数理解析研究所講究録 1208 巻 2001 年 36-51

Jäger-Rejto Approach on Growth Estimates of Generalized Eigenfunctions and Principle of Limiting Absorption

東京都立大理学研究科 望月 清 (Kiyoshi MOCHIZUKI)

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University
Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan

Abstract

In this paper we consider the Schrödinger operators with oscillating long-range potentials. We make an improvement of a result of Jäger and Rejto on the growth estimate of generalized eigenfunctions, and apply it to show the principle of limiting absorption. If the operators are of the form $-\Delta + c\sin b|x|/|x| + V_3(x)$, $V_3(x) = O(|x|^{-1-\delta})$ $(\delta > 0)$ as $|x| \to \infty$, the principle is established for the interval $J \subset \mathbf{R}_+$ satisfying $\mathrm{dist}\{J, b^2/4\} > |bc|/\min\{2, 4\delta\}$. If the operators are of the form $-\Delta + c\sin(\log|x|)/\log|x| + V_3(x)$, $V_3(x) = O(|x|^{-1}\{\log|x|\}^{-1-\delta})$, the principle is established for J satisfying $\inf J > |c|/4\delta$.

1. 序

1943 年 F. Rellich [13] は次の結果を得ている。

定理 R $B^c(R_0) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x| > R_0\}$ とし、$u = u(x) \in C^2(B^c(R_0))$ は

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in B^c(R_0)$$

の解とする。$\lambda > 0$ で $\mathrm{supp} u \neq \mathrm{compact}$ なら、

$$\liminf_{R\to\infty} \int_{S(R)} \left\{|\partial_r u|^2 + \lambda |u|^2\right\} dS > 0.$$

ここに $S(R) = \{x; |x| = R\}$, また $r = |x|$.

これと Sommerfeld radiation condition ([16])

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S(r)} |\partial_r u \mp i\sqrt{\lambda} u|^2 dS = 0$$

を合わせて

定理 S $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を外部領域、$u \in C^2(\Omega)$ は

$$-\Delta u = \lambda u \ \ in\ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

の解とする。$\lambda > 0$ で u が radiation condition を満たすなら $u \equiv 0$.

注意 境界条件は Neumann でも Robin でもよい。

これは Green の公式から従う。実際、$\Omega(r) = \Omega \cap \{|x| < r\}$ とすると

$$0 = \int_{\Omega(r)} \{\bar{u}\Delta u - u\Delta\bar{u}\}dx = \int_{S(r)} \{\bar{u}\partial_r u - u\partial_r\bar{u}\}dS$$

より

$$\int_{S(r)} |\partial_r u \mp i\sqrt{\lambda}u|^2 dS = \int_{S(R)} \{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\}dS$$

が得られる。radiation condition と Rellich の定理から supp$u$ = compact であるが u が x について analytic だから $u \equiv 0$ が従う。

定理 S は極限吸収の原理の証明に欠かせない。

Rellich の定理を Schrödinger 作用素の場合に拡張する試みは Povzner ([12]) 等によってなされていた。本格的な結果は次の Kato の定理である ([8])。

定理 K $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を外部領域、$u \in C^2(\Omega)$ は

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u, \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

の解とする。$V(x), \lambda$ が

$$\limsup_{r\to\infty} r|V(x)| = K \geq 0, \quad \lambda > \frac{K^2}{4}$$

を満たし supp$u \neq$ compact なら、$\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{r\to\infty} r^{K/\sqrt{\lambda}+\epsilon} \int_{S(r)} \left\{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\right\} dS = \infty.$$

注意 $\lambda > K^2$ のときは上の結果は

$$\lim_{r\to\infty} r \int_{S(r)} \left\{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\right\} dS = \infty$$

と書け、半直線 (K^2, ∞) での固有値の非存在がわかる。また、$K = 0$ のときは $\forall\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{r\to\infty} r^{\epsilon} \int_{S(r)} \left\{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\right\} dS = \infty$$

となる。ここで $\epsilon = 0$ とは出来ず、その意味でこの結果は Rellich の結果より弱い。

Kato の結果はその後 Simon [15], Agmon [1], Eidus [3], Roze [14], Ikebe-Uchiyama [4], Uchiyama [17], Mochizuki [9], Jäger-Rejto [5], Eastham-Kalf [2] 等により、種々の potential に対して拡張された。これらのうち、[17], [9] では多体問題を含む homogeneous potential:

$$\limsup_{r\to\infty} \left\{\gamma^{-1} r\partial_r V(x) + V(x)\right\} \equiv E_\gamma < \infty \quad \text{for some } \gamma \in (0,2] \tag{1.2}$$

に対して growth estimate を得ている。

次の結果は Mochizuki-Uchiyama [11] に依る。

定理 MU $u \in C^2(\Omega)$ を (1.1) の解とし、$V(x)$ が (1.2) を満たすとする。$\lambda > E_2$ で $\mathrm{supp}\, u \neq$ compact なら、$\lambda > E_\gamma \geq E_2$ なる $\forall\gamma \in (0,2]$ に対して

$$\liminf_{r\to\infty} r^{\gamma/2} \int_{S(r)} \left\{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\right\} dS > 0.$$

(1.2) を満たす例として von Neumann-Wigner 型 potential

$$V(x) = \frac{c\sin br}{r} + V_3(x), \quad c,\ b \in \mathbf{R}\backslash\{0\} \tag{1.3}$$

がある。ここに $V_3(x)$ は short-range potential である。この potential に対して上の結果から次が言える。

$$\lambda > E_2 = \frac{|bc|}{2} \text{ なら} \lambda \text{ は固有値でない。}$$

一方、Kato の定理を用いれば次が言える。

$$\lambda > K^2 = c^2 \text{ なら} \lambda \text{ は固有値でない。}$$

von Neumann-Wigner 型 potential に対して最近の論文 Jäger-Rejto [6] で次の結果が示された。

定理 JR $u \in C^2(\Omega)$ を (1.1) の解とする。λ が

$$\left|\lambda - \frac{b^2}{4}\right| > \frac{|bc|}{2} \tag{1.4}$$

を満たし、$\mathrm{supp}\, u \neq$ compact なら

$$\liminf_{r\to\infty} \int_{S(r)} \left\{|\partial_r u|^2 + \lambda|u|^2\right\} dS > 0.$$

