呼び，$s \xrightarrow{*}_R t$ の時，項 t が正規形ならば，項 s は正規形を持つと言う．また，NF_R を R におけるすべての基礎正規形の集合とする．また，位置 o での書換え関係 $t \to_R s$ が最内書換えであるとは，t/o のすべての真部分項が正規形の時を言う．また，最内書換えを $\to_{I,R}$ で表し，$\to_{I,R}$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}_{I,R}$ で表す．項書換え系 R に対し，関係 $\to_{I^{-1},R}$，$\xrightarrow{*}_{I^{-1},R}$ をそれぞれ，$\to_{I^{-1},R}\colon = \leftarrow_{I,R^{-1}}$，$\xrightarrow{*}_{I^{-1},R}\colon = \xleftarrow{*}_{I,R^{-1}}$ とする．ここで，$\square$ を新しい定数とする ($\square \notin F$)．$T(F \cup \square, X)$ に含まれる項で，$\square$ を一つだけ持つ項を文脈と呼ぶ．文脈 C の $\square$ を項 t で置き換えた項を $C[t]$ と書く．

TRS R において，$t_0 \to_R t_1 \to_R t_2 \to_R \cdots$ となるような無限の書換え系列が存在しない時，R は停止性を持つと言う．項 t に出現する全ての変数の集合を $V(t)$ と記す．変数制約「各 $l \to r \in R$ について，$l \notin X$ かつ，$V(r) \subseteq V(l)$ が成り立つ」を満たさない TRS R は停止性を持たないので，停止性について議論するときは，R が変数制約を満たすと仮定する．与えられた TRS R に対し，R が停止性を持つか否かという停止性問題は一般には決定不能であることが知られている [6]．

$l \to r$，$l' \to r'$ を TRS R の書換え規則とし，$V(l) \cap V(l') = \emptyset$ と仮定する．$l/o \notin X$ かつ $(l/o)\sigma \equiv l'\sigma$ となる出現位置 $o \in O(l)$ と最汎単一化代入 σ が存在する時，項の対 $\langle l[r'\sigma]_o, r\sigma \rangle$ を R の危険対と呼ぶ．$l \to r$ と $l' \to r'$ が同じ規則の時は，$o = \lambda$ の場合を除く．$o = \lambda$ の時，危険対 $\langle l[r'\sigma]_o, r\sigma \rangle$ をオーバーレイ (overlay) と言う．危険対 $\langle t, s \rangle$ において，

$t \equiv s$ ならば，危険対 $\langle t, s \rangle$ は自明 (trivial) であると言う．

2.2 木オートマトン

ここでは木オートマトンおよび正則木言語などを定義する．ここでの木オートマトンは [4] におけるボトムアップ木オートマトンである．詳しくは [4] を参照されたい．木オートマトンとは次のような四つ組 $A = (F, Q, Q^f, \Delta)$ で定義されるものである．ここで，F は関数を表す記号の有限集合で，Q は状態を表す記号の有限集合，Δ は遷移規則の有限集合で，ε-規則: $q' \rightarrow q \quad (q, q' \in Q)$ と非 ε-規則: $f(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow q \quad (f \in F, n = a(f), q, q_1, \ldots, q_n \in Q)$ の 2 つの形がある．Q^f は Q の部分集合で，その元は受理状態と呼ばれる．Q の元を引数の数が 0 の関数記号とみなしたとき，木オートマトンの遷移は，$T(F \cup Q)$ の項に対する Δ による "書換え" とみなせる．2 つの項 $t, t' \in T(F \cup Q)$ が $t \rightarrow^*_\Delta t'$ を満たすとき，t は t' に遷移するという．また，$t \rightarrow_\Delta t'$ を $t \vdash_A t'$，$t \rightarrow^*_\Delta t'$ を $t \vdash^*_A t'$ とも書く．木オートマトン $A = (F, Q, Q^f, \Delta)$ と基礎項 t に対し，$t \rightarrow^*_\Delta q_f$ かつ $q_f \in Q_f$ の時 t は A によって受理されると言う．A によって受理される項全体の集合を $L(M)$ と書く．A の受理状態集合を $\{q\}(q \in Q)$ に変更したものを $A(q)$ と書く．

定義 2.1. [正則木言語] 項の集合 $T(F)$ の部分集合 S が正則木言語であるとは，$S = L(A)$ なる木オートマトン A が存在することである． □

定理 2.1. [4] 正則木言語はブール演算 (和集合，共通集合，差集合) で閉じている．また，木オートマトンの空集合問題「与えられた木オートマトン A に対して，$L(A) = \emptyset$ かどうか」は決定可能である． □

