

## Number conserving なセル空間での自己増殖

藤田研二 (Kenji Fujita)

森田憲一 (Kenichi Morita)

岩本宙造 (Chuzo Iwamoto)

今井克暢 (Katsunobu Imai)

広島大学大学院工学研究科 (Faculty of Engineering, Hiroshima Univ)

### 1 はじめに

セル・オートマトン (CA) において, 遷移の前後でコンフィグレーション全体に渡る状態の数の和が保存される CA を number conserving CA (NC-CA) という. number conserving という制約は一般にエネルギーや物質の保存性に関連付けられる. また物質の保存性という点から, 交通流のモデルでも同じような概念が利用されている [2].

過去の研究において, Hattori, Takesue [2] らの加法的保存量についての一般的な定理を基にして, Boccara, Fukás により一次元 CA が NC となるための必要十分条件が求められている [1]. ところがこの条件は, 与えられた CA が NC かどうかを判定することはできても, ある機能を持った NC-CA を設計するために利用するのは困難であるように思われる. そのため各セルが近傍の数に分割されている分割セル・オートマトン (PCA) [3] を用いると, 容易に number conserving な制約を満たす PCA が設計できるため, それを用いた NC-PCA の設計が試みられている. しかし, PCA では同一セルの各分割部分にそれぞれ数を割り当て, そのバランスを変えることで number conserving にしているため, 分割されていない従来の CA とみなすことは出来ない.

そこで本研究では, 2次元 Neumann 近傍 CA の場合の, 規則設計を容易にする制約条件の発見を試みた. その結果, 特別な対称性を持つ場合には各遷移規則が 2つの近傍のみの関数の和で表現できることがわかった. さらに, それに組合せ対称という強い制約を加えた制約下で, Langton の自己増殖 CA [4] を number conserving CA に埋め込むことができた.

### 2 1 次元 number conserving cellular automaton の必要十分条件

文献 [1] では次のような環状の閉じた 1次元セル空間における必要十分条件について述べている.

定義 2.1 1次元  $n$  近傍セル・オートマトン (CA) とは,

$$A = (\mathbf{Z}, Q, f, q)$$

で定義されるシステムであり,  $\mathbf{Z}$  は全整数集合,  $Q$  は各セルの内部状態の非空の有限集合,  $f: Q^n \rightarrow Q$  は局所関数と呼ばれる写像, そして  $q \in Q$  は静止状態を表す. また, 集合  $Q$  上の状相 (configuration) は  $\text{Conf}(Q)$  と表し,  $\text{Conf}(Q) = \{\alpha | \alpha: \mathbf{Z}^2 \rightarrow Q\}$  であるとする.

通常, NC-CA の定義は無限セル空間に関して定義されるが, 文献 [1] においては環状に閉じた 1次元セル空間に関して定義している.

定義 2.2 1次元  $q$  状態  $n$  近傍 CA が number conserving であるとは, すべての長さ  $L \geq n$  の環状コンフィグレーションに関し, 以下の式を満たす場合を言う.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) + f(x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}) + \dots + f(x_L, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = x_1 + x_2 + \dots + x_L$$

定理 2.1 [1] セル空間は  $L$  個のセルからなる環状の空間であるとする. このとき 1次元  $n$  近傍 CA の遷移規則  $f$  が number conserving であるのは, すべての  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q^n$  に対し, 以下を満たすときであり, かつそのときに限る.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, x_2, x_3, \dots, x_{n-k+1}) - f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, x_1, x_2, \dots, x_{n-k})) \quad (1)$$

これを2状態3入力に関して展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \\ &+ f(0, x_2, x_3) - f(0, x_1, x_2) \\ &+ f(0, 0, x_2) - f(0, 0, x_1) \quad (2) \end{aligned}$$

次の図1は2状態3入力CAの例である。これは空間  $Z^L$  を1車線の環状高速道路の上を車(状態1)が走っているように見ることが出来、右セルに車が無ければ右セルに移動するという単純な規則に従って動いている。この遷移規則は次のように与えられている。

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0, f(0, 0, 1) = 0 \\ f(0, 1, 0) &= 0, f(0, 1, 1) = 1 \\ f(1, 0, 0) &= 1, f(1, 0, 1) = 1 \\ f(1, 1, 0) &= 0, f(1, 1, 1) = 1 \end{aligned}$$

