

電気回路による K-dV-Burgers 系の実験

横浜国立大学大学院工学研究科 西田麻衣子 (NISHIDA Maiko)
 横浜国立大学工学部 渡辺慎介 (WATANABE Shinsuke)

戸田格子に等価な非線形 LC 回路に適当な大きさの散逸を加えることによって、K-dV-Burgers 方程式を近似的に満足する回路を作ることができる。本実験では、K-dV 系の摂動としての K-dV-Burgers 系、または Burgers 系の摂動としての K-dV-Burgers 系をこの回路によって実現し、一つのパルスの伝播と二つのパルスの相互作用の様子を観測した。

1 序論

K-dV 系に弱い散逸の加わった K-dV-Burgers 方程式は、非線形項、分散項、散逸項を併せ持つ非線形偏微分方程式である。散逸がないときは K-dV 方程式、分散を無視できるときには Burgers 方程式となる。

非線形 LC はしご型回路は、非線形波動の研究によく用いられてきた。直列なインダクタの間に、並列に非線形キャパシタを挿入した戸田格子に等価な非線形 LC 回路では、最低次のオーダーで K-dV 方程式を満足する。この回路に散逸を加えてやることによって、散逸が大きいときは Burgers 方程式、小さいときには K-dV-Burgers 方程式を近似的に満たす非線形 LC 回路を作成することができる。

本実験では、戸田格子に等価な非線形 LC 回路に加える散逸を適当に選ぶことによって、K-dV 系、K-dV-Burgers 系、Burgers 系の回路を実現し、K-dV-Burgers 系を K-dV 系や Burgers 系の性質と比較しながら、一つのパルスの伝播と二つのパルスの追い越しの様子を観測した。

2 非線形 LC 回路

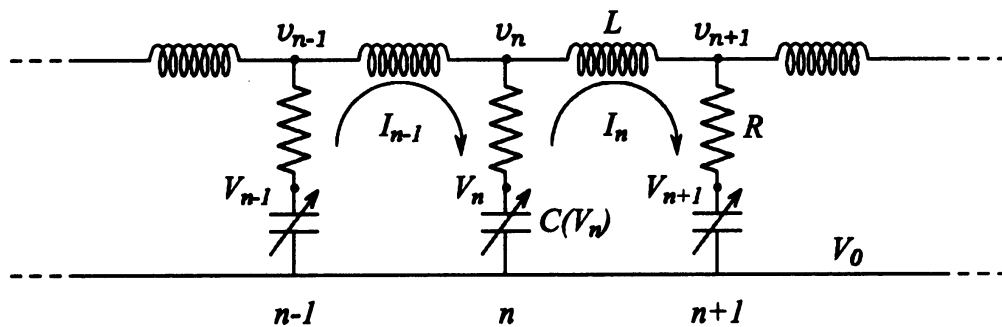


Fig. 1: 散逸のある非線形 LC はしご型回路

この実験で用いた非線形 LC 回路を Fig. 1 に示す。直列につながったインダクタの間に、抵抗と非線形キャパシタが挿入されている。抵抗がない場合が戸田格子に等価な非線形 LC 回路である。

n 番目のキャパシタに貯えられる電荷を q_n 、キャパシタに加わる電圧を V_n 、抵抗に加わる電圧を v_n 、 n 番目と $n+1$ 番目のキャパシタを結ぶインダクタに流れる電流を I_n とすると、回路方程式は

$$L \frac{dI_n}{dt} = v_{n+1} - v_n \tag{1}$$

$$\frac{dq_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \tag{2}$$

$$v_n = V_0 + V_n + R(I_{n-1} - I_n) \tag{3}$$

となる。戸田格子に等価な回路では、非線形キャパシタに貯えられる電荷は次のように与えられる。

$$q_n = q_0 + Q(V_0) \ln \left\{ 1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right\} \quad (4)$$