2.3 有界経路重なり項書換え系

ここでは，有界経路重なり項書換え系 [9] を紹介する．

定義 2.2. 項 t が s から突出する (stick out) とは，s の変数の出現位置 $o \in V(s)$ が存在し，$\lambda \preceq o' \prec o$ なるすべての t の出現位置 $o' \in O(t)$ に対して，s における位置 o' での関数記号と t における位置 o' での関数記号とが一致することをいう．o を強調するとき，t は s から出現位置 o で突出するという．t/o が基礎項でも変数でもないとき，t は s から 真に突出するという．項 t が 項 s から (真に) 突出するなら，s は t より (真に) 短い (short) という． □

定義 2.3. TRS R に対する R の突出グラフ G_R とは，以下のように定義される重み付き有向グラフである．G_R は R の規則数と同じだけの節点を持ち，規則と節点とは一対一に対応する．また，2 つの規則 $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2$ に対して (ここで，$l_2 \rightarrow r_2$ は $l_1 \rightarrow r_1$ と同じ規則でもよい)，

1. r_2 が l_1 の部分項から真に突出するとき，G_R は $l_2 \rightarrow r_2$ から $l_1 \rightarrow r_1$ への重み 1 の辺を持つ．
2. r_2 の部分項が l_1 から真に突出するとき，G_R は $l_2 \rightarrow r_2$ から $l_1 \rightarrow r_1$ への重み 1 の辺を持つ．
3. r_2 が l_1 の部分項より短ければ，G_R は $l_2 \rightarrow r_2$ から $l_1 \rightarrow r_1$ への重み 0 の辺を持つ．
4. r_2 の部分項が l_1 より短ければ，G_R は $l_2 \rightarrow r_2$ から $l_1 \rightarrow r_1$ への重み 0 の辺を持つ．

□

定義 2.4. [有界経路重なり項書換え系] TRS R が次の条件を満たすとき，有界経路重なり項書換え系 (finite path overlapping TRS) であるという．

- R の突出グラフ G_R において，重みが正であるような閉路が存在しない．ここで閉路の重みとは，その閉路を構成する全ての辺の重みを足したものである．

すべての有界重なり項書換え系からなるのクラスを FPO-TRS で表す． □

3 準直交線形逆有界経路重なり項書換え系の停止性

与えられた TRS R に対し R が停止性を持つか否かという停止性問題は，基礎書換え系，右基礎書換え系，右線形単項的書換え系，準直交成長的書換え系については，決定可能であることが示されてい

る．ここでは，準直交線形逆有界経路重なり項書換え系の停止性が決定可能であることを示す．

3.1 弱最内正規化性による停止性の証明法

Nagaya らは，以下の方法を用いて準直交成長的項書換え系の停止性が決定可能であることを示した [7]．ここでは，その方法を紹介する．

定義 3.1. [直交] 項書換え系 R が左線形かつ危険対を持たない時，R を直交項書換え系 (orthogonal TRS) と呼ぶ．また，項書換え系 R が左線形かつ危険対が自明なオーバーレイ (trivial overlay) の時，R を準直交項書換え系 (almost orthogonal TRS, AO-TRS) と呼ぶ． □

定義 3.2. [成長的 (growing)] 項書換え系 R が成長的 (growing) であるとは，任意の規則に対して左辺と右辺に共に出現する変数が，左辺に深さ 0 または 1 で出現するときを言う．すべての成長的項書換え系からなるクラスを GR-TRS で表す． □

定義 3.3. [弱最内正規化性] 項 t が弱最内正規化性を持つとは，$t \xrightarrow{*}_I s$ となるある正規形 s が存在する時を言う．TRS R が弱最内正規化性を持つとは，すべての項が弱最内正規化性を持つ時を言う． □

定理 3.1. [5] TRS R を，準直交項書換え系 R とする．

1. R が停止性を持つ時，かつその時のみ R は弱最内正規化性を持つ．
2. 任意の項 t に対し，t の書換えが停止する時，かつその時のみ t は弱最内正規化性を持つ．

□

TRS R において，弱最内正規化性を持つすべての基礎項の集合を WIN_R とおく．定理 3.1 より，R が停止性を持つための条件は，$WIN_R = T(F)$(基礎項全体の集合) となることである．$WIN_R = T(F) \iff \overline{WIN_R} \cap T(F) = \emptyset$ であるから，WIN_R が正則ならば，補題 2.1 より，$WIN_R = T(F)$ が成り立つかどうかは決定可能である．したがって，WIN_R が常に正則となる TRS のクラスに対して，停止性問題は決定可能である．

