

大振幅浅水孤立波の伝播と不安定に関する実験

横浜国立大学工学部 舟久保 悠子(Yuko Funakubo)、皆川 大輔(Taisuke Minagawa)
渡辺 慎介(Shinsuke Watanabe)

Department of Physics, Faculty of Engineering, Yokohama National Univ.

九州大学応用力学研究所 辻 英一(Hidekazu Tsuji)、及川 正行(Masayuki Oikawa)

Research Institute of Applied Mechanics, Kyushu Univ.

1. 水孤立波の最大振幅問題と安定性問題

よく知られているように、浅い水路の表面を伝わる長波長の孤立波である浅水孤立波に関する研究の発端は 19 世紀に遡る。John Scott Russell による孤立波の発見(1834 年)と D. J. Korteweg & G. de-Vries により導出され、彼らの名前が冠せられた浅水孤立波を記述する Korteweg-de-Vries 方程式 (K-dV 方程式) の発見(1895 年)は、非線形物理学の端緒となった歴史的業績としてこれからも語り継がれていくだろう。

D. J. Korteweg と G. de-Vries が導いた K-dV 方程式は最低次の非線形効果と分散効果しか考慮していないため、大きな振幅の孤立波に対してその結果を適用することはできない。大振幅の孤立波を記述する理論は、摂動論による方法と積分方程式による方法の両面から組み立てられた。摂動論は、二人の先駆的な研究を引き継いで、その論文発表以降、活発に開始された。高次の非線形効果と分散効果を逐次取り入れる摂動理論は、Gwyther (1900)、Levi-Civita (1907)、Weinstein (1926)、Keller (1948)、Long (1956)、Laiton (1960)、Grimshaw (1971)、Fenton (1972)、Epstein (1974)、Longuet-Higgins & Fenton (1974)などの一連の研究により一応の結末を見ることになった。高次摂動理論の成果の一つは、孤立波の振幅の増加に従い、孤立波の持つエネルギー、運動量、孤立波の速度などの諸量は増大するが、大きな振幅の領域でこれらの量は極大、極小を持ち、振動することを明らかにしたことである。孤立波の速度 c と長波長極限の線形波の速度 $(gh)^{1/2}$ により定義される Froude 数 $F=c/(gh)^{1/2}$ 、および孤立波の振幅 a を水深 h で規格化した a/h を用いると、Longuet-Higgins と Fenton(1974)の結果¹⁾は、たとえば、Froude 数は $a/h=0.790$ のとき最大値 $F=1.294$ を持つ。また、孤立波の最大振幅は $a/h=0.827$ であり、そのとき波の速度は $F=c/(gh)^{1/2}=1.286$ となる。

一方、Yamada (1957)は積分方程式の方法を用い、孤立波の最大振幅が $a/h=0.827\pm 0.008$ であることを示した²⁾。その後、同様の方法を用いた結果が Witting & Bergin (1957)、Lenau (1966)、Yamada, Kimura & Okabe (1968)により提出されたが、Yamada による最初の結果が最も信頼性が高いとされている。この結果が、摂動論の値に等しいのは興味深い。なお、最大振幅では、孤立波は 120° の頂角を持つ三角波となる。

ここで、摂動論の結果を実験と比較してみよう。Longuet-Higgins と Fenton (1974)の論文¹⁾から転載したグラフを図1に示す。図中に「This paper」と記した曲線は彼らの理論値であり、白丸は Daily & Stephan (1953)の実験結果である。 $0 < a/h < 0.62$ の領域で行われた実験結果は Longuet-Higgins & Fenton の理論に比べ、速度がやや小さい。

最大振幅問題はこのような形で決着した。次に、浮上した問題は孤立波の安定性である。安定性問題は、まず小振幅の孤立波を記述する K-dV 方程式による解析から始まった。A. Jeffrey & T. Kakutani (1970)、Benjamin (1972)、Bona (1975)等は K-dV 方程式によって記述される孤立波の安定性を解析し、次に Kadomtsev & Petviashvili (1970)、及び Oikawa, Satsuma & Yajima (1974)は、2次元の摂動や水底の摂動に対する安定性を議論した。これらの論文は、K-dV タイプの孤立波が摂動に対して安定であると結論づけている。