これらの式を次のように規格化し、連続体近似をする。

$$t : \frac{t}{\sqrt{LC(V_0)}}, \quad u_n : \frac{V_n}{F(V_0)}, \quad R_0 = \sqrt{\frac{L}{C(V_0)}}$$

さらに通減摂動法を用いる。微小量 ε を用いて電圧 u を展開する。

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

ここで、 R/R_0 を 1 のオーダーであるとして次のような変数変換をすると、

$$\begin{cases} \frac{R}{R_0} = \nu \\ \xi = \varepsilon(t - x) \\ \tau = \varepsilon^2 x \end{cases}$$

ε^4 のオーダーから、Burgers 方程式が導かれる。

$$u_\tau - \frac{1}{2} u u_\xi - \frac{1}{2} \nu u_{\xi\xi} = 0 \quad (5)$$

Burgers 系では、定常的な解として衝撃波が安定に伝播する。幅の狭いパルスは三角波となって減衰しながら伝播する。

一方 R/R_0 が小さく、 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ のオーダーであるとして次のように変数変換をすると、

$$\begin{cases} \frac{R}{R_0} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \nu \\ \xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(t - x) \\ \tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}} x \end{cases}$$

ε^3 のオーダーから、K-dV-Burgers 方程式が得られる。

$$u_\tau - \frac{1}{2} u u_\xi - \frac{1}{24} u_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{2} \nu u_{\xi\xi} = 0 \quad (6)$$

K-dV-Burgers 系ではソリトンのようなパルスが振幅を減少させながら伝播する。

K-dV-Burgers 方程式は、 $\nu \rightarrow 0$ の極限で K-dV 方程式になる。

$$u_\tau - \frac{1}{2} u u_\xi - \frac{1}{24} u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (7)$$

K-dV 系ではソリトンが定常的な解として伝播する。

これら 3 つのどの方程式の場合も、無限遠 $|\xi| \rightarrow \infty$ で $u = u_\xi = u_{\xi\xi} = \dots = 0$ であると仮定すると一次の保存量 I_1 が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I_1 &= 0 \\ I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u \, d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

さらに K-dV 系では二次の保存量も存在し、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I_2 &= 0 \\ I_2 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 d\xi \end{aligned} \quad (9)$$

で表される。一方 K-dV-Burgers 系では、二次の保存量は減衰する。

$$\frac{d}{d\tau} I_2 = -\frac{\nu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_\xi)^2 d\xi \quad (10)$$

K-dV 系では、パルスはソリトンとなって安定に伝播するが、K-dV-Burgers 系においてはパルスの振幅は距離の逆数に比例して減衰する。すなわち、振幅の逆数が距離に比例し、その傾きは回路の抵抗 R と特性インピーダンス R_0 の比で決まり、初期振幅 A_0 によらず一定である。

$$\begin{aligned} A &= A_0 \left(1 + \frac{8}{15} \frac{R}{R_0} A_0 x \right)^{-1} \\ \frac{1}{A} &= \frac{1}{A_0} + \frac{8}{15} \frac{R}{R_0} x \end{aligned} \quad (11)$$

Burgers 系において伝播する三角波の振幅は、距離の $-1/2$ に比例して減衰する。

$$A \propto x^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

3 実験方法

実験装置の概略図を Fig. 2 に示す。実験は 78 段からなる非線形 LC はしご型回路を用いて行った。回路の終端には、反射波を最小に抑えるために回路の特性インピーダンスに等しい抵抗を取り付け、直流バイアス電圧は $V_0=0V$ とした。

直列につながったインダクタは、市販のものでは抵抗が大きすぎるため自作のコイルを使い、そのインダクタンスは $L=1.5\mu H$ とした。非線形キャパシタとしては、逆バイアスの可変容量ダイオードを用いた。キャパシタンスはバイアス電圧とともに減少し、バイアス電圧 $V_0=0V$ におけるキャパシタの容量と特性電圧は $C(V_0)=327pF$, $F(V_0)=2.73V$ である。