3.2 木オートマトンの構成手続き

ここでは，次のように定義される AO-L-FPO-TRS^{-1} R において，WIN_R を受理する木オートマトンの構成法について述べる．

定義 3.4. [準直交線形逆有界経路重なり項書換え系] TRS R が準直交線形逆有界経路重なり項書換え系 (almost orthogonal linear inverse finite path overlapping TRS) であるとは，$R^{-1} \in$ L(線形)-FPO-TRS で，R が準直交的である時を言う．この書換え系からなるクラスを，AO-L-FPO-TRS^{-1} で表す． □

$\xrightarrow{*}_{I^{-1},R}$ の定義より，TRS R に対し，$(\xrightarrow{*}_{I^{-1},R})(NF_{R^{-1}}) = \{t \mid t \xrightarrow{*}_{I,R^{-1}} s \in NF_{R^{-1}}\} = WIN_{R^{-1}}$ となることは明白である．したがって，$R \in$ L-FPO-TRS かつ R^{-1} が準直交的な TRS R に対し，$(\xrightarrow{*}_{I^{-1},R})(NF_{R^{-1}})$ を受理する木オートマトンを構成する．R^{-1} の停止性を議論するので，R^{-1} は変数制約を満たすと仮定する．すなわち，各 $l \to r \in R$ について，r は変数ではなく，かつ，$V(l) \subseteq V(r)$ と仮定する．

手続き 1.

入力: $R \in$ L-FPO-TRS
かつ R^{-1} が準直交的な TRS R

出力: $L(A_*) = (\xrightarrow{*}_{I^{-1},R})(NF_{R^{-1}})$ となる
木オートマトン A_*

手続き 1 はまず，$L(A) = NF_{R^{-1}}$ なる $A = (F, Q, Q^f, \Delta)$ を構成する．一般性を失うことなく，A は決定性で，遷移は完全指定され，かつ ϵ-規則を含まないとする．A の状態集合 Q と遷移規則の集合 Δ を繰り返し拡張することにより，A_* を得る．k 回のループの実行によって，A から得られた木オートマトンを A_k とする．$\vdash_{A_k}$ を $\vdash_k$ と書く．A_k が t を受理する時，書換えステップ $t \to_{I^{-1},R} t'$ に対応する遷移規則を加えることによって，t' を受理するように A_k を修正して，A_{k+1} を構成する．

Step 1. $A_0 = (F, Q_0, Q^f_0, \Delta_0)$ とする．ここで，
$Q_0 = \{[q_1, q_2] \mid q_1, q_2 \in Q\}$,
$Q^f_0 = \{[q_1, q_2] \mid q_1 \in Q^f, q_2 \in Q\}$,
$\Delta_0 = \{f([q_{11}, q_{21}], \ldots, [q_{1a(f)}, q_{2a(f)}]) \to [q_1, q_2] \mid f(q_{11}, \ldots, q_{1a(f)}) \to q_1,\ f(q_{21}, \ldots, q_{2a(f)}) \to q_2 \in \Delta\}$.
各状態 $[q_1, q_2]$ の第 1 成分 q_1 は，R^{-1} における最

内書換えを模倣するのに用い，第2成分は，入力 A の遷移を保存するために用いる.

Step 2. $k := 0$ とする．k はこの手続きのループカウンタである.

Step 3. $Q_{k+1} := Q_k$, $\Delta_{k+1} := \Delta_k$ とする.

Step 4. Δ_{k+1} に以下のような遷移規則を追加する．$l \to r$ を R の書換え規則とする．R^{-1} が変数制約を満たすことより，$V(l) \subseteq V(r)$ である．$V(l) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $V(r) = V(l) \cup \{x_{m+1}, \ldots, x_{m'}\}$ とする．もし，状態 $[q_{11}, q_{21}], \ldots, [q_{1m}, q_{2m}]$, $[q_1, q_2] \in Q_k$ に対して，

$$l\big[[q_{11}, q_{21}]\big]_{o_1} \cdots \big[[q_{1m}, q_{2m}]\big]_{o_m} \vdash_k^* [q_1, q_2] \quad (q_{2i} \in Q^f \ (1 \leq i \leq m))$$

ならば，任意の $q_{1i} \in Q$, $q_{2i} \in Q^f$ $(m < i \leq m')$ に対して，$\rho = \{x_i \mapsto [q_{1i}, q_{2i}] \mid 1 \leq i \leq m'\}$ とし，以下を行う.