この結果は二つの意味で新しい。ひとつは $\lambda = 0$ の近くでの固有値の非存在を主張し得る点で、他は weight $r^{\gamma/2}$ で $\gamma = 0$ と取れており、Rellich の定理の真の拡張になっている点である。

この結果と Kato の定理を合わせると次が言える。

$$|c| < \frac{|b|}{\sqrt{5}+1} \text{ なら正の固有値は存在しない。}$$

実際、このときは $b^2/4 - |bc|/2 > c^2$ が成り立つ。

注意 定理 MU を使うと $|c| < |b|/4$ となり、結果は悪くなる。本来の von Neumann-Wigner potential は $c = 8, b = 2$ であり、このときは $V_3(x)$ を適当にとると $\lambda = 1$ が固有値になる。$|c|$ が大きいときは定理 MU が固有値の非存在に関する結果としては最良になっている。

一般固有関数の growth estimate は解の或 functional についての微分不等式を構成して証明される。定理 JR の証明も Kato 以来のこの方法に忠実であるが、新しい点は彼等が解の approximate phase を含む functional を採用しているところにある。approximate phase は radiation condition の定義に密接に関わっており、[6] では以前我々 (Mochizuki-Uchiyama [10]) が極限吸収の原理を示すのに用いたものと同じ phase function が使われている。 [10] では [6] に類似の functional identity を導いたが、それを直接 growth estimate の証明には使わなかった。ここではこの functional identity を出発点として一般固有関数の growth estimate を証明する。我々の結果は定理 JR の一般化で、証明はずいぶん見易いものになっている。彼等の証明は難解で follow しきれない。

potential があると radiation condition がうまく定義されるとはかぎらず、Rellich 型の定理は直接には極限吸収の原理に結びつかない。しかし、ここでは functional identity が radiation condition に関係して作られているので、極限吸収の原理も同じ λ の範囲で容易に証明できる ([10], Mochizuki [8])。

2. 仮定と結果

$\mathbf{R}^n$ での Schrödinger 作用素 $L = -\Delta + V(x)$ を考える。potential $V(x)$ は実数値で局所 L^2, 遠方で有界とする。$n \geq 4$ の場合はこの他に V の singularity の order を制限する Stummel 条件を仮定する。このとき L は定義域 $D(L) = H^2(\mathbf{R}^n)$ をもつ $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の自己共役作用素になる。

$V(x)$ には更に条件をつけるが、そのために関数 $\mu(r)$ を $r > 0$ で正値で

$$\mu(r) = o(r^{-1}) \text{ as } r \to \infty, \quad \mu(r) \in L^1([R, \infty)) \text{ for } R > 0$$

なる性質を持つものとする。以下では $\liminf_{r\to\infty} r^2\mu(r) > 0$ も仮定するが、これで一般性を失うことはない。

$(A1)$ $V(x)$ は

$$V(x) = V_1(r) + V_2(x) + V_3(x)$$

のように分解される。ここに、$V_1(r)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$ はそれぞれ次の意味での oscillating long-range potential, long-range potential, short range potential である：$r \to \infty$ で

$$\begin{cases} V_1(r) = O(1), \ V_1'(r) = O(r^{-1}), \\ V_1''(r) + aV_1(r) = O(\mu(r)) \ \text{ for some } a \geq 0, \end{cases}$$

$$r^{-1}V_2(x)=O(\mu(r)),\quad \nabla V_2(x)=O(\mu(r)),$$
$$V_3(r)=O(\mu(r)).$$

$(A2)$ $(A1)$ の μ に対して $\exists\mu_j=\mu_j(r),\ j=1,2$ で

(2.1) $$\mu(r)^2\le\mu_1(r)\mu_2(r),\quad 0<\mu_1(r)\le\mu_2(r).$$

更に

$$\varphi_j(r)=\left\{\int_r^\infty\mu_j(s)ds\right\}^{-1},\quad j=1,2$$

とおくとき、次が成り立つ。

(2.2) $$\frac{\varphi_1'(r)}{\varphi_1(r)}\le\frac{1}{r}\quad\text{for } r>R_0>0,$$

(2.3) $$E^{\pm}(\varphi_1)\equiv\limsup_{r\to\infty}\left[\pm\left\{\frac{\varphi_1(r)}{2\varphi_1'(r)}V_1'(r)+V_1(r)\right\}\right]<\infty.$$

$(A3)$ $L=-\Delta+V(x)$ は unique continuation property をもつ。

$(A1)$ を満たす potential に対して

$$E_2^{\pm}=\limsup_{r\to\infty}\left[\pm\left\{\frac{r}{2}V_1'(r)+V_1(r)\right\}\right]$$

とおくと次の定理が成り立つ。

定理 1 $(A1)$ のもとで u を

(2.4) $$-\Delta u+V(x)u=\lambda u,\quad x\in\mathbf{R}^n$$

の解とする。λ が

(2.5) $$\lambda>\frac{a}{4}+E_2^+\quad\text{or}\quad\lambda<\frac{a}{4}-E_2^-$$

を満たし、supp$u\ne$ compact なら

$$\liminf_{r\to\infty}\int_{S(r)}\{|\partial_r u|^2+|u|^2\}dS>0.$$

$|x|$ が大きい x と $\zeta=\lambda\pm i\epsilon,\ \epsilon>0,$ に対して

$$k_{\pm}(x,\zeta)=-i\sqrt{\zeta-\eta V_1(r)-V_2(x)}+\frac{n-1}{2r}+\frac{-\eta V_1'(r)}{4\{\lambda-\eta V_1(r)-}$$

$$\eta=\eta(\zeta)=\frac{4\zeta}{4\zeta-a}$$

とおく。ここに $\sqrt{\cdot}$ は $\mathrm{Im}\sqrt{\cdot} > 0$ なる枝をとっている。λ が (2.5) を満たすとき、$|x|$ が十分大きければ $\sqrt{\lambda - \eta(\lambda)V_1(r) - V_2(x)} > 0$ ([10], Lemma 8.2) となるから極限

$$k_\pm(x,\lambda) \equiv \lim_{\epsilon\to 0} k_\pm(x,\zeta) = \mp i\sqrt{\lambda - \eta(\lambda)V_1(r) - V_2(x)}$$
$$+\frac{n-1}{2r} + \frac{-\eta(\lambda)V_1'(r)}{4\{\lambda - \eta(\lambda)V_1(r) - V_2(x)\}}$$