回路の特性インピーダンスが $R_0=67.7\Omega$ であるのに対し、非線形キャパシタに直列な抵抗の大きさは、Burgers 系の実験では $R=100\Omega$, K-dV-Burgers 系では $R=2\Omega$, K-dV 系の実験では抵抗なしで行った。波形はデジタルオシロスコープ (Tektronix TDS 430A) で観測した。

4 結果と考察

4.1 パルスの伝播

まず初めに Burgers 系の回路で、幅の狭いパルスを入力した場合の波形を Fig. 3 に示す。初期振幅は 6V 程度で入力した。伝播するに従い、散逸効果と非線形効果が釣り合うことによって、波形の前よりも後ろの部分がなだらかになってくる。幅は広がり、振幅は減少しながら伝播し、40 段目付近以降の波形では三角波を形成していることが分かる。この三角波の振幅の空間変化を Fig. 4 に示した。振幅の変化の傾きは、三角波の形成に伴って徐々に一定の傾きに近付き、30 段目以降はほぼ $-1/2$ 乗となる。これは理論式 (12) と一致する。また一次の保存量 I_1 は 2.8% 以内の変化でほぼ一定であった。これは

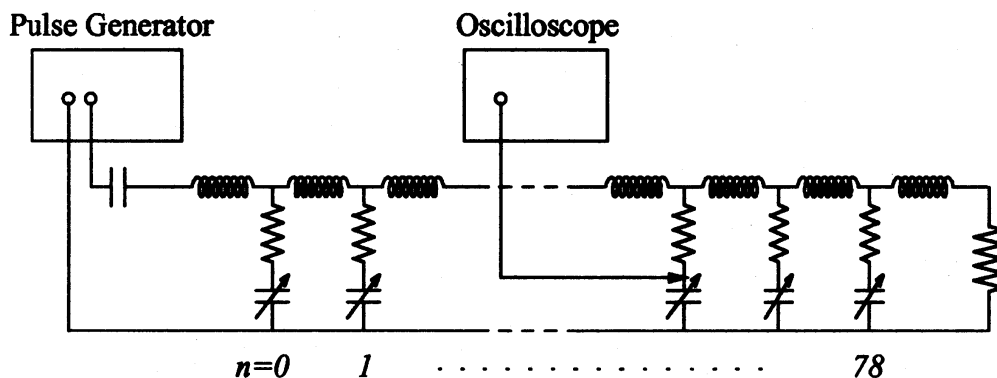


Fig. 2: 実験装置概略図

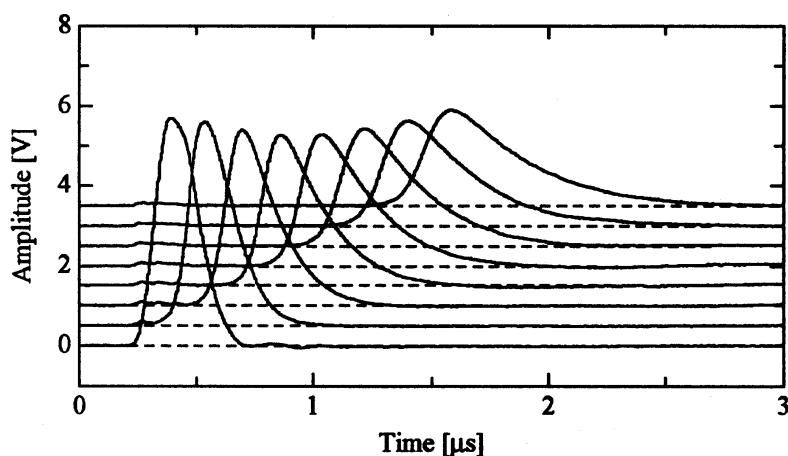
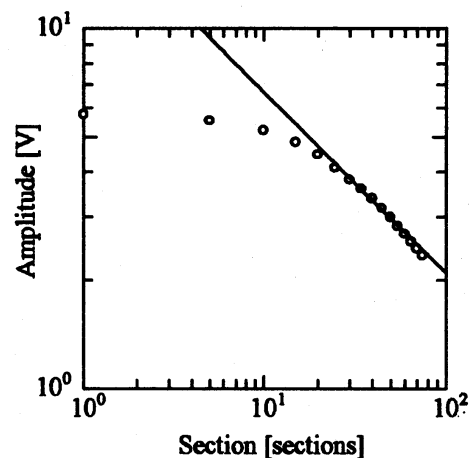