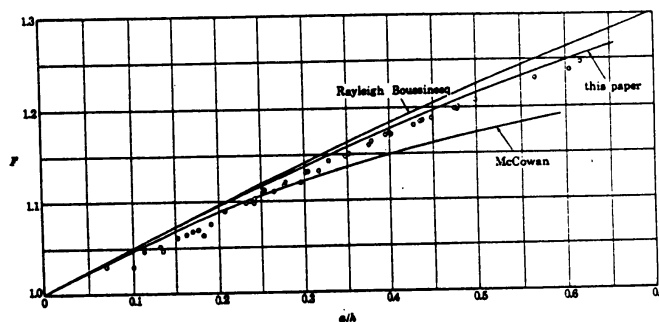


図1 孤立波の振幅と速度の関係

問題は最大振幅孤立波の安定性である。この問題は、周期的な深水波の安定性解析と密接な関連がある。深水波では2次元的不安定がよく知られている。ここでは、1次元の安定性のみを述べることにする。浅水孤立波と同様、周期的な深水波も振幅の増加に伴い、波のエネルギーやインパルスなどが極大と極小を持ち、振動する。Longuet-Higgins (1978)、Tanaka (1983)は、波のエネルギーとインパルスが最初に最大になる振幅で深水波は不安定になることを指摘した。Saffman (1986)は、エネルギー最大点が不安定開始点であることを示した。

一方、浅水孤立波では、振幅の増加に伴いエネルギーとインパルスは、深水波と違い、異なる振幅で最大値を持ち、不安定は深水波と同様にエネルギーが最初に最大になる振幅で現れることが Tanaka (1986)、Tanaka, Dold, Lewy & Perigrine (1987)によって示された。エネルギーの最大値を与える振幅は、 $a/h=0.780640$ であり、そのとき波の速度は、 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ である。なお、インパルスが最大になる振幅における波の速度は、 $c/(gh)^{1/2}=1.29092$ である。これら二つの速度の差は僅かであるから、実験的に両者を区別することは困難であろう。エネルギー最大値を与える振幅に対応する速度 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ を、今後、臨界速度と呼ぶことにする。

最大振幅を越えた孤立波には、2種類の不安定が存在する。振幅が増大し、前方に崩れるタイプ I の不安定と、孤立波の後方が急峻となり、振幅が減少するタイプ II の不安定である。

浅水孤立波の最大振幅問題や安定性問題に関連して、孤立波と壁の衝突が挙げられる。Oikawa and Yajima(1973)は摂動法によって孤立波の正面衝突(非粘性の仮定の下では剛体壁の反射と同等)を解析し、微小振幅ならば、孤立波は相互作用によって漸近的には phase shift だけが生じることを示した。しかし、振幅が大きくなると、このことが成り立たない事が、その後の研究から明らかになってきた。その中で最近 Cooker ら(1997)は非粘性の基礎方程式を数値的に解き、理論及び実験の結果と詳しい比較を行っている。理論では Su and Mirie(1980)の摂動計算の結果を用いており、実験では Maxworthy(1976)で撮影された 64 コマ毎秒の解像度のフィルムを独自に解析し使っ

ている。しかしながら、大きな ε の場合、孤立波が反射する前後で計算の継続が困難となり結果が得られていない。また、Maxworthy(1976)の実験では、入射する孤立波の振幅が最大で $\varepsilon=a/h=0.5$ である。

本研究では、孤立波の最大振幅問題と安定性問題を実験的に検証すると同時に、大振幅領域における孤立波の固定壁による反射の問題を実験的に調べることを目的とする。

なお、本実験は、九州大学応用力学研究所の共同研究により実施された。

2. 実験装置と実験方法

実験は、九州大学応用力学研究所に設置された風洞水槽を使って行われた。水槽の幅は0.6 m、高さは0.8 m、全長は17 mである。この内、水底に給排水用の穴などがなく、水深が一定している9 mの領域を実験に使った。水深は、0.05 mから0.1 mの範囲に選んだ。水底に接する幅0.6 m、高さ0.5 mの鉛直な造波板を水平方向に変位させることにより浅水波を励起する。なお、風洞は使用しない。

