数理解析研究所講究録 1209 巻 2001 年 155-160

二成分混合流体における進行波対流

広島大理　八幡英雄 (Hideo YAHATA)
Department of Physical Sciences,
Hiroshima University

二枚の水平平行平板間に二成分混合流体を容れ、底面より加熱したとき発生する Rayleigh-Bénard(RB) 対流を考える。この系は、平行平板間の温度差 ΔT、流体の性質を表す Prandtl 数 Pr、溶液の種類、容器の形状・アスペクト比によって、きわめて多様な空間的構造と時間的挙動を示す。流体の熱流束 $\mathbf{q}$、成分 1 の質量流束 $\mathbf{j}_1$ は、温度場、成分 1 の重量分率をそれぞれ T、x_1 とすると、

$$\mathbf{q} = -\lambda\nabla T - D_{01}\rho_0\nabla x_1 \tag{1}$$

$$\mathbf{j}_1 = -D_{10}\nabla T - D\rho_0\nabla x_1 \tag{2}$$

と書かれる。ここで、ρ_0、λ、D はそれぞれ溶液の平均密度、熱伝導率、拡散係数を表す。一方、係数 D_{01}、D_{10} に比例する項は、それぞれ Dufour 効果、Soret 効果による寄与を与える。流体の速度を $\mathbf{u}$、圧力を P とすると運動方程式は、z 軸の正の向きを重力と反対向きにとると、Boussinesq 近似の範囲で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla\frac{P}{\rho_0} + \nu\nabla^2\mathbf{u} - \frac{\rho}{\rho_0}g\mathbf{e}_z\ . \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T = \kappa\nabla^2 T + \gamma_1\nabla^2 x_1\ . \tag{4}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla x_1 = \gamma_2\nabla^2 T + D\nabla^2 x_1\ . \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ . \tag{6}$$

の形をとる。ここで、νは動粘性率、gは重力加速度、さらに、C_pを定圧比熱として、$\kappa = \lambda/\rho_0 C_p$ は温度伝導率、$\gamma_1 = D_{01}/C_p$、$\gamma_2 = D_{10}/\rho_0$ を表す。状態方程式は、温度、溶質濃度による溶液の膨張係数をそれぞれα、βとして $\rho(T, x_1) = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(x_1 - x_{10}))$ で与えられる。液体では Dufour 効果による項の寄与は小さいので、以下係数γ_1に比例する項は落とす。

流体は厚さd離れた二枚の平行な水平平板間に閉じ込められている場合を考え、平板上で流速は固定的 (rigid)、温度場は等温的、濃度場は非透過的 ($j_{1z} = 0$) 境界条件を満たしているとする。底面、蓋面の位置を $z = -d/2, d/2$ とし、各面の一様温度を $T = T_0, T_1$ とする。対流がない定常状態の場 ($\mathbf{u} = 0, \partial_t = 0$) を決める方程式は、,

$$0 = -\nabla \frac{P}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{e}_z \tag{7}$$

$$0 = \kappa \nabla^2 T \tag{8}$$

$$0 = -D_{10} \frac{\partial T}{\partial z} - D\rho_0 \frac{\partial x_1}{\partial z} = -D\rho \frac{\partial}{\partial z}(x_1 + \frac{\gamma_2}{D} T) \tag{9}$$

となる。式 (9) により、場 $\eta = x_1 + \frac{\gamma_2}{D} T$ は上下平板で Neumann 境界条件を満たすので、以下 x_1 の代わりに η によって濃度場変数を表す。したがって、以下取り扱う方程式系は、(3) – (6) の代わりに、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{P}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{e}_z \ . \tag{10}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \ . \tag{11}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta = \frac{\gamma_2 \kappa}{D} \nabla^2 T + D \nabla^2 \eta \ . \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ . \tag{13}$$

となる。式 (7) – (9) を解くと、

$$T^s(z) = T_0 - \frac{\Delta T}{d} z, \quad \eta^s(z) = x_1^s(z) + \frac{\gamma_2}{D} T^s(z) = \eta_0, \quad \rho^s(z) = \rho_0(1 - \bar{\alpha}(T^s(z) - T_0)) \tag{14}$$

