数理解析研究所講究録 1208 巻 2001 年 1-6

L^p-Theory of Spectral Shift Function and the Wegner Estimate (スペクトルシフト関数の L^p-理論とウェグナー評価)

東京大学数理　中村周 (Shu Nakamura)

この講演で紹介する結果は, J. M. Combes (Toulon 大学・Marseille CNRS), P. D. Hislop (Kentucky 大学) との共同研究である ([CHN] に出版予定). この研究の主目的は, ランダム・シュレディンガー作用素のアンダーソン局在の証明において重要な役割を果たす, IDS(Integrated Density of States, 状態密度) に関するウェグナー評価の新しい証明を開発し, 既知の結果を拡張することにある. 離散的なアンダーソンモデルの場合のウェグナー評価は, 比較的簡単であり十分なものと考えられるが, 連続なモデルに関しては, かなり込み入った証明を用いなければ, 物理的に適切な評価が得られなかった. ここで紹介する研究は, 結果自体は以前知られたものの僅かな拡張にしかすぎないが, 証明は遙かに簡明である. その主要な新しいアイデアは SSF(Spectral Shift Function, スペクトルシフト関数) の L^p-評価の手法である.

§1. 序

今回は, 簡単のためアンダーソン型のランダム・シュレディンガー作用素の場合に限って説明する. 最初に, 我々の考えるモデルと, 主要結果であるウェグナー評価について述べる. 考える作用素は,

$$H^\omega = H_0 + V_\omega \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 1.$$

ここで, H_0 はシュレディンガー作用素

$$H_0 = (p - a(x))^2 + W(x) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^d)$$

とする. ただし, ベクトル・ポテンシャル $a(x)$ は C^1-級で, スカラー・ポテンシャル $W(x)$ は有界とする. すると, H_0 は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役である. 以下では, H_0 をこの自己共役拡張とする. V_ω は以下では有界と仮定するので, H^ω も同じ定義域で自己共役である. $V_\omega(x)$ はランダム・ポテンシャルで, アンダーソン型, つまり,

$$V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \lambda_n(\omega) v(x - n), \quad v \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

の形をしていると仮定する. $\lambda_n(\omega)$ は独立同分布の確率変数で, $\omega \in \Omega$ は対応する確率空間の元である. 確率測度を $\mathbb{P}(\cdot)$, 対応する期待値を $\mathbb{E}(\cdot)$ で表す. 局所ポテンシャル $v(x-n) = v_n(x)$ は n ごとに異なっても良いが, 簡単のためすべて同じ $v(x)$ を平行移動したものと仮定する.

[仮定 1]　H_0 はスペクトル・ギャップ $[B_-, B_+]$ を持つ. つまり, $[B_-, B_+] \subset \rho(H_0)$ である.

[仮定 2]　$v(x) \geq 0$, $v \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $v \neq 0$.

[仮定 3] $\lambda_n(\omega)$ の分布はコンパクトな台を持ち絶対連続で, その密度関数を $h_0(E)$ とすると, h_0 は有界.

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ を (超) 立方体とする. Λ の体積を $|\Lambda|$ と書く. このとき,

$$H_\Lambda^\omega = H_0 + \sum_{n\in\Lambda} \lambda_n(\omega)v(x-n)$$

と定義する. H_Λ^ω も自己共役作用素である. この作用素の $[B_-, B_+]$ での固有値に関して, 以下のような評価が成立する.

定理 1. 以上の仮定の下で, $E \in (B_-, B_+)$, $q > 1$ とする. すると, Λ に依存しない定数 $C > 0$ が存在して, 十分小さな $\eta > 0$ に対して,

$$\mathbb{P}\{\mathrm{dist}(E, \sigma(H_\Lambda^\omega)) < \eta\} \le C\eta^{1/q}|\Lambda|.$$

[注意] この定理の設定は, 定磁場中の粒子や, 周期的ポテンシャルを $W(x)$ とするときのスペクトル・ギャップの中の評価を意識しているので, 古典的なウェグナー評価とはすこし異なっている. しかし

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} v(x-n) \ge c > 0$$

であるような状況においては, ディィリクレ境界条件をおいた $L^2(\Lambda)$ での H^ω の評価として, (任意のエネルギーで) 定理の不等式が証明できる. 定理の評価の右辺の $\eta^{1/q}$ は, 本来は η とできることが望ましいが, 我々の証明ではそこまでは示せない. 一方, 右辺の Λ に関する依存性は, 「正しい」オーダーである. 既知の (連続なモデルに対する) 簡単なウェグナー評価の証明では, 右辺は $|\Lambda|^2$ でしか押さえられない. また, この形の評価から, IDS の Hölder 連続性が導かれる. □