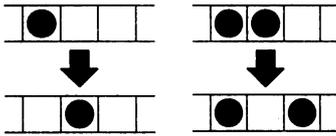


図1: 1次元 NC-CA の例

1次元環状CAが number conserving になるための条件は上記のように表されることは分かった。けれども、有限の空間では可能な動作が限られており、チューリング機械の構成や自己複製CAを構成する場合には無限空間であるほうが望ましい。これに関しては、この定理を無限の1次元CAに拡張することは比較的簡単に行なうことができるが、やはり何らかの機能を持つNC-CAを構成するのは困難に思え、またこの条件を2次元に拡張したものは、Neumann近傍に限定した場合でも5変数に依存する関数の和になり、式(2)より複雑な式になる。そこで次章では、2次元CAが number conserving になるための必要十分条件が2変数関数の和で表せることを示す。

### 3 2次元 number conserving cellular automaton

**定義3.1** Neumann近傍を持つ決定性2次元セルオートマトンとは、

$$A = (Z^2, Q, f, q)$$

で定義されるシステムであり、 $Z$ は全整数集合、 $Q$ は各セルの内部状態の非空の有限集合、 $f: Q^3 \rightarrow Q$ は局所関数と呼ばれる写像、そして  $q \in Q$ は静止状態を表す。また、関数  $F: Conf(Q) \rightarrow Conf(Q)$ は  $A$ の大域写像と呼び、 $\forall(x, y) \in Z^2$  に関し

$$F(\alpha)(x, y) = f(\alpha(x, y), \alpha(x, y+1), \alpha(x+1, y), \alpha(x, y-1), \alpha(x-1, y))$$

であるとする。

**定義3.2** 次のようなCA  $A$ を考える。

$$A = (Z^2, N_{l,m}, f, k) \quad \begin{cases} N_{l,m} = \{l, l+1, \dots, m-1, m\} & l, m \in Z \\ k \in N_{l,m} \end{cases}$$

このとき  $A$ が number conserving であるとは、静止状態  $k$ 以外の状態を取るセルの数が有限で、次の条件を満たす場合を言う。

$$\sum_{x,y} \{F(\alpha)(x, y) - \alpha(x, y)\} = 0 \quad (3)$$

**定義3.3** CA  $A$ の局所関数  $f$ が次の条件を満たすとき、 $A$ は  $\pm 45$ 度反転対称なCAであると言う。

$$\forall c, u, r, d, l \in Q$$

$$f(c, u, r, d, l) = f(c, l, d, r, u) = f(c, r, u, l, d)$$

**定義3.4** CA  $A$ の局所関数  $f$ が次の条件を満たすとき、 $A$ は回転対称なCAであると言う。

$$\forall c, u, r, d, l \in Q$$

$$f(c, u, r, d, l) = f(c, r, d, l, u)$$

**定義3.5** CA  $A$ が回転対称であり、かつ次の条件を満たすとき、 $A$ は組合せ対称なCAであると言う。

$$\forall c, u, r, d, l \in Q$$

$$\begin{aligned} f(c, u, r, d, l) &= f(c, u, r, l, d) \\ &= f(c, u, d, r, l) \\ &= f(c, u, d, l, r) \\ &= f(c, u, l, d, r) \\ &= f(c, u, l, r, d) \end{aligned}$$

**補題3.1** CA  $A$ が number conserving であるとする。このとき、

$$\forall a \in Q$$

$$f(a, a, a, a, a) = a$$

[証明] すべてのセルが  $a$  である空間を考える。このとき、 $f(a, a, a, a, a) = a$  でないとすると、式 (3) において

$$\sum_{x,y} \{F(\alpha)(x,y) - \alpha(x,y)\} \neq 0$$

□

補題 3.2 CA  $A$  の遷移規則に関して次の条件を考える。

$$\forall c, u, r, d, l \in Q, \exists U, R, D, L: Q^2 \rightarrow Q$$

$$\begin{cases} f(c, u, r, d, l) = \\ c + U_{(c,u)} + R_{(c,r)} + D_{(c,d)} + L_{(c,l)} \\ U_{(c,u)} = -D_{(u,c)} \\ R_{(c,u)} = -L_{(u,c)} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、CA  $A$  の遷移規則が式 (4) を満たすならば  $A$  は number conserving である。