が存在する。これを用いて radiation condition は次のように定義される。

$$\liminf_{r\to\infty} \int_{S(r)} |\partial_r u + k_\pm(x,\lambda)u|^2 dS = 0.$$

極限吸収の原理を示すのに $(A2)$, $(A3)$ も使われる。区間 $J \subset \mathbf{R}_+$ を

(2.6) $$\inf J > \frac{a}{4} + \max\{E^+, E^+(\varphi_1)\} \quad \text{or} \quad \sup J < \frac{a}{4} - \max\{E^-, E^-(\varphi_1)\}$$

のようにとり

$$K_\pm = \{\zeta = \lambda \pm i\epsilon; \lambda \in J, 0 < \epsilon \le \epsilon_0\}$$

とおく。ここに $\epsilon_0 > 0$ は小さい定数である。次の方程式を考える。

(2.7) $$-\Delta u + V(x)u - \zeta u = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \ \zeta \in K_\pm.$$

下の定理では norm

$$\|f\|_\xi = \left\{\int_{\mathbf{R}^n} \xi(r)|f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} < \infty \quad \text{for} \quad \xi(r) > 0.$$

をもつ重み付き L^2−space $L^2_\xi = L^2_\xi(\mathbf{R}^n)$ が用いられる。

定理 2 $(A1) \sim (A3)$ を仮定し、J は (2.6) を満たすとする。Schrödinger 作用素 L の resolvent $R(\zeta) = (L-\zeta)^{-1}$, $\zeta \in K_\pm$, は $L^2_{\mu_1^{-1}}$ から $L^2_{\mu_2}$ への作用素として $K_\pm$ の閉包 $\bar{K}_\pm$ に連続的に拡張でき、

(2.8) $$\sup_{\zeta \in K_\pm} \|R(\zeta)f\|_{\mu_2} \le C\|f\|_{\mu_1^{-1}}, \quad C = C(K_\pm) > 0$$

が成り立つ。さらに $R(\lambda \pm i0)f$ は radiation condition を満たす。

3. 恒等式

u を (2.7) の解とする。実数値関数 $\sigma = \sigma(r)$ に対して $u_\sigma = e^\sigma u$, $f_\sigma = e^\sigma f$ とおくと u_σ は

$$-\Delta u_\sigma + 2\sigma'\tilde{x}\cdot\nabla v + \left(V - \zeta + \sigma'' + \frac{n-1}{r}\sigma' - \sigma'^2\right)u_\sigma = f_\sigma$$

を満たす。更に $\theta_{\sigma\pm}=\nabla u_\sigma+k_\pm(x,\zeta)u_\sigma$ とおくと上式は

$$-\nabla\cdot\theta_{\sigma\pm}+(k_\pm+2\sigma')\tilde{x}\cdot\theta_{\sigma\pm}+\Big(q_\pm+\sigma''+\frac{n-1}{r}\sigma'-2\sigma' k_\pm\Big)u_\sigma=f_\sigma$$

と表せる。ここに

$$q_\pm(x,\zeta)=V(x)-\lambda+\partial_r k_\pm(x,\zeta)+\frac{n-1}{r}k_\pm(x,\zeta)-k_\pm(x,\zeta)^2.$$

$k_\pm(x,\zeta)$ はこの $q_\pm(x,\zeta)$ が short-range になるように定めたものである。

$\psi=\psi(r)$, $r>0$, を滑らかな正値関数とし、上式に $2\psi\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm}$ を乗じ、実部をとって $B(R,t)=\{x;R<|x|<t\}$ で部分積分する。

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\{2\nabla\cdot\theta_{\sigma\pm}(\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm})\}&=-\mathrm{Re}\nabla\cdot\Big\{2\theta_{\sigma\pm}(\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm})-\tilde{x}|\theta_{\sigma\pm}|^2\Big\}\\&+\Big(2\mathrm{Re}k_\pm-\frac{n-1}{r}\Big)|\theta_{\sigma\pm}|^2-2\mathrm{Re}k_\pm|\tilde{x}\cdot\theta_{\sigma\pm}|^2\\&+\frac{2}{r}\{|\theta_{\sigma\pm}|^2-|\tilde{x}\cdot\theta_{\sigma\pm}|^2\}+2\mathrm{Re}\{(\nabla-\tilde{x}\partial_r)k_\pm\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm}u_\sigma\}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}-2\mathrm{Re}\{\sigma'^2u_\sigma\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm}\}&=-\mathrm{Re}\nabla\cdot\{\tilde{x}\sigma'^2|u_\sigma|^2\}\\&\Big\{2\sigma'\sigma''+\sigma'^2\Big(\frac{n-1}{r}-2\mathrm{Re}k_\pm\Big)\Big\}|u_\sigma|^2\end{aligned}$$