となり、圧力 $P^s(z)$ は $\rho^s(z)$ の表式を用いて式 (7) により定まる。ここで、$T_0 = (T_0 + T_1)/2$, $\Delta T = T_0 - T_1$, $\bar{\alpha} = \alpha(1+S)$ で、$S = \beta\gamma_2/\alpha D$ は分離比とよばれる。

つぎに、この convection-free state(14) に対する乱れの方程式を導くために、$P = P^s + \delta p$, $T = T^s + \delta T$, $\eta = \eta^s + \delta\eta$ を、式 (10) – (13) に代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla\frac{\delta p}{\rho_0} + \nu\nabla^2\mathbf{u} + (\bar{\alpha}\delta T - \beta\delta\eta)g\mathbf{e}_z \ . \tag{15}$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\delta T = \kappa\nabla^2\delta T \ . \tag{16}$$

$$\frac{\partial \delta\eta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\delta\eta = \frac{\gamma_2\kappa}{D}\nabla^2\delta T + D\nabla^2\delta\eta \ . \tag{17}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ . \tag{18}$$

を得る。この方程式を無次元化するために、変換 $t \longrightarrow (d^2/\nu)t$, $\mathbf{u} \longrightarrow (\nu/d)\mathbf{u}$, $\delta T \longrightarrow (\Delta T)\delta T$, $\delta\eta \longrightarrow (\Delta T)(\gamma_2/D)\delta\eta$ を行うと、無次元化された運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla\frac{\delta p}{\rho_0} + \nabla^2\mathbf{u} + \frac{Ra}{Pr}((1+S)\delta T - S\delta\eta)\mathbf{e}_z \ . \tag{19}$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\delta T = \frac{1}{Pr}\nabla^2\delta T \ . \tag{20}$$

$$\frac{\partial \delta\eta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\delta\eta = \frac{1}{Pr}\nabla^2\delta T + \frac{L}{Pr}\nabla^2\delta\eta \ . \tag{21}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \ . \tag{22}$$

を得る。ここで、方程式系は4個の無次元パラメータ: Rayleigh 数 $Ra = \alpha g d^3\Delta T/\kappa\nu$, Prandtl 数 $Pr = \nu/\kappa$, Lewis 数 $L = D/\kappa$, 分離比 S によって特徴づけられている。境界条件は、上下水平境界面 ($z = \pm 1/2$) で、$\mathbf{u} = \partial_z u_z = \delta T = \partial_z\delta\eta = 0$ で与えられる。

この系の Rayleigh-Bénard 対流は、パラメータの設定によって多様な空間的構造・時間的挙動を示すが、ここでは、分離比 S が負の値をもつ場合に現れる、2次元ロール状の対流胞がロールの軸に垂直方向に時間とともに平行移動する進行波対流 (Traveling-Wave or TW convection) 状態について考察する。代表的な系として例えば、8 wt-% ethanol in water は、27.53°C で $Pr = 9.16$, $L = -0.008$, $S = -0.257$ をとるので [1]、以下 $Pr = 10$, $L = 0.01$, $S = -0.25$ の系を扱うことにする。この系において、十分大きな Ra の値で 2 次元ロール対流は TW 状態ではなく、ロールの位置の時間的移動はない定常状態 (Stationary Overturning Convection or SOC state) にあるが、Ra の値を降下させると、或る $r = Ra/(Ra)_c = r^*$(ここで、$(Ra)_c = 1708$) で、SOC から TW 状態への遷移が起る。Ra を降下させていくにつれ、ロールの移動速度 $V_p = \omega/k$(ここで、ω は角振動数、k はロールの波数) は次第に増加し、或る $r = r^s_{TW}$ で saddle-node 分岐によって対流状態は不安定になり熱伝導状態に遷移する。このように、熱伝導状態と対流状態の間の遷移が subcritical であるのが、この系の特徴の一つである。