ピストン式造波板の変位は、次式に従いコンピュータにより制御される。

$$\text{変位} = \frac{A}{2} \tanh\left\{2\pi\left(\frac{t}{t_0} - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{A}{2}, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

ここで、 A は造波板の変位幅、 t_0 は造波板が A だけ変位するのに要する変位時間である。変位幅の最大値 A_{\max} は0.25 m、変位時間 t_0 は $1 \text{ sec} < t_0 < 3 \text{ sec}$ である。

波形の時間変化は造波板の初期位置から1 m間隔に設置した9本の振動容量型波高計により観測する。また、デジタル・ビデオ・カメラを造波板から6 mに置き、水槽の真横から波形をモニターする。

反射の実験には、造波機から7.823 mの所に垂直に反射壁を固定する。造波機で作られた孤立波は水槽を伝わり、やがて壁に達した後に反射し、造波機の方へ戻っていく。反射壁の横に高速度カメラ(200コマ毎秒)を置き、孤立波の接近に合わせて撮影を開始し、反射波が壁からある程度離れるまで撮影を行う。撮影された16mmフィルムはそのままでは解析が難しいので、コンピュータにフィルムスキャナで画像データとして取り込んだ後、画像ソフトを用いて孤立波の位置、振幅を調べた。この解析方法はそれ自体非常に手間がかかる上、解像度の関係で入射する孤立波の振幅が小さい場合データの読み取り精度が悪いため、計測した7例のうち振幅の大きい5例を解析した。反射壁から十分離れた場所のデータで入射する孤立波の振幅を読み取ることができるが、解析したケースでの孤立波の振幅は、 $\varepsilon=0.23, 0.39, 0.49, 0.64, 0.69$ である。なお、ここで示すデータは $h=10 \text{ cm}$ で計測したものである。また、造波機から1、2、…、7 mの場所と反射壁から2 mmはなれた場所に波高計を設置しているが、反射問題については写真解析の方で詳しい結果が得られているので、そちらのデータはここでは取り扱わない。

実験装置を図2に示す。

3. 実験結果 I 安定伝播領域

実験結果の例を図3に示す。水深 h は10 cmである。図の2例は、造波機から1 m(最上段の

トレース) から 9 m (最下段のトレース) までの 9 点における波形を時間の関数として示した。造波機から 9 m の地点で測定した孤立波の規格化した振幅はそれぞれ $a/h=0.25$ 、および 0.66 で