に注意して次の等式が得られる。

命題 1 u を (2.7) の解とすると

$$\begin{aligned}\Big\{\int_{S(t)}-\int_{S(R)}\Big\}\psi\left\{2|\tilde{x}\cdot\theta_{\sigma\pm}|^2-|\theta_{\sigma\pm}|^2+\sigma'^2|u_\sigma|^2\right\}dS=\int_{B(R,t)}\psi\Big[\\ \Big(2\mathrm{Re}k_\pm-\frac{\psi'}{\psi}-\frac{n-3}{r}\Big)|\theta_{\sigma\pm}|^2+2\Big(2\sigma'+\frac{\psi'}{\psi}-\frac{1}{r}\Big)|\tilde{x}\cdot\theta_{\sigma\pm}|^2\\ +2\mathrm{Re}\{(\nabla-\tilde{x}\partial_r)k_\pm\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm}u_\sigma\}+2\mathrm{Re}\Big\{\Big(q_\pm+\sigma''+\frac{n-1}{r}\sigma'\\ -2\sigma'k_\pm\Big)u_\sigma\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm}\Big\}.+\Big\{2\sigma'\sigma''+\Big(\frac{n-1}{r}+\frac{\psi'}{\psi}-2\mathrm{Re}k_\pm\Big)\sigma'^2\Big\}|u_\sigma|^2\Big]dx\\ -\int_{B(R,t)}2\psi\mathrm{Re}\{f_\sigma\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_{\sigma\pm}\}dx.\end{aligned}$$

仮定 $(A1)$ から次の補題が示される ([10], Proposition 8.2)。

補題 1 $R_0 > 0$ を十分大きくとると $\exists C_j > 0,\ j = 1 \sim 5$ で $\forall |x| > R_0,\ \forall \zeta \in K_\pm$ に対して

$$|q_\pm(x,\zeta)| \le C_1 \mu(r), \tag{3.1}$$

$$|k_\pm(x,\zeta)| \le C_2, \quad \mp \mathrm{Im} k_\pm(x,\zeta) \ge C_3, \tag{3.2}$$

$$|(\nabla - \tilde{x}\partial_r) k_\pm(x,\zeta)| \le C_4 \mu(r), \quad \tilde{x} = x/r, \tag{3.3}$$

$$\left| 2\mathrm{Re} k_\pm(x,\lambda) - \frac{n-1}{r} - \frac{-\eta V_1'(r)}{2(\lambda - \eta V_1(r))} \right| \le C_5 \mu(r). \tag{3.4}$$

4. 定理 1 の証明

u を (2.4) の解とする。一般性を失うことなく u は実数値であると仮定してよい。このとき

$$|\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}|^2 = (\mathrm{Im} k_\pm u_\sigma)^2 + (\partial_r u_\sigma + \mathrm{Re} k_\pm u_\sigma)^2$$

となるので

$$|u_\sigma| \le C |\tilde{x} \cdot \theta_{\sigma\pm}| \tag{4.1}$$

が成り立つ。

以下では命題 1 の等式を用いて定理 1 の証明をするが、二つの等式のうち k_+ が関わっている方を用いる。簡単のために $k = k_+,\ q = q_+,\ \theta_\sigma = \theta_{\sigma+}$ と書く。

次の 2 つの functional を考える。

$$F(r) = \int_{S(r)} (2|\tilde{x} \cdot \theta|^2 - |\theta|^2) dS, \quad \theta = \theta_0 = \nabla u + \tilde{x} k u,$$

$$F_{\sigma,\tau}(r) = \int_{S(r)} \left\{ 2|\tilde{x} \cdot \theta_\sigma|^2 - |\theta_\sigma|^2 + (\sigma'^2 - \tau)|u_\sigma|^2 \right\} dS.$$

ここに正値関数 $\sigma = \sigma(r),\ \tau = \tau(r)$ は後で定める。

[付加条件のもとでの定理 1 の証明]　ここでは付加条件

$$\exists r_k \to \infty \ \text{ such that } \ F(r_k) > 0 \tag{4.2}$$

のもとで定理 1 を証明する。

命題 1 で $\zeta = \lambda,\ f = 0,\ \sigma \equiv 0,\ \psi \equiv 1$ とおき、両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_{S(t)} \left[\left(2\mathrm{Re} k - \frac{n-3}{r} \right) |\theta|^2 - \frac{2}{r} |\tilde{x} \cdot \theta|^2 \right.$$

$$+2\mathrm{Re}\{(\nabla-\tilde{x}\partial_r)k\cdot\tilde{\theta}u\}+2\mathrm{Re}\left\{qu\tilde{x}\cdot\bar{\theta}\right\}\Big]dS.$$

(3.4) および (3.1), (3.3), (4.1) を用いれば $t>\exists R_1\geq R_0$ で

$$\frac{d}{dt}F(t)\geq\int_{S(t)}\Big\{\Big(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda-\eta V_1)}-C_6\mu\Big)(2|\tilde{x}\cdot\theta|^2-|\theta|^2)$$

$$+2\Big(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda-\eta V_1)}+\frac{1}{r}-C_6\mu\Big)(|\theta|^2-|\tilde{x}\cdot\theta|^2)\Big\}dS.$$

更に t を十分大きくとると条件 (2.5) のもとで右辺第 2 項は非負になり、$t>\exists R_2\geq R_1$ で次の不等式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}F(t)\geq\Big(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log|\lambda-\eta V_1|-C_6\mu\Big)F(t). \tag{4.3}$$

仮定 (4.2) より $r_k\geq R_2$ ととれるから両辺を (r_k,t) で積分すれば

$$\frac{F(t)}{F(r_k)}\geq\left\{\frac{\lambda-\eta V_1(t)}{\lambda-\eta V_1(r_k)}\right\}^{1/2}\exp\Big\{-2C_6\int_{r_k}^{\infty}\mu(r)dr\Big\}.$$

これより $F(t)$ が遠方で一様に正となることがわかるが、

$$F(t)\leq\int_{S(t)}|\tilde{x}\cdot\theta|^2dS\leq C\int_{S(t)}\{|\partial_r u|^2+|u|^2\}dS$$

なので、定理 1 が証明される。 □

[(4.2) が成り立たない場合の定理 1 の証明] この場合は $F(t)$ が次の条件を満たす。

$$F(t)\leq 0 \text{ for } r>\exists R_3\geq R_2,\quad \mathrm{supp}F\neq\mathrm{compact}. \tag{4.4}$$