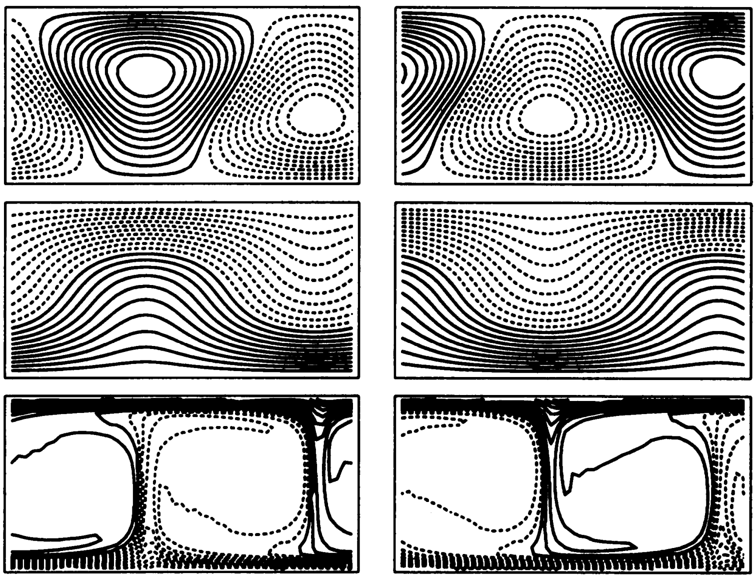

図 1: TW 状態における流体場の空間構造 ($r = 1.3$, $Pr = 10$, $L = 0.01$, $S = -0.25$)。第 1 行は、速度成分 u_z、第 2 行は、温度場 T、第 3 行は濃度場 x_1 の等高線図。第 1 列と第 2 列は異なる時刻におけるそれぞれの場の等高線を示し、ロールが水平方向に移動していることを示す。

この系の遷移をしらべるために、MAC 法による simulation を行った。2 次元ロールの軸

方向には一様と仮定して、系は２次元的で $\mathbf{u} = (u_x, u_z)$ とし、境界条件は上下壁では上記条件を課し、水平方向には周期的境界条件を課した。高さ１、水平幅２の simulation box を、それぞれ 24、48 個の等方格子に分け、時間刻み幅は $\tau = 0.25 \times 10^{-3}[d^2/\nu]$ にとった。２-ロール状態を初期状態として $r = 2$ の SOC 状態を simulation によって実現させ、ここから出発して Ra をステップ状に降下させて、そこでの Ra の各値における流体方程式の時間発展を追った。図１は $r = 1.3$ における TW 状態を示す。

次に、TW 状態における対流ロールの移動速度を Rayleigh 数にたいしてプロットした図を図２に示す。Ra の降下にともなって、移動速度は急激に増加することがわかる。SOC から TW 状態への遷移は、この計算によると $r^* \simeq 1.36$ である。一方、純粋流体の対流状態からパラメータ S による摂動計算による結果は、$r^* = 1.226$[2]、40×20 格子による MAC 法による simulation 結果は、$r^* = 1.650$[3], 8 wt-% ethanol in water at 28°C における実験結果は、$r^* = 1.826$[1] を与える。これらは少しずつ異なった条件下で得られた結果であるが、これらの差が単にそれだけに起因するのかは否かは明らかでない。他方、角振動数 ω、位相速度 V_p は大略同程度の値を与える。

この研究のもともとの目的は、$r = r^*$ における対流の安定性解析を行うことであったが、現在まだ計算中なのでその結果の報告は別の機会にゆずりたい。

参考文献

1) D. R. Ohlsen, S. Y. Yamamoto, and C. M. Surko, Phys. Rev. Lett. **65**(1990), 1431.

2) D. Bensimon, A. Pumir and B. I. Shraiman, J. de Physique **50**(1989), 3089.

3) W. Barten, M. Lücke, M. Kamps, and R. Schmitz, Phys. Rev. **E51**(1995), 5636.