Fig. 3: Burgers系での三角波の伝播。下から順に, 1, 10, 20, ..., 70段での波形である。

Fig. 4: 三角波の振幅の減衰。図中の直線の傾きは $-1/2$ である。

三角波の振幅が減少する一方で幅が増加していることから確かめられ, これも理論 (8) と一致する結果である。

次に K-dV-Burgers 系でのパルスの伝播の様子を Fig. 5 に示す。上段が初期振幅が 6.6V 程度, 下段が 1.7V 程度のパルスを入力したときの空間変化である。

K-dV-Burgers 系においては, ソリトンを初期波形として入力すると, 散逸項の効果があるため, K-dV 系のようにソリトンとして安定には伝播しない。Fig. 5 のどちらの場合も初めはソリトンの部分だけであるが, 伝播するにつれてソリトンの後ろの部分に正の振幅を持つプラトーが形成されてくる。プラトーは徐々に後ろに長く伸びて行き, それに伴ってソリトン部分の振幅は減少して行く。

プラトーは振幅が小さく, ほとんど線形で伝播していると考えられる。パルスの振幅の大きい場合 (上段) と小さい場合 (下段) とを比較してみると, 70 段目での波形でプラトーの最後尾はほぼ同じ位置 (およそ $1.8 \sim 1.9 \mu\text{s}$ の位置) まで伸びている。ソリトンの速度は振幅が大きいほど速いので, 振幅の大きい場合の方がより多く前に進み, 後ろに取り残されるプラトーも長くなる。さらに, プラトーが長く伸びる分, 振幅の減衰が大きいということもできる。小さいパルスの場合では 70 段伝播する間に振幅は 1.7V から 1.0V 程度と, およそ 0.7V しか減少していないのに対し, 大きいパルスの場合には振幅は 6.6V から 3.0V 程度まで 3V 以上も減衰し, 初期振幅の半分以下となった。振幅が減少した分をプラトーの部分が補うかたちになるため, 波形の面積に当たる一次の保存量 I_1 は保存する。この実験では, 一次の保存量は 4~5% 以内の変動でほぼ一定であった。

それぞれのパルスにおける振幅の逆数の空間変化を Fig. 6 に示す。振幅が大きい場合も小さい場合も、振幅の逆数は空間に比例し、ほぼ直線となっている。しかし、その傾きは振幅が大きい場合の方が小さく、同じ傾きにはなっていない。理論式 (11) から、傾きは回路に挿入した抵抗と特性インピーダンスの比によって決まり、初期振幅には依存しないはずであった。これについては次で考察する。