命題 1 で $\psi=r^2$ ととると $\psi'/\psi=2/r$ であるから

$$\Big\{\int_{S(t)}-\int_{S(R)}\Big\}r^2\left\{2|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2-|\theta_\sigma|^2+\sigma'^2u_\sigma^2\right\}dS=\int_{B(R,t)}r^2\Big[$$

$$\Big(2\mathrm{Re}k-\frac{n-1}{r}\Big)|\theta_\sigma|^2+\Big(4\sigma'+\frac{2}{r}\Big)|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2$$

$$+2\mathrm{Re}\{(\nabla-\tilde{x}\partial_r)k\cdot\tilde{\theta}_\sigma u_\sigma\}+2\mathrm{Re}\Big\{\Big(q+\sigma''+\frac{n-1}{r}\sigma'$$

$$-2\sigma'k\Big)u_\sigma\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_\sigma\Big\}+\Big\{2\sigma'\sigma''+\Big(\frac{n+1}{r}-2\mathrm{Re}k\Big)\sigma'^2\Big\}u_\sigma^2\Big]dx.$$

これと恒等式

$$\Big\{\int_{S(t)}-\int_{S(R)}\Big\}r^2\tau u_\sigma^2dS=\int_{B(R,t)}r^2\Big[2\mathrm{Re}\left\{\tau u_\sigma\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_\sigma\right\}+\Big(\frac{2}{r}\tau+\tau'\Big)u_\sigma^2\Big]dx$$

の差をとり、両辺を t で微分する。

$$4\sigma'\left\{|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2-\mathrm{Re}(ku_\sigma\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_\sigma)\right\}=4\sigma'\left\{|\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma+i\mathrm{Im}ku_\sigma|^2\right.$$
$$\left.-\mathrm{Re}ku_\sigma(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)-(\mathrm{Im}k)^2u_\sigma^2\right\}$$
$$=4\sigma'\left\{(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)^2-\mathrm{Re}ku_\sigma(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)\right\}$$

に注意すると、前と同様に、$t>\exists R_4\geq R_3$ で

$$\frac{d}{dt}\left[t^2F_{\sigma,\tau}(t)\right]\geq\int_{S(t)}r^2\left[\left(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda-\eta V_1)}-C_6\mu\right)|\theta_\sigma|^2-\frac{2}{r}|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2\right.$$
$$+4\sigma'(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)^2+2\left(\sigma''+\frac{n-1}{r}\sigma'-2\sigma'\mathrm{Re}k-\tau\right)u_\sigma(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)$$
$$\left.+\left\{2\sigma'\sigma''+\left(\frac{2}{r}+\frac{\eta V_1'}{2(\lambda-\eta V_1)}-C_5\mu\right)\sigma'^2-\frac{2}{r}\tau-\tau'\right\}u_\sigma^2\right]dS.$$

従って

$$2\left(\sigma''+\frac{n-1}{r}\sigma'-2\sigma'\mathrm{Re}k\right)u_\sigma(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)$$
$$\leq 2\sigma'(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)^2+\frac{1}{2}\sigma'\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}+\frac{n-1}{r}-2\mathrm{Re}k\right)^2u_\sigma^2,$$
$$-2\tau u_\sigma(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)\leq 2\sigma'(\partial_r u_\sigma+\mathrm{Re}ku_\sigma)^2+\frac{1}{2}\sigma'^{-1}\tau^2u_\sigma^2$$

に注意れば、次の不等式が得られる。

(4.5)
$$\frac{d}{dr}\left[t^2F_{\sigma,\tau}(t)\right]\geq-\left\{\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda-\eta V_1)}-C_6\mu\right\}t^2F_{\sigma,\tau}(t)+\int_{S(t)}r^2\left[\right.$$
$$2\left(\frac{-\eta V_1'}{2(\lambda-\eta V_1)}+\frac{1}{r}-C_6\mu\right)|\tilde{x}\cdot\theta_\sigma|^2-\left(\frac{1}{2}\sigma'^{-1}\tau^2+\tau'+\frac{2}{r}\tau\right)u_\sigma^2$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sigma'\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}+\frac{n-1}{r}-2\mathrm{Re}k\right)^2u_\sigma^2+2\left\{\sigma'\sigma''+\left(\frac{1}{r}-C_7\mu\right)\sigma'^2\right\}u_\sigma^2\right]dS.$$

ここに $C_7=C_5+C_6$.

さて、定数 $m\geq 1$, $1/3<\epsilon<1$ に対して σ,τ を

(4.6)
$$\sigma(r)=\frac{m}{1-\epsilon}r^{1-\epsilon},\quad \tau(r)=r^{-2\epsilon}\log r$$

とおく。$r\to\infty$ で

$$\frac{1}{2}\sigma^{-1}\tau^2+\tau'+\frac{2}{r}\tau\leq\frac{1}{2m}r^{-3\epsilon}(\log r)^2+2r^{-1-2\epsilon}(\log r+1)=o(r^{-1}),$$
$$\frac{1}{2}\sigma'\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}+\frac{n-1}{r}-2\mathrm{Re}k\right)^2=mO(r^{-2-\epsilon}),$$

$$\sigma'\sigma'' + \left(\frac{1}{r} - C_7\mu\right)\sigma'^2 = \{1 - \epsilon - o(1)\}m^2 r^{-1-2\epsilon}$$

となることに注意する。(4.5) の積分で第 1 、 3 項は十分大きな t に対して非負であり、第 2 、 4 項はそれぞれ第 1 、 3 項に吸収されるから、$m \geq 1, t > \exists R_5 \geq R_4$ で (4.3) と同様の次の不等式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\left[t^2 F_{\sigma,\tau}(t)\right] \geq -\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\log|\lambda - \eta V_1| - C_8\mu\right\}t^2 F_{\sigma,\tau}(t).$$

仮定 (4.4) より $\int_{S(R)} u_\sigma^2 dx > 0, \exists R > R_5$. よって $F_{\sigma,\tau}(R) \to \infty$ as $m \to \infty$. そこで m を $F_{\sigma,\tau}(R) > 0$ が成り立つようにとって fix し、前の場合と同様な手順をふめば、$t^2 F_{\sigma,\tau}(t)$ が $t > R$ で一様に正になることがわかる。