- 各 $q'_2 \in Q$ に対して，$[\langle r\rho \rangle, q'_2] \to [q_1, q'_2]$ を Δ_{k+1} に加える．これを $k+1$ 次の書換え遷移規則といい，この規則による遷移を $k+1$ 次の書換え遷移という.
- ADDTRANS($r\rho$) を実行する.

Step 5. $\Delta_{k+1} \neq \Delta_k$ ならば，$k := k+1$ とし，Step 3 へ行く．$\Delta_{k+1} = \Delta_k$ ならば，Step 6. へ行く.

Step 6. $A_* := A_k$ を出力する. □

手続き 2. [ADDTRANS(t)]
各 $p_2 \in Q$ に対して，$[\langle t \rangle, p_2]$ を Q_{k+1} に加え，以下を行う.

Case 1. $t = c$ のとき，$c \to p_2 \in \Delta$ ならば，$c \to [\langle c \rangle, p_2]$ を Δ_{k+1} に加える.

Case 2. $t = f(t_1, \ldots, t_{a(f)})$ のとき，$f(p_{21}, \ldots, p_{2a(f)}) \to p_2 \in \Delta$，かつ，$t_j = [p'_{1j}, p'_{2j}]$ ならば $p'_{2j} = p_{2j}$ $(1 \leq j \leq a(f))$ であるような $p_{21}, \ldots, p_{2a(f)}$ について，

- $f([\tau_1, p_{21}], \ldots, [\tau_{a(f)}, p_{2a(f)}]) \to [\langle t \rangle, p_2]$ を Δ_{k+1} に加える．ここで，$t_j = [p'_{1j}, p_{2j}]$ ならば $\tau_j = p'_{1j}$, $t_j \notin Q_k$ ならば $\tau_j = \langle t_j \rangle$.
- 各 j $(1 \leq j \leq a(f))$ について，もし $t_j \notin Q_k$ ならば，ADDTRANS(t_j) を実行する.

□

3.3 手続きの正当性

ここでは，手続き1の正当性を示す．証明の詳細は [1] を参照されたい．手続き1における A_k の構成法より，以下の3つの補題が示せる.

補題 3.2. 任意の $p_1, p_2 \in Q$ に対し，$t \vdash_0^* [p_1, p_2] \iff t \vdash_A^* p_1$ かつ $p_1 = p_2$. □

補題 3.3. $s\big[[q_1, q_2]\big]_o \vdash_k^* [p_1, p_2]$ かつ $[q_1, q'_2] \in Q_k$ ならば，ある $p'_2 \in Q$ が存在して，$s\big[[q_1, q'_2]\big]_o \vdash_k^* [p_1, p'_2]$ であり，各 l $(1 \leq l \leq k)$ について，両者の l 次の書換え遷移の回数は等しい. □

補題 3.4. $t \vdash_k^* [q_1, q_2]$ かつ $t \vdash_A^* q'_2$ ならば，$q_2 = q'_2$ である. □

次の2つの補題は，最内書換えに関する基本的な性質である.

補題 3.5. $s \to_{I^{-1},R} t$ ならば，任意の文脈 C に対し，$C[s] \to_{I^{-1},R} C[t]$. □

補題 3.6. TRS R に対して，R^{-1} が準直交的であると仮定する．$s, t \in T(F, X), l \to r \in R, V(r) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \sigma = \{x_i \mapsto t_i \mid 1 \leq i \leq n\}, t = t[l\sigma]_o \to_R t[r\sigma]_o = s$ ならば，$t \to_{I^{-1},R} s \iff t_i \in NF_{R^{-1}}$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つ. □

次の補題によって手続き1の完全性を示せる.

補題 3.7. $t \vdash_0^* [p_1, p_2] \in Q_0^f$ かつ $t \xrightarrow{*}_{I^{-1},R} s$ ならば，$s \vdash_k^* [p_1, p'_2] \in Q_0^f$ となる $p'_2 \in Q$ と k が存在する.