この補題の概念は図 2 で表される。ここで、関数

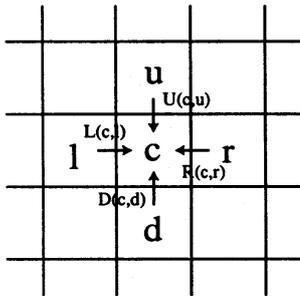


図 2: 定理 1 の概念図

$U, R, D, L$  の値が正の場合は近傍セルから数を受け取り、値が負の場合は近傍セルに値を渡すことを表している。つまり近傍のセルと値の受け渡しを行ない、その結果が次の状態となる。

[証明] 1 ステップ後のすべてのセルの持つ値の変化の和は

$$\begin{aligned} & \sum_{x,y} (F(\alpha)(x,y) - \alpha(x,y)) \\ &= \sum_{x,y} \{U(c,u) + R(c,r) + D(c,d) + L(c,l)\} \end{aligned}$$

$U(c,u) = -D(u,c)$  より

$$\sum_{x,y} \{U(c,u) + D(c,d)\} = 0$$

同様に

$$\sum_{x,y} \{R(c,r) + L(c,l)\} = 0$$

従って

$$\sum_{x,y} \{F(\alpha)(x,y) - \alpha(x,y)\} = 0$$

□

定理 3.1 NC-CA  $A$  が  $\pm 45$  度反転対称ならば  $A$  の遷移規則は式 (4) を満たす。

[証明] 図 3(1) のようなコンフィグレーションを考え

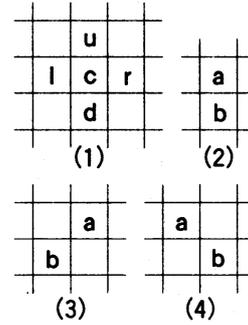


図 3: 証明に用いるコンフィグレーション

る。ここで、 $a, b, c, u, r, d, l \in Q$  とし、空白のセルは静止状態とする。このとき、number conserving なので

$$\begin{aligned} & f(c, u, r, d, l) - c \\ &+ f(u, k, k, c, k) - u + f(r, k, k, k, c) - r \\ &+ f(d, c, k, k, k) - d + f(l, k, c, k, k) - l \\ &+ f(k, k, k, r, u) - k + f(k, r, k, k, d) - k \\ &+ f(k, l, d, k, k) - k + f(k, k, u, l, k) - k \\ &+ f(k, k, k, u, k) - k + f(k, k, k, k, r) - k \\ &+ f(k, d, k, k, k) - k + f(k, k, l, k, k) - k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

同様に図 3(3), (4) のコンフィグレーションにおいて

$$\begin{aligned} & f(a, k, k, k, k) - a + f(b, k, k, k, k) - b \\ &+ f(k, k, a, b, k) - k + f(k, a, k, k, b) - k \\ &+ f(k, k, k, a, k) - k + f(k, k, k, k, a) - k \\ &+ f(k, k, b, k, k) - k + f(k, b, k, k, k) - k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & f(a, k, k, k, k) - a + f(b, k, k, k, k) - b \\ &+ f(k, k, k, b, a) - k + f(k, a, b, k, k) - k \\ &+ f(k, k, a, k, k) - k + f(k, k, k, a, k) - k \\ &+ f(k, b, k, k, k) - k + f(k, k, k, k, b) - k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式 (6),(7) を式 (5) に代入すると,  $\pm 45$  度反転対称性より

$$\begin{aligned}
 f(c, u, r, d, l) &= c \\
 &+ f(u, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, u) - f(u, k, k, k, c) - k \\
 &+ f(r, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, r) - f(r, k, k, k, c) - k \\
 &+ f(d, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, d) - f(d, k, k, k, c) - k \\
 &+ f(l, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, l) - f(l, k, k, k, c) - k
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 f(u, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, u) - f(u, k, k, k, c) - k &= U_{(c,u)} \\
 f(r, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, r) - f(r, k, k, k, c) - k &= R_{(c,r)} \\
 f(d, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, d) - f(d, k, k, k, c) - k &= D_{(c,d)} \\
 f(l, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, l) - f(l, k, k, k, c) - k &= L_{(c,l)}
 \end{aligned}$$

とすると式 (4) の 1 番上の等式を得る.