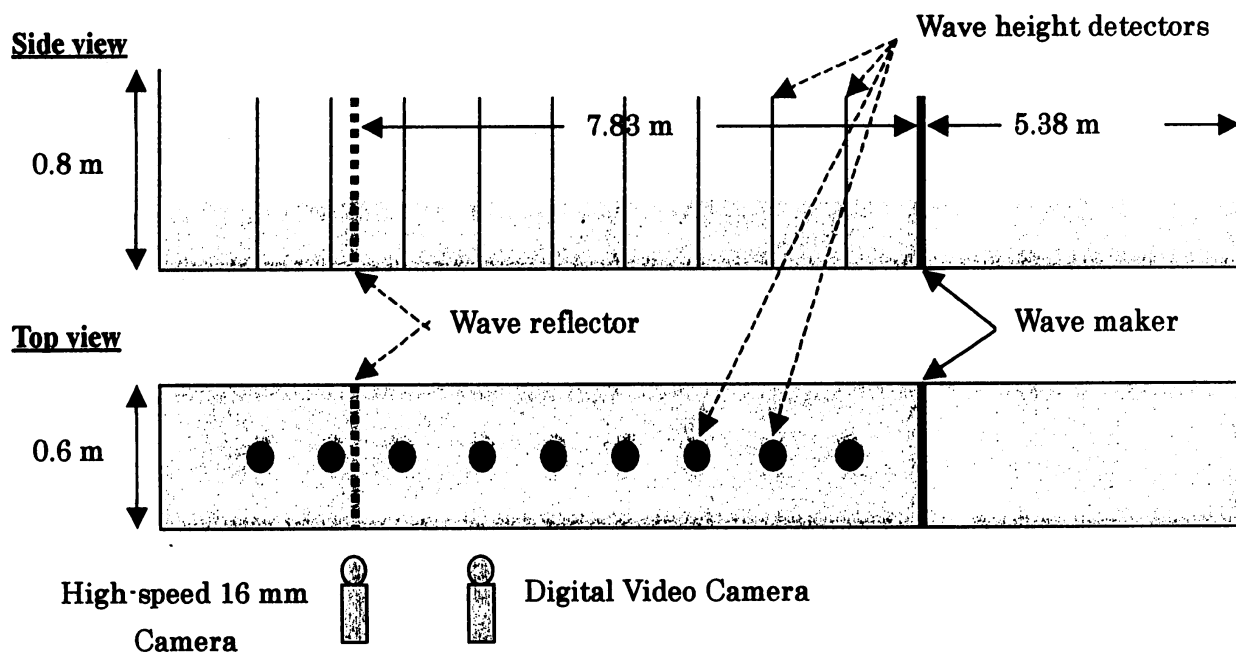


図 2 実験装置と測定器の配置

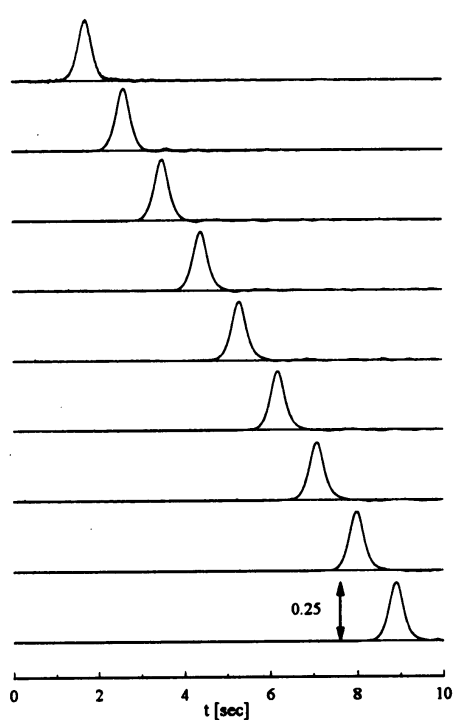


図 3-1 安定に伝播する孤立波 I

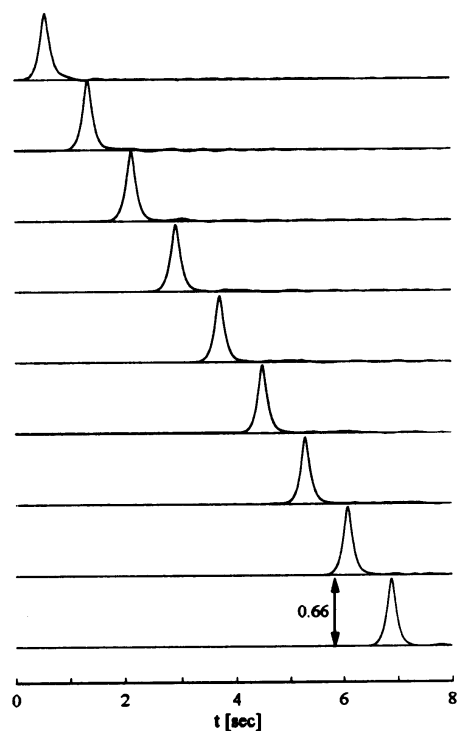


図 3-2 安定に伝播する孤立波 II

ある。いずれの場合も、初期段階で小振幅のリップルを後方に放出した後は、形を変えずに伝播する孤立波が観測されている。振幅の減衰も極めて小さい。これまでの実験、たとえば、Renouard等(1985)の結果と比べると、孤立波励起直後の初期減衰が著しく少ない。特に、大振幅の孤立波についてこの傾向が明瞭に現れている。その理由の一つは、彼らは造波板を正弦関数で変位させているのに対し、我々は双曲線関数を使っている点が挙げられよう。本実験においても正弦関数を使った孤立波の励起を試みているが、その場合には、必ず2個の孤立波が励起されるなど、造波機近傍における波形の変化が大きい。このような造波機近くの波形の変形が、Renouard等(1985)の実験において見かけ上減衰を強めている可能性は否定できない。