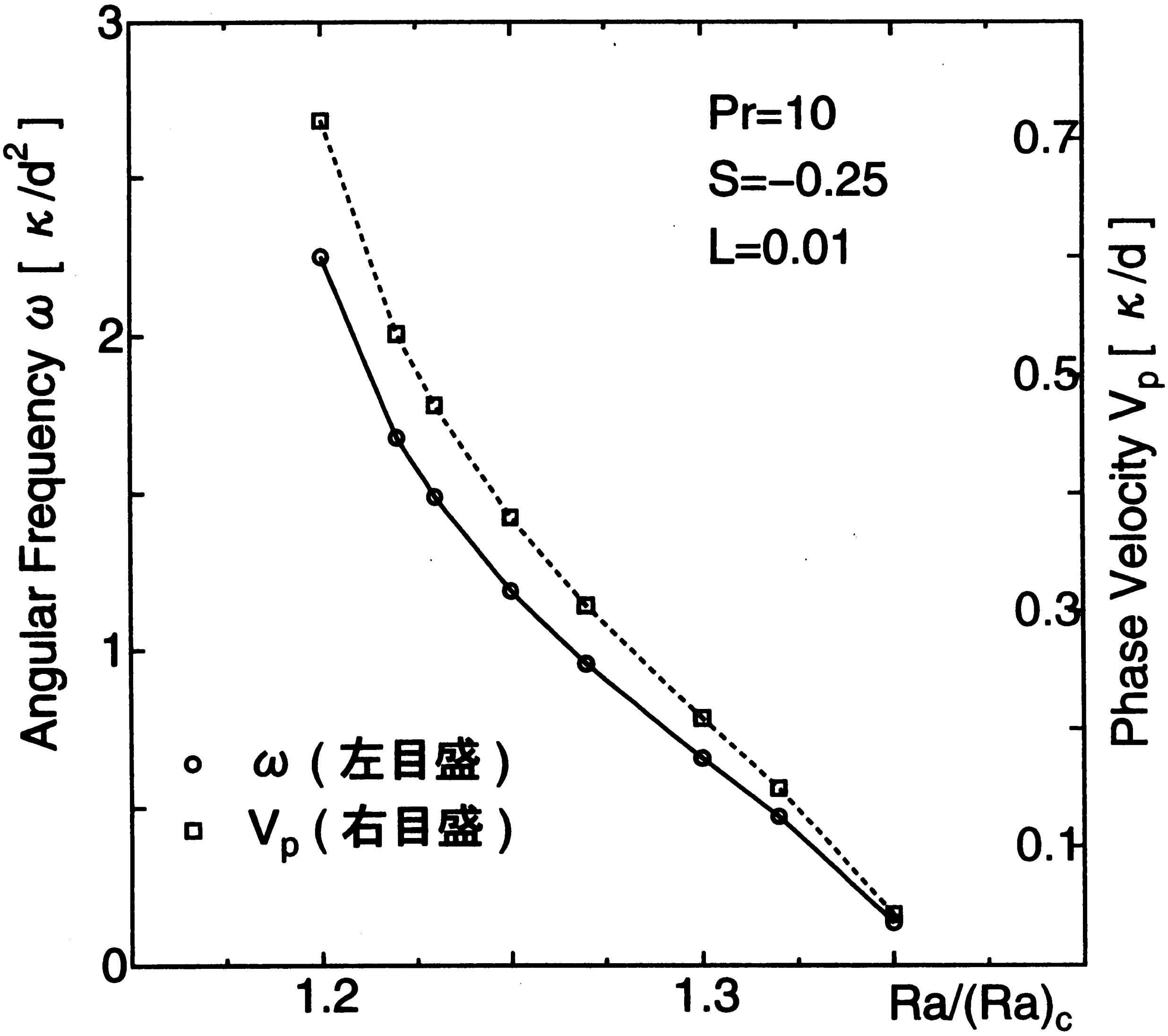

図 2: TW 状態における対流細胞の移動速度を特徴づける角振動数 ω、位相速度 $V_p = \omega/k$ Rayleigh 数依存性。ここで、周期的ロールの波数は $k = \pi$ である。