さて、$F_{\sigma,\tau}(t) > 0$ は

$$F_{\sigma,\tau}(t) = e^{2\sigma}\left\{F(t) + \sigma'\frac{d}{dt}\int_{S(t)} u^2 dS + (2\sigma'^2 - \tau + 2\sigma'\mathrm{Re}\rho')\int_{S(t)} u^2 dS\right\}$$

のように表されるが、仮定 (4.4) より $F(t) \leq 0$. また (4.6) から十分大きな t に対しては右辺の第 3 項も非正となる。よって

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)} |u|^2 dS > 0$$

が十分大きな t について成り立ち、定理が証明される。 □

5. 定理 2 の証明

$f \in L^2, \zeta \in K_\pm$ に対して (2.7) の解は $u = R(\zeta)f$ で与えられる。この解について極限吸収の原理（定理 2）が定理 1 と次の 3 つの補題を用いて証明される。

補題 2 (i) $\forall R > 0$ に対して

$$\frac{\varphi_1'(r)}{\varphi(r)} = \mu_1(r)\varphi_1(r) \notin L^1([R,\infty)).$$

(ii) $\exists R_6 \geq R_5, 0 < \exists d < 1$ で $\forall \zeta = \lambda \pm i\epsilon \in K_\pm, \forall r > R_5$ に対して

$$2\mathrm{Re}k_\pm + \frac{(1-d)\varphi_1'(r)}{\varphi_1(r)} - \frac{n-1}{r} \geq 0.$$

証明 (i) $\varphi_1(r) \to \infty$ as $r \to \infty$ に注意すると

$$\int_R^r \frac{\varphi_1'(s)}{\varphi_1(s)}ds = \log\left\{\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(R)}\right\} \to \infty \quad \text{as } r \to \infty$$

より、(i) が示される。

(ii) $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta-\eta V_1-V_2}>0$ だから $k_\pm$ の定義より

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Re}k_\pm+\frac{(1-d)\varphi_1'}{\varphi_1}-\frac{n-1}{r}&\ge\mathrm{Re}\frac{-\eta V_1'}{2(\zeta-\eta V_1)}+\frac{(1-d)\varphi_1'}{\varphi_1}-C\mu\\
&=\left[\frac{(\lambda-a/4-V_1)\{\lambda-a/4-(2\varphi_1')^{-1}\varphi_1V_1'-V_1\}+\epsilon^2}{(\lambda-a/4-V_1)^2+\epsilon^2}-d\right]\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}-C\mu.
\end{aligned}
$$

よって (2.6) と補題 2 (i) より d を小さく、R_5 を大きくとれば (ii) が示される。 □

補題 3 $\zeta\in K_\pm$, $f\in L^2_{\mu_1^{-1}}$ とし、$u=R(\zeta)f$ とする。このとき $\forall R\ge\exists R_6\ge R_5$ に対して

$$
\|\theta_\pm\|^2_{\varphi_1',B^c(R)}\le C\left\{\|u\|^2_{\mu_2}+\|f\|^2_{\mu_1^{-1}}\right\}.
$$

証明 命題 1 で $\sigma=0$, $\psi=\chi\varphi_1$, $R>R_5$ とおく。ここに $\chi=\chi(r)$ は $\chi(r)=0$ $(r<R)$, $=1$ $(r>R+1)$ なる滑らかな関数である。

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad \int_{S(t)}\varphi_1(2|\tilde{x}\cdot\theta_\pm|^2-|\theta_\pm|^2)dS&=\int_{B(R,t)}\chi\varphi_1\bigg\{\left(2\mathrm{Re}k_\pm+\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}-\frac{n-1}{r}\right)\\
&\times|\theta_\pm|^2+2\left(\frac{1}{r}-\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)(|\theta_\pm|^2-|\tilde{x}\cdot\theta_\pm|^2)+\mathrm{Re}\left[(q_\pm u-f)\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_\pm\right]\bigg\}dx\\
&+\int_{B(R,R+1)}\chi'\varphi_1(2|\tilde{x}\cdot\theta_\pm|^2-|\theta_\pm|^2)dx
\end{aligned}
$$

が言えるので、補題 2 (ii) と (2.2) から

$$
\varphi_1\left(2\mathrm{Re}k_\pm+\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}-\frac{n-1}{r}\right)\ge C\varphi_1',\ \varphi_1\left(\frac{1}{r}-\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)\ge 0
$$

が $r>\exists R_6\ge R_5$ で成り立つ。$\varphi_1={\varphi_1'}^{1/2}\mu_1^{-1/2}$ なので (2.1) の初めの不等式から

$$
\varphi_1|q_\pm u\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_\pm|\le C\varphi_1\mu|u\tilde{x}\cdot\bar{\theta}_\pm|\le C{\varphi_1'}^{1/2}|\tilde{x}\cdot\theta|\mu_2^{1/2}|u|.
$$

更に、方程式 (2.7) の楕円性から

$$
\int_{B(R,R+1)}|\theta_\pm|^2dx\le C\left\{\|u\|^2_{\mu_2}+\|f\|^2_{\mu_1^{-1}}\right\}
$$

が従う。

よって (5.1) に Schwarz の不等式を用い、$t\to\infty$ とすれば補題が示される。 □

補題 4 $\zeta\in K_\pm$, $f\in L^2_{\mu_1^{-1}}$ とすると $\forall R>\exists R_7\ge R_6$ に対して

$$
\|u\|^2_{\mu_2,B^c(R)}\le\varphi_2(R)^{-1}\left\{\|\tilde{x}\cdot\theta_\pm\|^2_{\varphi_2',B^c(R)}+\|u\|^2_{\mu_2}+\|f\|^2_{\mu_2^{-1}}\right\}.
$$

証明 Green formula より

$$\mathrm{Im}\int_{B(r)} f\bar{u}dx = -\mathrm{Im}\int_{S(r)}(\partial_r u)\bar{u}dS - \mathrm{Im}\zeta\int_{B(r)}|u|^2dx.$$