規格化した振幅に対する規格化した孤立波の速度を図4に示す。図において実線はLonguet-Higgins & Fentonの理論を、小さな黒丸とそれに交わる2本の点線はTanakaによって導かれた安定に伝播する孤立波の最大振幅 $a/h=0.780640$ とそれに対応する臨界速度 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ を表している。大きな丸印などの実験値は理論値とよく一致しているが、水深が浅くなると理論から予想される速度より大きくなる。測定した速度の理論値に対する誤差は1.5%程度である。この不一致は、表面張力の効果が原因であると考えられる。

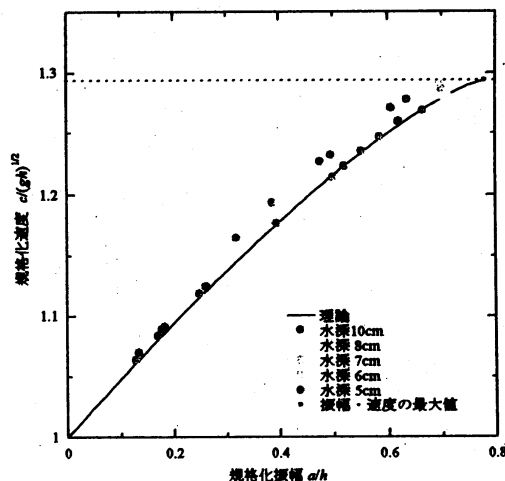


図4 安定な孤立波の振幅と速度

実験において観測される孤立波の最大振幅は、 $a/h=0.71$ 程度であり、Tanakaが予想した最大振幅 $a/h=0.78064$ を観測することはできなかった。振幅を増大させると、孤立波の速度が臨界速度を上回り、不安定を起こすからである。

4. 実験結果II 不安定領域

孤立波の不安定を図5に示す。図5-1は水深 h が10 cm、図5-2は5 cmである。図5-1は図3-2に比べ、造波板の変位速度を大きくして孤立波の振幅を増加させている。これは造波機から2 m (上から2番目のトレース) における振幅の比較から明らかである。しかし、図5-1では、3 mと4 mにおいて孤立波の振幅は急激に減少している。また、3 mから7 mまでの領域で観測される孤立波は滑らかではなく、小さな凹凸に覆われる。さらに、振幅の減少に伴い孤立波の後方が盛り上がり、プラトー状の構造が現れる。図3-2と比較すると造波機から3 mから7 mまでの範囲で孤立波の後方を伝播するさざ波の振幅も増大していることが観測される。これらの現象は孤立波の不安定に起因している。なお、図5-1から理解するのは困難であるが、不安定の初期段階(不安定開始位置から約2 m伝播する段階)では振幅の減少が顕著であり、その後に孤立波の速度の減少が現れる。造波機から8 mの距離まで進むと安定性を回復する。その結果、孤立波とそれに続くプラトーは分離し、2個の孤立波が観測されることになる。9 mの点における先頭を走る孤立波の振幅は $a/h=0.55$ である。初期振幅は図3-2より大きいにも拘わらず不安定による振幅減少