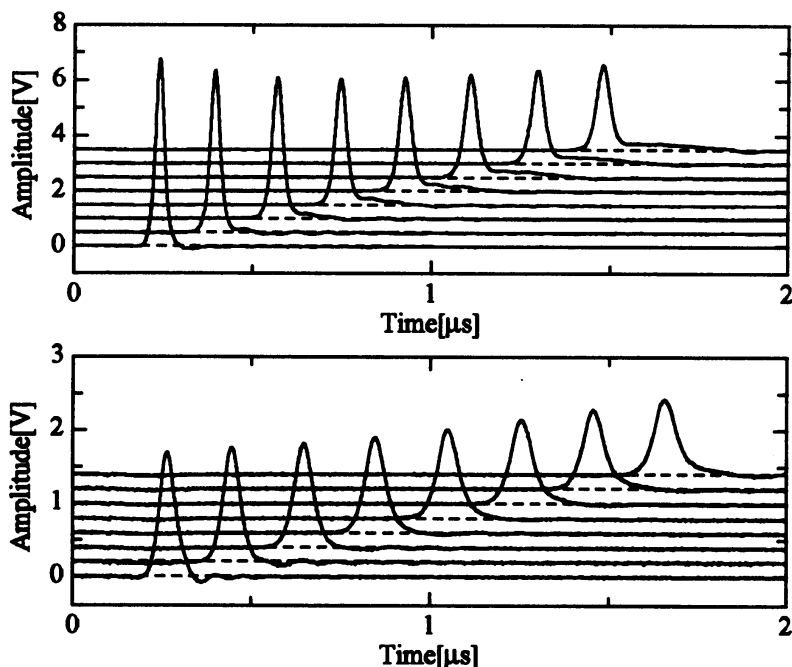


Fig. 5: K-dV-Burgers 系でのパルスの伝播。上段は振幅が大きい場合、下段は振幅が小さい場合で、それぞれ下から順に、1, 10, 20, ..., 70 段での波形である。

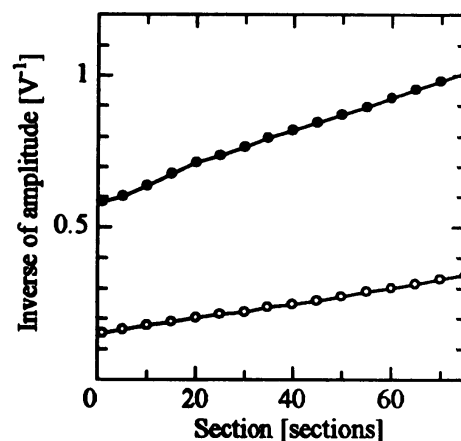


Fig. 6: パルスの振幅の逆数の変化。○が大きいパルス、●は小さいパルスの振幅である。

K-dV 系におけるソリトンの伝播の様子を Fig. 7 に示す。入力波形から一つのソリトンが形成され、形を変えずに伝播している。しかし振幅が少しずつ減衰してしまっている。1 段目での振幅は 6V 程度であるのに対し、70 段目での振幅は 5V 程度にまで減少している。K-dV-Burgers 系と同じように、振幅の逆数をプロットしたものが Fig. 8 である。振幅の逆数がほぼ直線になっていることから、減衰の仕方が K-dV-Burgers 系のパルスと似ていることが分かる。また、振幅が減衰しているにもかかわらず、一次の保存量は 0.9% 以内の変化で一定であった。さらに Fig. 9 で二次の保存量を調べてみると、K-dV-Burgers 系で二次の保存量が減少するのは (10) 式から当然であるが、K-dV 系の場合には (9) 式より、二次の保存量も保存するべきであるのに徐々に減少している。

K-dV 系で振幅が減衰してしまう原因を考える。原因として回路に何らかの抵抗が入っていることが予想される。抵抗は回路のインダクタに直列である場合と、キャパシタに直列である場合とが考えられる。

例として Fig. 10 のように Burgers 系の回路 ($R_1/R_0 \sim 1$) のインダクタに抵抗 R_2 がある場合を考える。 R_2 が小さいとして $R_2/R_0 \sim \varepsilon^2$ とすると、Burgers 方程式に u の項が加わった式

$$2u_\tau + uu_\xi - \frac{R_1}{R_0}u_{\xi\xi} + \frac{R_2}{R_0}u = 0 \quad (13)$$

が導かれる。第三項、第四項はどちらも散逸項であるが、第三項の $u_{\xi\xi}$ は周波数に依存する散逸であり、第四項の u は周波数に依存しない散逸である。それぞれの項の係数から、キャパシタに直列の抵抗 R_1 は周波数に依存する散逸を表し、インダクタに直列の抵抗 R_2 は周波数に依存しない散逸となる。周波数に依存しない散逸がある場合、波形全体を減衰させる効果があり、また一次の保存量も保存せず減少