これを変形して

$$\mathrm{Im}\zeta\int_{B(r)}|u|^2dx - \int_{S(r)}\mathrm{Im}k_\pm|u|^2dS = -\mathrm{Im}\left[\int_{S(r)}\tilde{x}\cdot\theta_\pm\bar{u}dS + \int_{B(r)}f\bar{u}dx\right].$$

(3.2) から $\mathrm{Im}\zeta\in K_\pm$ と $-\mathrm{Im}k_\pm$ は r が大きいとき 同符号で

$$\mp\mathrm{Im}k_\pm(x,\zeta)\geq C_3>0$$

が成り立つ。そこで $\mu_2(r)$ を乗じ、半直線 (R,∞) 上で積分することによって次が得られる。

$$C_3\|u\|^2_{\mu_2,B^c(R)}\leq\int_{B^c(R)}\mu_2|\tilde{x}\cdot\theta_\pm||u|dx+\varphi_2(R)^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}|f||u|dx.$$

$\mu_2^{1/2}=\varphi_2^{-1}\varphi_2'^{1/2}$ に注意して Schwarz の不等式を用いれば補題が示される。 □

[定理 2 の証明] $\{\zeta_k,f_k\}\subset K_\pm\times L^2_{\mu_1^{-1}}$ が $k\to\infty$ とともに $\{\zeta_0,f_0\}$ に収束するとする。他の場合はやさしいので $\zeta_0=\lambda\pm i0\in J$ とする。$u_k=R(\zeta_k)f_k$ とおく。

$$\varphi_1'(r)\geq\varphi_2'(r),\quad \mu_1(r)^{-1}\geq\mu_2(r)^{-1}$$

が十分大きな r に対して成り立つので、$\varphi_2(R)^{-1}\to 0$ as $R\to\infty$ に注意すれば Rellich の compactness criterion, 補題 3, 4 より次のことが言える。「$\{u_k\}$ は、$L^2_{\mu_2}$ で有界なら、同じ空間で compact になる。」更に補題 3 によって $\{u_k\}$ の全ての集積点 $u_0\in L^2_{\mu_2}$ は

$$\|\partial_r u_0+k_\pm u_0\|_{\varphi_1',B^c(R)}<\infty.$$

を満たす。

$\{u_k\}$ の有界性 (2.8) を矛盾によって証明することができる。実際、部分列、それをまた $\{u_k\}$ とかく、が存在して $\|u_k\|_{\mu_2}\to\infty$ as $k\to\infty$ とする。$v_k=u_k/\|u_k\|_{\mu_2}$ とおけば $\{v_k\}$ は $L^2_{\mu_2}$ で有界だから compact になる。各集積点 $\{\zeta_0,v_0\}$ は斉次方程式 (2.4) を満たし、更に

$$\|v_0\|_{\mu_2}=1,\quad \|\partial_r v_0+k_\pm v_0\|_{\varphi_1',B^c(R)}<\infty. \tag{5.2}$$

ここに $k_\pm=k_\pm(x,\lambda)$ である。補題 2 (i) より $\varphi_1'(r)\notin L^1([R,\infty))$. よって第 2 の不等式から

$$\liminf_{r\to\infty}\int_{S(r)}|\partial_r v_0+k_\pm v_0|^2dS=0$$

が従う。これと定理 1 とから $\mathrm{supp}v_0=\mathrm{compact}$ となるが、解にたいする unique continuation property ($A3$) より、$v_0\equiv 0$ でなければならない。しかしこれは (5.2) の第 1 式に矛盾する。

このように $\{u_k\}$ は $L^2_{\mu_2}$ で precompact になるが、定理1をもう一度用いれば、集積点は唯ほとつ、即ち $\{u_k\}$ それ自体が収束列になっていることがわかり、定理の証明が完結する。 □

6. 定理 1, 2 の応用

nonoscillating potential について次の結果が成り立つ。これは良く知られている結果の一般化になっている。

系 1 $V(x) = V_2(x) + V_3(x)$ が $(A1) \sim (A3)$ を $\mu_j(r) = \mu(r)$ として満たしているとする。このとき定理 1 が $\forall\lambda > 0$ に対して成り立ち， 定理 2 が $\mu_j = \mu$ として $\forall J \subset \mathbf{R}_+$ に対して成り立つ。

証明 $E_2^\pm = 0$ は明らかである。

$$\varphi(r) = \left\{\int_r^\infty \mu(s)ds\right\}^{-1}$$

とおけば $(2\varphi')^{-1}\varphi V_2 = (\varphi\mu)^{-1}V_2 \to 0$ as $r \to \infty$ より $E^\pm(\varphi) = 0$ も示される。 □

以下では oscillating long-range potential についての応用例を述べる。

系 2 V を

$$V(x) = \frac{c\sin br}{r} + V_3(x) \tag{6.1}$$

とする。ただし $V_3(x) = O(r^{-1-\delta})$ *as* $|x| \to \infty$. このとき定理 1 が (1.4) を満たす $\forall\lambda > 0$ に対して成り立ち、定理 2 が

$$\mathrm{dist}\left\{J, \frac{b^2}{4}\right\} > \frac{1}{\min\{2, 4\delta\}}|bc| \tag{6.2}$$

を満たす区間 J に対して成り立つ。

証明 $V(x) = c\sin(br)/r + V_3(x)$ が $a = b^2$, $\mu = (1+r)^{-1-\min\{1,\delta\}}$ として $(A1)$ を満たすのは明らかである。また $E_2^\pm = E_2 = \limsup_{r\to\infty}\{(1/2)rV_1'(r) + V_1(r)\} = |bc|/2$ だから定理 1 は (1.4) を満たす λ について成り立っている。

次に J を (6.2) を満たすようにとる。このとき正数の組み (α, β) で

$$0 < \alpha \le \beta \le 1, \quad \alpha + \beta \le 2\min\{1, \delta\},$$

$$\mathrm{dist}\left\{J, \frac{b^2}{4}\right\} > E_{2\beta} = \frac{1}{2\beta}|bc|.$$