また, 図 3(2) に関して同様にすると, 式 (8) より

$$f(c, k, k, k, k) = c + 4k - 4f(k, k, k, k, c)$$

$$\begin{aligned}
 f(c, u, k, k, k) \\
 &= c + 2k + f(u, k, k, k, k) + f(k, k, k, k, u) \\
 &\quad - f(u, k, k, k, c) - 3f(k, k, k, k, c) \\
 &= c + u + 6k - 3f(k, k, k, k, u) \\
 &\quad - f(u, k, k, k, c) - 3f(k, k, k, k, c)
 \end{aligned}$$

従って

$$U_{(c,u)} + D_{(u,c)} = 0$$

同様に

$$R_{(c,r)} + L_{(r,c)} = 0$$

□

補題 3.2, 定理 3.1 により CA が NC になるための条件が分かったが, 何らかの機能を持った NC-CA を構成するためには式 (4) はまだ複雑な形をしている. そこで設計をより簡単にするために, 次の補題を示しておく.

補題 3.3 NC-CA  $A$  は次の式を満たすとする.

$$\begin{aligned}
 \forall a, b \in Q \\
 U_{(a,b)} = R_{(a,b)} = D_{(a,b)} = L_{(a,b)} \tag{9}
 \end{aligned}$$

このとき  $A$  は組合せ対称な NC-CA である.

[証明]

$$\begin{aligned}
 f(c, u, r, d, l) \\
 &= c + f'(c, u) + f'(c, r) + f'(c, d) + f'(c, l) \\
 f(c, u, r, l, d) \\
 &= c + f'(c, u) + f'(c, r) + f'(c, l) + f'(c, d)
 \end{aligned}$$

$\therefore f(c, u, r, d, l) = f(c, u, r, l, d)$   
 その後も同様に示せる.

□

## 4 Langton の自己増殖 Loop の number conserving CA への埋め込み

Langton の Loop とは, Loop と呼ばれる環状のコンフィグレーションを持つ CA で, 最初空間に一つだけ配置されている. この Loop は長い時間がたつと, 自分自身と同じ形の Loop を平面を覆うように増殖していく.

### 4.1 Langton の Loop

Langton の Loop とは図??のように, 151 ステップ後には自分の右側に以前の自分と同じコンフィグレーションを複製し, 自分自身は 90 度回転した形になる. ここで, この CA は次のような回転対称性を満たすため上下左右という区別が無い. 従って長い時間がたつと Loop が平面を覆うように増殖していく.

numberconserving な Langton の Loop  $A_{Lang}$  は図 4 のような初期コンフィグレーションを持つ NC-CA で, 次のように定義される.

$$A_{Lang} = (\mathbf{Z}^2, N_{-195,200}, f, 40)$$

本予稿では Langton の Loop における信号の伝達とアームの伸長についてのみ説明する. また, 数字の書かれていないセルには静止状態が保持されている.

-15	0	0	0	0	0	0	0	0	15	-15				
15	80	160	120	80	160	120	90	150	0					
0	120	0	0	0	0	0	0	120	0					
0	160	0					0	120	0					
0	80	0					0	120	0					
0	120	0					0	120	0					
0	160	0					0	120	0					
0	80	0	0	0	0	0	0	120	0	0	0	0	0	8
0	120	160	80	120	160	80	120	120	120	120	120	120	120	-11
-15	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

図 4:  $A_{Lang}$  の初期コンフィグレーション

前章で示したように, 設計の簡単化のため組合せ対称という制約下で  $A_{Lang}$  を構成していくことにする.

この組合せ対称という制約は回転対称よりも強い制約となっているが、本研究ではその制約下で Langton の Loop を number conserving CA に埋め込めることを示した。

### 4.2 信号の伝達

図 5(1) は Langton の Loop における信号の伝達の様子である。ここで、信号は 'h' と '空白' によって表されているが、式 (4) を満たしやすくするために、図 5(2) のように 'h' と 'i' で表すように変更する。

ここで定理 3.1 より、状態の変更は近傍のセルと数を受け渡しすることで行なわれるが、この受け渡しが行なわれる場所が少ないほど他の遷移規則に影響を与える可能性が少なくなり遷移規則の設計が容易になる。そこで信号の伝達には図 5(2) の 'h' と 'i' の間、'h' と 'b' の間の 2 箇所だけで値の受け渡しが行なわれるとし、それが式 (4) を満たすように値を割り当てる。