証明の方針. 補題 3.3, 3.4 を用い，$t \xrightarrow{*}_{I^{-1},R} s$ の長さ (書換え回数) に関する帰納法により示す. □

定義 3.5. 木オートマトン A_{k^-} を，木オートマトン $A_k = (F, Q_k, Q_k^f, \Delta_k)$ の遷移規則の集合 Δ_k から，すべての書換え遷移規則を除いた木オートマトン $A_{k^-} = (F, Q_k, Q_k^f, \Delta_{k^-})$ と定義する. □

A_{k^-} と A_0 は等価であることが次の補題より分かる

補題 3.8. $A = (F, Q, Q^f, \Delta)$, $A_k = (F, Q_k, Q_0^f, \Delta_k)$ とする．状態 $[q_1, q_2] \in Q_k$ と 項 $t \in T(F)$ に対し，

$$t \vdash_0^* [q_1, q_2] \iff t \vdash_{k-}^* [q_1, q_2].$$

証明. $\Rightarrow$ は自明である．$\Leftarrow$ は，遷移系列 α: $s \vdash_k^* [q_1, q_2]$ の長さ n に関する帰納法により証明できる． □

次の補題は，A_{k-} で $[\langle r\rho\rangle, q_2]$ に遷移する項は，$r\sigma$ (σ はある代入) の形に限ることを表す．

補題 3.9. $t \vdash_{k-}^* [\langle r\rho\rangle, q_2]$, $V(r) = \{x_1, ..., x_{m'}\}$, $\rho = \{x_i \mapsto [q_{1i}, q_{2i}] \mid 1 \le i \le m'\}$, $r/o_i = x_i$ $(1 \le i \le m')$ ならば，$t = r\sigma$ なる代入 σ が存在し，$t = r\sigma \vdash_{k-}^* r\big[[q_{11}, q_{21}]\big]_{o_1} \cdots \big[[q_{1m'}, q_{2m'}]\big]_{o_{m'}} \vdash_{k-}^* [\langle r\rho\rangle, q_2]$. □

手続き 1 の健全性を示すための次の補題を示す．

補題 3.10. 遷移系列 $t \vdash_{k-}^* [q_1', q_2'] \vdash_k [q_1, q_2]$ において，$[q_1', q_2'] \vdash_k [q_1, q_2]$ が k 次の書換え遷移ならば，$u \to_{I^{-1},R} t$ かつ $u \vdash_{k-1}^* [q_1, q_2'']$ となるような項 u と $q_2'' \in Q$ が存在する．

証明の方針. 補題 3.2, 3.8, 3.9, 3.6 を用いる． □

補題 3.10 を用いることにより，手続き 1 の健全性を表す次の補題が証明できる．

補題 3.11. $s \in T(F)$ とする．$s \vdash_k^* [p_1, p_2] (k \ge 0)$ ならば，ある項 $t \in T(F)$ と $p_2' \in Q$ が存在して，$t \vdash_{k-}^* [p_1, p_2']$ かつ，$t \xrightarrow{*}_{I^{-1},R} s$ となる．

証明の方針. 補題 3.3, 3.5, 3.10 を用い，$s \vdash_k^* [p_1, p_2]$ における k および k 次の書換え遷移規則の適用回数に関する二重帰納法により示す． □

定理 3.12. 手続き 1 が停止し A_* を出力するならば，$L(A_*) = (\xrightarrow{*}_{I^{-1},R})(NF_{R^{-1}})$.

証明. 補題 3.7 と補題 3.11 より容易． □

補題 3.13. 手続き 1 は停止する．

証明の方針. [9] における手続きの停止性の証明と同様に行うことができる． □

定理 3.12 と補題 3.13 より，次の定理が得られる．

定理 3.14. AO-L-FPO-TRS^{-1} に対する停止性問題は決定可能である． □

参考文献

[1] 阿部 武徳: "有界経路重なり項書換え系の停止性問題について", 奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 修士論文 NAIST-IS-MT9951001, 2001.

[2] F. Baader and T. Nipkow : "Term Rewriting and All That", Cambridge University Press, 1998.

[3] N. Dershowitz : "Termination of Linear Rewriting System", LNCS 115, pp.448-458, 1981.

[4] F. Gécseq and M. Steinby : "Tree Automata", Akadémiai Kiadó, 1984.

[5] B. Gramlich : "Abstract Relations between Restricted Termination and Confluence Properties of Rewrite System", Fundamenta Informaticae 24, pp.2-23, 1995.

[6] G. Huet and D. Lankford : "On the Uniform Halting Problem for Term Rewriting Systems", INRIA Technical Report 283, 1978.

[7] T. Nagaya and Y. Toyama : "Decidability for Left-Linear Growing Term Rewriting Systems", Proc. of RTA99, LNCS 1631, pp.256-270, 1999.

[8] K. Salomaa : "Decidability of Confluence and Termination of Monadic Term Rewriting Systems", LNCS 488, pp.275-286, 1991.

[9] T. Takai, Y. Kaji and H. Seki: "Right-Linear Finite Path Overlapping Term Rewriting Systems Effectively Preserve Recognizability", Proc. of RTA2000, LNCS 1833, pp.246-260, 2000.