§2. Spectral shift function の L^p-評価

この証明における新しいアイデアは, spectral shift function の L^p-評価である. A, A_0 をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で $V \equiv A - A_0 \in \mathfrak{I}_1$ を満たすものとする. ここで, $\mathfrak{I}_\alpha$ は次数 $\alpha > 0$ のトレース・イデアルの空間である. すると, $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; A, A_0) \in L^1(\mathbb{R})$ で

$$\mathrm{Tr}(f(A) - f(A_0)) = -\int f'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda, \qquad (\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$$

を満たすものが存在する. これを SSF(spectral shift function) と呼ぶ (cf. [Y]). 具体的には, SSF は

$$\xi(\lambda; A, A_0) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \arg\det(1 + V(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1})$$

という公式で構成される. SSF は

$$\|\xi(\cdot; A, A_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|V\|_{\mathfrak{I}_1}$$

を満たすことが知られている. ここで, 右辺のトレースノルムは, V の singular values を $\{\mu_j(V)\}$ として

$$\|V\|_{\mathfrak{I}_\alpha} = \left(\sum \mu_j(V)^\alpha\right)^{1/\alpha}$$

で定義される. 実際, Birman-Klein はこの公式をランク 1 の摂動の場合に示して, その繰り返しを用いて一般の場合の SSF の存在を証明している. 我々のアイデアは, 同様の手続きを L^p-評価について行う, という単純なものである.

まず, Birman-Klein の議論を復習しておこう. ランク 1 の場合から始める. つまり

$$V\varphi = \mu\langle\varphi, u\rangle u, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1,$$

の場合に SSF $\xi(\lambda; A, A_0)$ を考える. すると

$$\int \xi(\lambda; A, A_0) d\lambda = \mu, \qquad |\xi(\lambda; A, A_0)| \le 1 \quad (\forall\lambda \in \mathbb{R}) \tag{*}$$

が成立することが知られている (cf. [Y]). 一般に $V \in \mathfrak{I}_1$ の場合には

$$V = \sum_j V_j, \qquad V_j\varphi = \mu_j\langle\varphi, u\rangle u \qquad (\|u\| = 1, j = 1, \ldots, \sum |\mu_j| < \infty)$$

と表現すれば,

$$\xi(\lambda; A, A_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(\lambda; A_j, A_{j-1}) \qquad (A_j = A_0 + \sum_{k=1}^{j} V_k)$$

により SSF が構成できる. 無限和の収束は $L^1(\mathbb{R})$ の意味であり, $\xi(\cdot, A, A_0) \in L^1(\mathbb{R})$ である.

さて, (*) は, $\|V\|_{L^1} = \mu$, $\|V\|_{L^\infty} \le 1$ を意味する. そこで, Riesz-Thorin の補間定理を用いると (V がランク 1 の摂動の場合は)

$$\|\xi(\cdot; A, A_0)\|_{L^p} \le \mu^{1/p} \qquad (1 \le p \le \infty)$$

が成立することが分かる. これを, 上の議論と組み合わせると, $V \in \mathfrak{I}_1$, V の singular values を $\{\mu_j\}$ として, もし $\sum \mu_j^{1/p} < \infty$ ならば

$$\|\xi(\cdot; A, A_0)\|_{L^p} \le \sum_{j=1}^{\infty} \|\xi(\cdot; A_j, A_{j-1})\|_{L^p} \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{1/p} < \infty$$

がしたがう. 以上の議論はやや形式的だが, 正当化は簡単にできて, 次の定理が導かれる.

定理 2. もし $q > 1$ に対して $A - A_0 \in \mathfrak{I}_{1/q}$ を満たすならば $\xi(\cdot; A, A_0) \in L^q(\mathbb{R})$. さらに,

$$\|\xi\|_{L^q} \le \|A - A_0\|_{\mathfrak{I}_{1/q}}.$$

[注意] この評価は, $q = 1$ の場合は, 上に述べた Birman-Krein による古典的な評価である. 既に, この結果の精密化が B. Simon と D. Hundertmark によって発表されている ([HS]). □

§3. 定理 1 の証明のスケッチ

以下では, $\omega \in \Omega$ はしばしば省略される. 例えば, $H_\Lambda = H_\Lambda^\omega$ と書くことにする. $E_0 \in G \equiv [B_-, B_+]$ とする. $H_\Lambda - H_0$ はコンパクトな台を持ち, 相対コンパクトな摂動なので, G 内の H_Λ の固有値は有限個である. G 内の H_Λ の固有値を $E_1, E_2, \ldots$, 固有関数を $\psi_1, \psi_2, \ldots$ (有限個) と書く. $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ を, 十分小さな $\eta > 0$ に対して

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} 1, & (\lambda \le -\eta/2), \\ 0. & (\lambda \ge \eta/2). \end{cases} \qquad 0 \le \rho(\lambda) \le 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