を満たすものがとれる。$\mu_1 = (1+r)^{-1-\beta}$, $\mu_2 = (1+r)^{-1-\alpha}$ とおくと $\varphi_1 = \beta(1+r)^\beta$, $\varphi_2 = \alpha(1+r)^\alpha$, $\varphi_1'/\varphi_1 = \beta/(1+r)$ だから、すぐわかるように $(A2)$ がこれ等の関数について満たされ、$E^\pm(\varphi_1) = E_{2\beta}$ となる。条件 $\beta \le 1$ は (2.2) を言うのに使われる。

このように J が (2.6) を満たすことがわかり、定理 2 がこの J に対して成り立つ。□

系 3 $V(x)$ を

$$V(x) = \frac{c\sin(\log|x|)}{\log|x|} + V_3(x), \tag{6.3}$$

$V_3(x) = O(r^{-1}\{\log r\}^{-1-\delta})$ $(\delta > 0)$, また

$$V(x) = \frac{c\sin(\log\log|x|)}{\log\log|x|} + V_3(x), \tag{6.4}$$

$V_3(x) = O(|x|^{-1}\{\log|x|\}^{-1}\{\log\log|x|\}^{-1-\delta})$ *as* $|x| \to \infty$ のような関数とする。このとき定理 1 が $\forall\lambda > 0$ に対して成り立ち、定理 2 が

$$\inf J > \frac{1}{4\delta}|c|. \tag{6.5}$$

なる J に対して成り立つ。

証明 $V(x) = c\sin(\log r)/\log r + V_3(x)$ を考える。これは $a = 0$, $\mu = (1+r)^{-1}\{\log(1+r)\}^{-1-\delta}$ として $(A1)$ を満たす。更に $E_2^{\pm} = 0$ だから定理 1 は $\forall\lambda > 0$ に対して成り立つ。

次に J が (6.5) を満たすとする。このときは正数の組み (α,β) で

$$0 < \alpha \le \beta, \quad \alpha + \beta \le 2\delta,$$

$$\inf J > E_{2\beta} = \frac{1}{2\beta}|c|$$

を満たすものがとれる。$\mu_1 = (1+r)^{-1}\{\log(1+r)\}^{-1-\beta}$, $\mu_2 = (1+r)^{-1}\{\log(1+r)\}^{-1-\alpha}$ とおく。$\varphi_1 = \beta\{\log(1+r)\}^{\beta}$, $\varphi_2 = \alpha\{\log(1+r)\}^{\alpha}$, $\varphi_1'/\varphi_1 = \beta/(1+r)\log(1+r)$ なので、$(A2)$ がこれ等の関数について満たされ、$E^{\pm}(\varphi_1) = (1/2\beta)|c|$ となる。ここでは $\varphi_1'(r)/\varphi(r) = o(r^{-1})$ なので $\beta \le 1$ という制限は必要としない。

このように J が (2.6) を満たすことがわかり、定理 2 がこの J について成り立つ。.□

注意 系 3 では関数 $q = q(x,\zeta)$ が系 2 十分な減衰度 $O(r^{-1-\delta})$ を持っていないので $\mu = (1+r)^{-1-\delta}$ ととることは出来ない。

注意 (6.3) で $V_3(x) = O(r^{-1-\delta})$, (6.4) で $V_3(x) = O(r^{-1}\{\log r\}^{-1-\delta})$ なら条件 (6.5) は $\forall J \subset \mathbf{R}_+$ で置き換えることができる ([10], Example I-2)。

REFERENCES

[1] S. Agmon, *Lower bounds of solutions of Schrödinger operators*, J. d'Anal. Math. **23** (1970), 1-25.

[2] M. S. Eastham and H. Kalf, *Schrödinger type operators with continuous spectra*, Note in Mathematics **65**, Pitman, Boston, London, Melbourne, 1982.

[3] D. M. Eidus, *The principle of limiting amplitude*, Uspekhi Math. Nauk **24** (1969), 91-156 (Russian Math. Surveys, **24** (1969), 97-167).

[4] T. Ikebe and J. Uchiyama, *On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators*, J. Math. Kyoto Univ. **11** (1971), 425-448.

[5] W. Jäger and P. Rejto, *Limiting absorption principle for some Schrödinger operators with exploding potentials ii*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 169-194.

[6] W. Jäger and P. Rejto, *On a theorem of Mochizuki and Uchiyama about oscillating long range potentials*, preprint 1999.

[7] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 403-425.

[8] K. Mochizuki, *Growth properties of solutions of second order elliptic differential equations*, J. Math. Ktoto Univ. **16** (1976), 351-373.

[9] K. Mochizuki, *Spectral and scattering theory for second order elliptic differential operators in an exterior domain*, Lecture Notes Univ. Utah, Winter and Spring 1972.

[10] K. Mochizuki and J. Uchiyama, *Radiation conditions and spectral theory for 2-body Schrödinger operators with "oscillating" long range potentials I*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 377-408.

[11] K. Mochizuki and J. Uchiyama, *On eigenvalues in continuum of 2-body or many-body Schrödinger operators*, Nagoya Math. J. **70** (1978), 125-141.

[12] A. Ya. Povzner, *On the expansions of arbitrary functions in terms of the eigenfunctions of the operator* $-\Delta u + cu$, Math. USSR Sb. **32** (1953), 109-156.

[13] F.Rellich, *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von* $\Delta u + \lambda u = 0$ *in unendlichen Gebieten*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. bf 53 (1943), 57-65.

[14] S. N. Roze, *On the spectrum of an elliptic operator of second order*, Math. USSR Sb. **9** (1969), 183-197.

[15] B. Simon, *On positive eigenvalues of one-body Schrödinger operators*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1967), 531-538.

[16] A. Sommerfeld, *Die Greensche Funktion der Schwingungs gleichung*, Jahresber. Deutch. Math.-Verein. **21** (1912), 308-358.

[17] J. Uchiyama, *Lower boundes of growth order of solutions of Schrödinger equations with homogeneous potentials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 425-444.