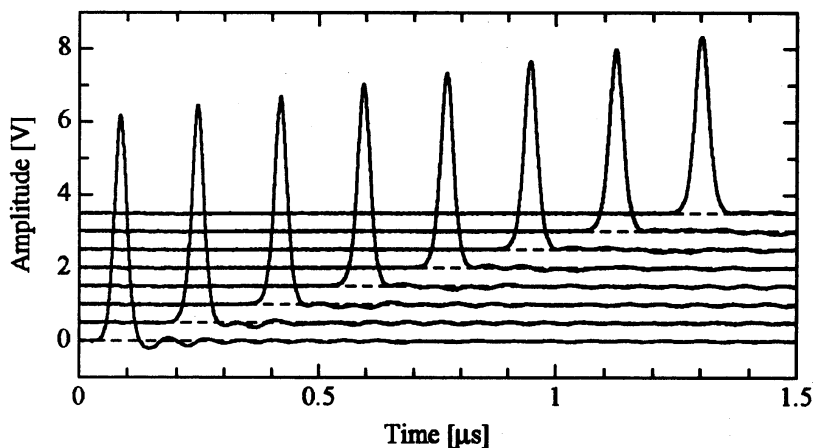


Fig. 7: KdV 系でのソリトンの伝播の様子。下から順に, 1, 10, 20, ..., 70 段での波形である。

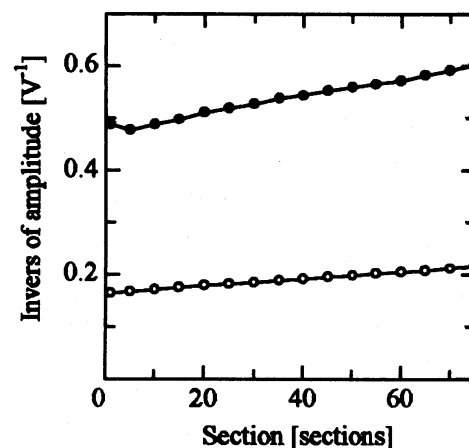


Fig. 8: ソリトンの振幅の逆数の変化。○が振幅の大きい場合, ●は小さい場合の振幅である。

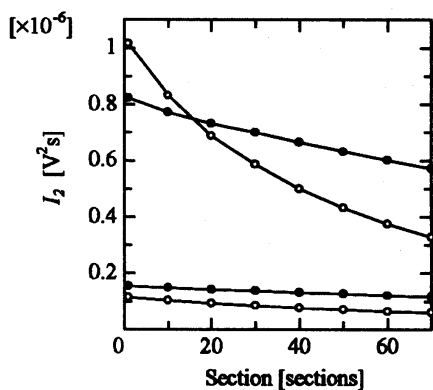


Fig. 9: 二次の保存量の空間変化。○が K-dV-Burgers 系の場合, ●は K-dV 系の場合である。

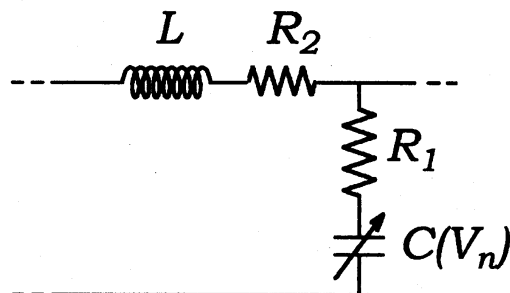


Fig. 10: インダクタに抵抗がある場合の非線形 LC 回路。

する。つまり, インダクタに抵抗を含む Burgers 系の回路に定常解であるはずの衝撃波を伝播させると, 全体的に振幅が減衰してしまう。

本実験で用いた回路では, インダクタに市販のものを用いると抵抗が大きすぎるため自作のコイルを用いており, Burgers 系で衝撃波を伝播させてもほとんど減衰がないことを確認している。また, 前に示したように K-dV 系, K-dV-Burgers 系, Burgers 系のどの場合にも, 一次の保存量は一定であった。さらに K-dV 系の実験では, 二次の保存量が減衰していた。