を満たす単調非増大関数とする. 区間 I の定義関数を χ_I と書く. すると

$$\chi_{[E_0-\eta/2,E_0+\eta/2]}(\lambda) \leq \rho(\lambda-(E_0+\eta)) - \rho(\lambda-(E_0-\eta)) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

なので, スペクトル定理により

$$E_{[E_0-\eta/2,E_0+\eta/2]}(H_\Lambda) \leq \rho(H_\Lambda-(E_0+\eta)) - \rho(H_\Lambda-(E_0-\eta))$$

を得る. ここで, スペクトル測度を $E_I(H_\Lambda)$ と書いた. したがって

$$\begin{aligned}&\bigl(H_\Lambda \text{ の } [E_0,\eta/2,E_0+\eta/2] \text{ 内の固有値の個数}\bigr)\\ &= \mathrm{Tr}(E_{[E_0-\eta/2,E_0+\eta/2]}(H_\Lambda)) \leq \mathrm{Tr}(\rho(H_\Lambda-E_0-\eta)-\rho(H_\Lambda-E_0+\eta))\end{aligned}$$

を得る. 両辺の期待値を取ると, Chebyshev の不等式により

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Bigl(\mathrm{dist}(\sigma(H_\Lambda),E_0)<\frac{\eta}{2}\Bigr) &\leq \mathbb{E}\bigl(H_\Lambda \text{ の } [E_0,\eta/2,E_0+\eta/2] \text{ 内の固有値の個数}\bigr)\\ &\leq \mathbb{E}\bigl(\mathrm{Tr}(\rho(H_\Lambda-E_0-\eta)-\rho(H_\Lambda-E_0+\eta))\bigr)\end{aligned}$$

がしたがう. そこで, 定理 1 の証明のためには右辺を評価すればよい. 右辺のトレースを次のように変形する.

$$\mathrm{Tr}\bigl(\rho(H_\Lambda-E_0-\eta)-\rho(H_\Lambda-E_0+\eta)\bigr) = -\int_{-\eta}^{\eta}\mathrm{Tr}\bigl(\rho'(H_\Lambda-E_0+\lambda)\bigr)d\lambda.$$

右辺の被積分項を書き下すと,

$$\mathrm{Tr}\bigl(\rho'(H_\Lambda-E_0+\lambda)\bigr) = \sum_j\langle\rho'(H_\Lambda-E_0+\lambda)\psi_j,\psi_j\rangle = \sum_j\rho'(E_j-E+\lambda)$$

となる. ここで, Wegner のアイデアにしたがって, エネルギーに関する微分を確率変数 λ_n に関する微分に書き換えることを考える. $V_\Lambda=\sum_{n\in\Lambda}\lambda_n v(x-n)$ を λ_n の関数と考える. すると E_j も λ_n の関数と見なせる. すると,

$$\sum_{n\in\Lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\rho(E_j-E_0-\lambda) = \rho'(E_j-E_0-\lambda)\sum_{n\in\Lambda}\frac{\partial E_j}{\partial\lambda_n}. \qquad (**)$$

一方, E_j は H_0+V_Λ の固有値なのだから, 固有値の摂動論より

$$\frac{\partial E_j}{\partial\lambda_n} = \Bigl\langle\frac{\partial V_\Lambda}{\partial\lambda_n}\psi_j,\psi_j\Bigr\rangle = \langle v(x-n)\psi_j,\psi_j\rangle.$$

したがって

$$\sum_{n\in\Lambda}\frac{\partial E_j}{\partial\lambda_n} = \Bigl\langle\Bigl(\sum_{n\in\Lambda}v(x-n)\Bigr)\psi_j,\psi_j\Bigr\rangle$$

を得る.

補題 3. $c>0$ が存在して, 任意の j, Λ に対して

$$\Bigl\langle\Bigl(\sum_{n\in\Lambda}v(x-n)\Bigr)\psi_j.\psi_j\Bigr\rangle \geq c.$$

この補題は, Kirsch-Stollmann-Stoltz [KSS] の方法に従って証明される.

これを用いると, (**) より ($\rho'(\lambda) \le 0$ に注意して)

$$-\rho'(E_j - E_0 - \lambda) \le c^{-1} \sum_{n\in\Lambda} \Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n} \rho(E_j - E_o - \lambda) \Big).$$

が分かる. この両辺の期待値を取り, j について和を取って λ に関し積分すると

$$-\sum_j \int_{-\eta}^{\eta} \mathbb{E}\Big(\rho'(E_j - E_0 - \lambda)\Big) d\lambda \le c^{-1} \sum_j \sum_{n\in\Lambda} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbb{E}\Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n} \rho(E_j - E_o - \lambda) \Big).$$