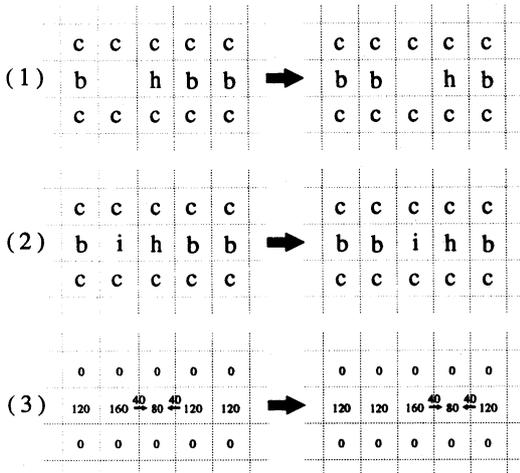


図 5: 信号の伝達

### 4.3 アームの伸長

図 6(1) は Langton の Loop におけるアームの伸長の様子である。ここで、前節で 'c' と 'h' の間では数の受け渡しが行なわれないように設計していたので、組合せ対称な制約下ではアームの先端の 'c' とも受け渡しが行なえずアームを伸ばすことが出来ない。また、アームの先端は中央を軸として対称な形をしているが、これでは左右を認識できないためアームを左に曲げることが出来ない。そこで図 6(2) のように先端を

'j','k','l'に変更する。そして前節と同じように値の受け渡しができるだけ少なくなるように遷移規則全体を変更する。

## 5 まとめと今後の課題

本研究では 2 次元ノイマン近傍 CA が number conserving となるための必要十分条件を示し、それを用いて Langton の Loop を number conserving CA に埋め込めることを示した。

研究の過程で生じた問題点は、 $A_{Lang}$  の遷移規則は試行錯誤を繰り返して決定されていることが挙げられる。このことから今後の課題として、ある NC でない遷移規則が与えられたときにそれを機械的に NC な遷移規則に変換する方法を求めることが挙げられる。

また  $A_{Lang}$  では状態集合  $N_{l,m}$  は  $l = -195, m = 200$  となっているが、その中でセルの状態として現れるのは 59 種類のみである。これは無駄に大きな数字を使用しているように思われるので  $l, m$  を適切に設定する方法を求めることも今後の課題として挙げられる。

## 参考文献

- [1] Nino Boccara and Henryk Fukś: Number-conserving cellular automaton rules, *Fundamenta Informaticae (to Appear.)*
- [2] Tetsuya Hattori and Shinji Takesue: Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, *Physica*49D (1991) 295-322
- [3] Kenichi Morita and Katsunobu Imai: Number-conserving reversible cellular automata and their computation- universality, *Proceedings of MFCS'98 Workshop on Cellular Automata*, Brno (1998), 51-68.
- [4] Christopher G. Langton: Self-reproduction in cellular automata, *Physica*10D(1984) 135-144.
- [5] Katsunobu Imai, Kenichi Morita and Kenji Sako: Firing squad synchronization problem in number-conserving cellular automata, *Proceedings of IFIP Workshop on Cellular Automata*, Santiago (1998) 20.

[6] 鷲尾拓也: 保存的な可逆セル構造オートマトンにおける自己増殖について, 広島大学工学部卒業論文,(1999)

付録

以下に  $A_{Lang}$  の遷移規則を構成する2変数関数を掲載しておく。ただし、 $U(a,b) = R(a,b) = D(a,b) = L(a,b) = f'(a,b)$  とし、掲載していない  $f'$  の値は全て0であるとする。