これらのことから次のように考えることができる。キャパシタに直列に何らかの抵抗が入っており, K-dV 系であると考えていたものが, 実際には K-dV-Burgers 系になってしまっていたということである。K-dV-Burgers 系であれば, パルスの振幅の減衰の式 (11) より, 振幅の逆数をプロットした傾きからキャパシタに直列の抵抗 R を求めることができる。この方法で, いくつかの初期振幅について抵抗 R を求めた結果が Table 1 である。2 列目は抵抗を入れずに K-dV 系として行った場合, 3 列目は 2Ω の抵抗を挿入して K-dV-Burgers 系として行った場合の, (11) 式から求めた抵抗値である。2 列目の値に 2Ω を加えたものが 3 列目の値になるべきであるが, 振幅が $1V$ 以上の大きい場合には成り立っていない。これは, K-dV 方程式や K-dV-Burgers 方程式を導くときに, 小振幅であるという近似を行っているためである。大きい振幅ではその近似が成り立たなくなり, このような結果になったと考えられる。

Table 1: 振幅の減衰から求めた抵抗値

初期振幅 A_0 [V]	抵抗なし R [Ω]	抵抗 2Ω R [Ω]
6	0.24	0.88
2	0.56	1.96
1	0.92	2.09
0.8	0.86	2.71
0.5	2.13	4.03

4.2 パルスの追い越し

K-dV-Burgers 系でのパルスの追い越しの様子を Fig. 11 に示す。2つのパルスの位相を、30 段目で相互作用するように調節して入力した。振幅の大きいパルスの方が速度が速いので、前にある振幅の小さいパルスを追い越そうとする。2つのパルスは減衰しながら伝播するが、接近するにつれて大きいパルスの振幅は急激に減少し、小さいパルスの振幅は大きいパルスの振幅と同じになるまで増大する。30 段目で2つのピークが同じ振幅になった後、前の小さいパルスだったピークはさらに増大して大きいパルスとなり、後ろのピークは減少して小さいパルスとなって追い越しを完了する。

相互作用をしたあとのそれぞれのパルスの振幅は、相互作用しないで単独で伝播したときの振幅と同じにはならない。追い越しをするときとしないときの、2つのパルスの振幅の変化を比較したものが Fig. 12 である。大きいパルスの振幅は急激に減少し、30 段目で追い越したあと振幅は元に戻ろうとするが、相互作用しないで伝播したときの振幅よりも大きくなりその後は徐々に減衰する。小さいパルスは、減衰しながらも大きいパルスと同じ振幅になるまで増大し、その後は減少して元の振幅より小さくなる。大きい方のパルスは、追い越すときに小さいパルスの一部を吸収して大きくなり、小さいパルスは吸収された分、小さくなったと考えられる。

K-dV 系のソリトンの追い越しでは、追い越した後の2つのソリトンの振幅は、完全に相互作用する前のそれぞれの振幅に戻る。一方 Burgers 系においては、後ろから追いついた大きいパルスが前の小さいパルスを吸収して1つに合体してしまい、追い越しは起こらない。K-dV-Burgers 系では、大きいパルスが部分的に小さいパルスを吸収してなおかつ追い越すという、K-dV 系と Burgers 系の中間の性質を示しているといえる。