を得る. 一方, $\mathbb{E}(\cdot)$ は密度関数 $h(\lambda)$ を用いて $\mathbb{E}(g(\{\lambda_n\})) = \int \cdots \int g(\{\lambda_n\}) \prod_k h(\lambda_k) d\lambda_k$ と書けるので,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\rho(E_j - E_0 - \lambda)\Big) &= \int \cdots \int \Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\rho(E_j - E_0 - \lambda)\Big) \prod_k h(\lambda_k) d\lambda_k \\
&\le \int \cdots \int \Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\rho(E_j - E_0 - \lambda)\Big) \Big(\prod_{k\ne n} h(\lambda_k) d\lambda_k\Big) \|h\|_{L^\infty} d\lambda_k \\
&= \|h\|_{L^\infty} \int \cdots \int \Big(\rho(E_j^{m,n} - E_0 - \lambda) - \rho(E_j^{M,n} - E_0 - \lambda)\Big) \prod_{k\ne n} h(\lambda_k) d\lambda_k.
\end{aligned}$$

ここで, $E_j^{m,n}$ は $\lambda_n = m \equiv \min(\lambda_n)$ とおいた時の, $E_j^{M,n}$ は $\lambda_n = M \equiv \max(\lambda_n)$ とおいた時の H_Λ の j-番目の固有値である. ここで, 対応するシュレディンガー作用素を $H_\Lambda^{m,n}$, $H_\Lambda^{M,n}$ と書くことにすると,

$$H_\Lambda^{M,n} - H_\Lambda^{m,n} = (M - m)v(x - n) \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

である. これに対して (形式的に)SSF の L^p-理論を適用すると

$$\begin{aligned}
&\sum_j \Big(\rho(E_j^{m,n} - E_0 - \lambda) - \rho(E_j^{M,n} - E_0 - \lambda)\Big) \\
&\qquad = \mathrm{Tr}\Big(\rho(E_j^{m,n} - E_0 - \lambda) - \rho(E_j^{M,n} - E_0 - \lambda)\Big) \\
&\qquad = -\int \rho'(t - E_0 - \lambda)\xi(t; H_\Lambda^{m,n}, H_\Lambda^{M,n}) dt \\
&\qquad \le \|\rho'\|_{L^{p'}} \|\xi(\cdot; H_\Lambda^{m,n}, H_\Lambda^{M,n})\|_{L^p} \le C_p \Big(\int |\rho'| d\lambda\Big)^{1/p'} = C'_p\, \eta^{-1/p}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $1/p + 1/p' = 1$, C_p, C'_p は p にのみ依存する定数であり, $\|\xi(\cdots)\|_{L^p}$ は p と v にのみ依存する. 実際は $H_\Lambda^{M,n} - H_\Lambda^{m,n} \notin \mathfrak{I}_p$ であるが, レゾルベントを用いて上記の計算は正当化できる. これより

$$\sum_j \mathbb{E}\Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\rho(E_j - E_0 - \lambda)\Big) \le \|h\|_{L^\infty} C'_p\, \eta^{-1/p}$$

が導かれる. 以上を組み合わせて

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\mathrm{dist}(\sigma(H_\Lambda), E_0) < \frac{\eta}{2}\big) &\le \mathbb{E}\big(\mathrm{Tr}(\rho(H_\Lambda - E_0 - \eta) - \rho(H_\Lambda - E_0 + \eta))\big) \\
&\le c^{-1} \sum_j \sum_{n\in\Lambda} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbb{E}\Big(-\frac{\partial}{\partial\lambda_n}\rho(E_j - E_o - \lambda)\Big) d\lambda \\
&\le c^{-1} |\Lambda| (2\eta) \cdot \|h\|_{L^\infty} C'_p\, \eta^{-1/p} = C\, \eta^{1/p'} |\Lambda|
\end{aligned}$$

が得られ, $q = p^{-1}$ とおけば, 定理1の不等式がしたがう. □

参考文献

[CHN] J. M. Combes, P. D. Hislop, S. Nakamura: The L^p-theory of the spectral shift function, the Wegner estimate, and the integrated density of states for some random Schrödinger operators, To appear in Commun. Math. Phys.

[CL] Carmona, R., Lacroix, J.: SPECTRAL THEORY OF RANDOM SCHRÖDINGER OPERATORS. Birkhäuser 1990.

[KSS] W. Kirsch, P. Stollmann, and G. Stolz: Localization for random perturbations of periodic Schrödinger operators, Random Operators and Stochastic Equations **6**, 241 – 268 (1998).

[HS] Hundertmark, D., Simon, B.: An optimal L^p-bound on the Krein spectral shift function, Preprint (Sep 18, 2000): `http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/` より入手可能.

[K] Kirsch, W.: Random Schrödinger operators. In SCHRÖDINGER OPERATORS (H. Holden, A. Jensen eds.), Springer Lecture Notes in Physics **345** (1989).

[Y] Yafaev, D. R.: MATHEMATICAL SCATTERING THEORY: GENERAL THEORY. AMS 1992.