$f'(-195,12)=-60$	$f'(-10,-5)=10$
$f'(-195,20)=20$	$f'(-10,10)=10$
$f'(-195,72)=40$	$f'(-6,4)=-40$
$f'(-195,160)=80$	$f'(-5,15)=18$
$f'(-182,80)=172$	$f'(-4,1)=-17$
$f'(-155,72)=275$	$f'(-4,3)=9$
$f'(-131,0)=35$	$f'(-3,0)=-1$
$f'(-131,40)=35$	$f'(-2,0)=-6$
$f'(-131,160)=120$	$f'(-2,2)=-28$
$f'(-121,40)=27$	$f'(-2,120)=76$
$f'(-121,150)=15$	$f'(0,6)=-44$
$f'(-56,16)=-24$	$f'(0,7)=11$
$f'(-56,120)=120$	$f'(0,10)=10$
$f'(-54,11)=3$	$f'(0,14)=44$
$f'(-54,40)=171$	$f'(0,59)=10$
$f'(-54,160)=40$	$f'(0,72)=59$
$f'(-52,-6)=-9$	$f'(2,10)=10$
$f'(-52,18)=10$	$f'(3,59)=-3$
$f'(-52,40)=171$	$f'(3,150)=16$
$f'(-52,160)=40$	$f'(3,160)=-40$
$f'(-51,40)=171$	$f'(4,18)=40$
$f'(-51,160)=40$	$f'(4,24)=36$
$f'(-46,5)=46$	$f'(4,80)=-40$
$f'(-44,-10)=-10$	$f'(5,58)=57$
$f'(-44,0)=-10$	$f'(5,93)=35$
$f'(-44,94)=54$	$f'(5,94)=35$
$f'(-41,40)=161$	$f'(7,13)=37$
$f'(-41,150)=30$	$f'(7,90)=37$
$f'(-37,5)=37$	$f'(7,120)=-47$
$f'(-37,72)=37$	$f'(8,12)=-8$
$f'(-37,80)=37$	$f'(8,150)=-1$
$f'(-35,0)=-12$	$f'(8,160)=-40$
$f'(-35,94)=35$	$f'(13,19)=-55$
$f'(-32,5)=32$	$f'(14,180)=30$
$f'(-32,72)=32$	$f'(19,90)=55$
$f'(-32,80)=32$	$f'(19,120)=-74$
$f'(-25,13)=-27$	$f'(24,40)=35$
$f'(-25,90)=-27$	$f'(59,80)=-50$
$f'(-25,120)=121$	$f'(72,160)=302$
$f'(-24,-51)=-171$	$f'(80,93)=40$
$f'(-22,5)=22$	$f'(80,94)=35$
$f'(-15,10)=10$	$f'(80,120)=40$
$f'(-14,80)=-40$	$f'(80,160)=40$
$f'(-12,40)=16$	$f'(80,200)=40$
$f'(-11,80)=-40$	$f'(90,120)=30$
$f'(-11,90)=-30$	$f'(90,150)=30$
	$f'(90,180)=30$

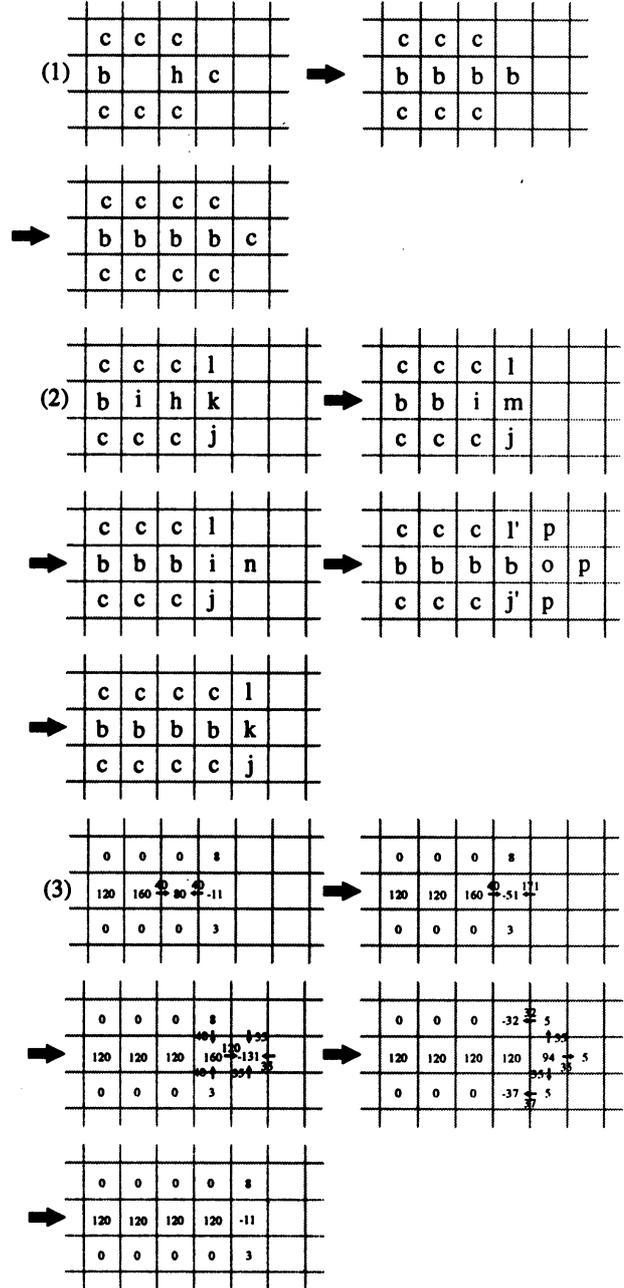


図 6: アームの伸長