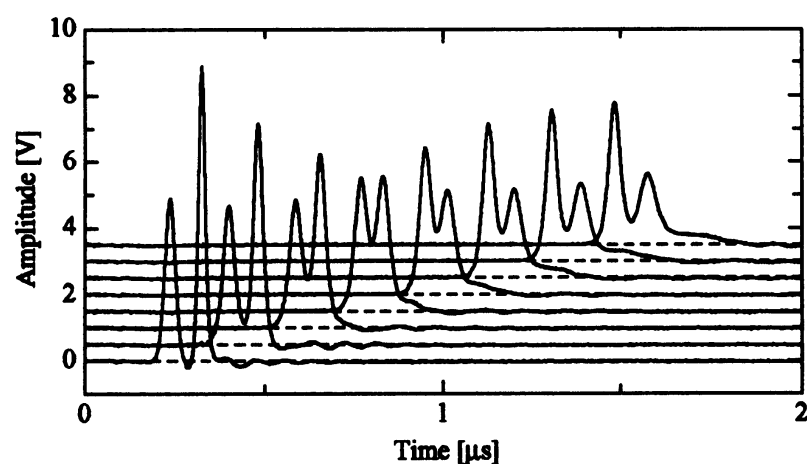


Fig. 11: K-dV-Burgers 系でのパルスの追い越し。下から順に、1, 10, 20, ..., 70 段での波形である。

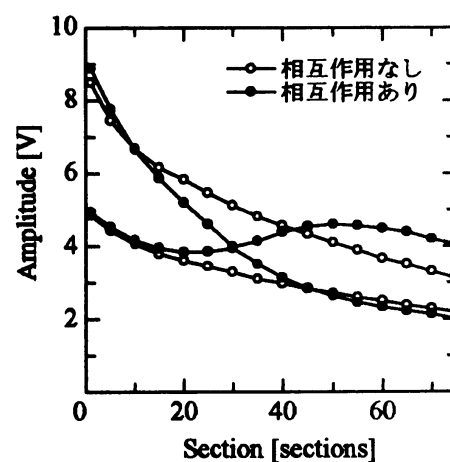


Fig. 12: 相互作用をするときとしないときの振幅の変化。

戸田格子に等価な非線形 LC 回路で、加える散逸の強さを適当に調節することによって、K-dV 系、K-dV-Burgers 系、Burgers 系の回路を実現し、K-dV-Burgers 系でのパルスの伝播の様子を K-dV 系や Burgers 系の摂動として比較した。

理想的な K-dV 系ではソリトンは減衰することなく伝播するが、K-dV-Burgers 系に一つのパルスを入力した場合、弱い散逸の効果によってソリトンの後部に正の振幅を持つプラトーが形成され、ソリトンの部分は徐々に小さくなる。その振幅の減衰は距離の逆数に比例する。散逸の強い Burgers 系では三角波を形成し、その振幅は距離の $-1/2$ 乗に比例して減衰する。ソリトンの後部にできるプラトーは、振幅が小さいためほとんど線形で伝播しており、元のパルスの振幅が大きいほど長いプラトーが形成される。ソリトン部分の減少に相当する大きさのプラトーが後部に形成されるので、波形の面積に当たる一次の保存量は保存する。

K-dV 系の二つのソリトンの追い越しでは、相互作用の後それぞれのソリトンは完全にもとの大きさに戻る。一方、Burgers 系では後から追いついた大きいパルスに小さいパルスが完全に吸収され、合体して一つのパルスになって伝播し、追い越しは起こらない。K-dV-Burgers 系の二つのパルスの追い越しでは、追い越すときに小さいパルスの一部分だけが大きいパルスに吸収された。そのため相互作用後のそれぞれのパルスの振幅は、相互作用しないで単独に伝播したときの振幅に比べて、大きいパルスは大きく、小さいパルスは小さくなった。K-dV-Burgers 系は、K-dV 系の分散と Burgers 系の散逸の双方の性質を併せ持っているということが確認できた。

参考文献

- 1) S.WATANABE 1978 Soliton and Generation of Tail in Nonlinear Dispersive Media with Weak Dissipation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **45**, 276-282.
- 2) M.TANAKA 1979 Effect of Weak Dissipation on Two Soliton Solution of the K-dV Equation. *J. Phys. Soc. Jpn.* **47**, 2013-2020.