のため、安定性回復後の振幅は逆に小さくなっている。

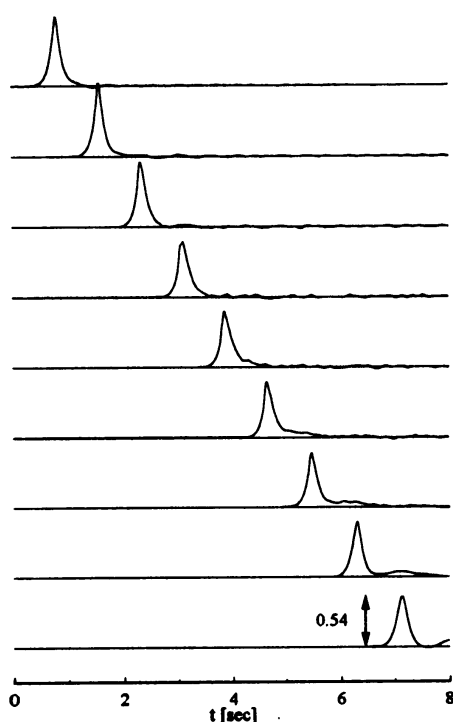


図 5-1 不安定な孤立波 I

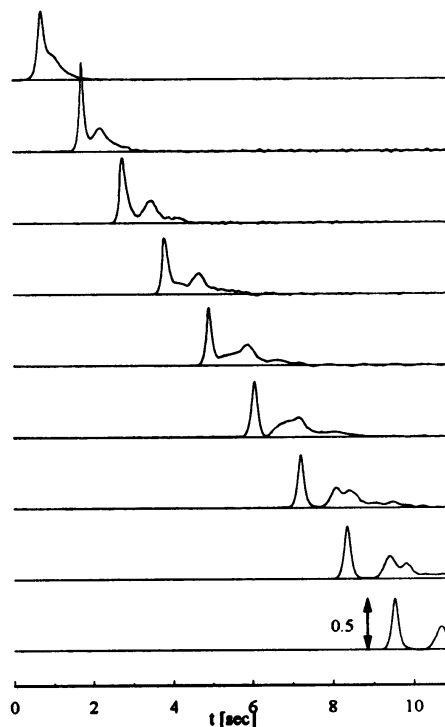


図 5-2 不安定な孤立波 II

図 5-2 にも孤立波の不安定の例を示す。水深が 5 cm のこの例では、初期波形から 2 個の孤立波に分裂する過程で不安定が観測される。不安定の詳細は前と変わらないが、1) 安定性が 6 m の地点で回復している点、2) 不安定開始前に第一の孤立波から分裂しつつあった第二の孤立波と不安定によって生じたプラトーが重なった波形から第 2、第 3 の孤立波が発生する点、などが図 5-1 とは異なる。

不安定開始前における孤立波の規格化した振幅と速度は、図 5-1 の場合 $a/h=0.772$ 及び $c/(gh)^{1/2}=1.343$ であり、図 5-2 では $a/h=0.866$ 及び $c/(gh)^{1/2}=1.403$ である。前者の場合、振幅は安定孤立波の最大振幅 $a/h=0.780640$ を越えていないが、速度が臨界値 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ 以上になり、不安定化している。後者の場合は速度だけでなく振幅も安定孤立波の限界を超えて不安定となっている。

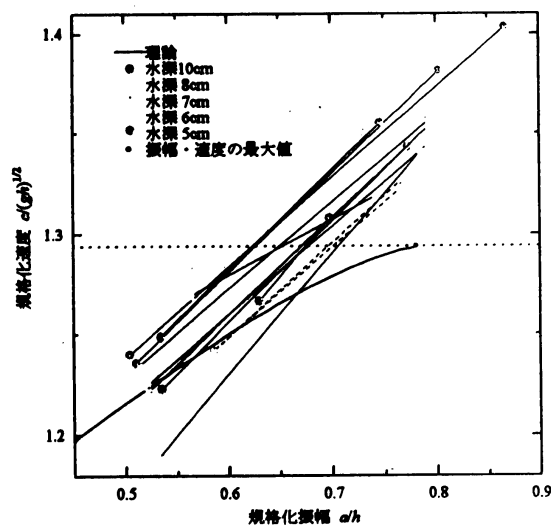


図 6 不安定開始前と安定化後の振幅と速度

これらの結果をまとめて図6に示す。不安定開始前、及び安定化後における孤立波の規格化した振幅と速度を一本の直線で結んでいる。直線の右上が不安定開始前の振幅と速度を、左下が安定回復後の振幅と速度を表す。直線は左下がりであるから、不安定により孤立波の振幅と速度は減少することを示している。さらに、すべての直線に対して右上の端点は臨界速度 $c/(gh)^{1/2}=1.29385$ を越えているが、必ずしも最大振幅 $a/h=0.780640$ を上回っていないことに注意したい。また、各点は曲線で示した分散式の上、あるいはその延長線上に乗っていない。これらの事情は、図5-1及び5-2の結果と共通する。一方、直線の左下端点についても、分散式の上に乗らない点が多いことに気付くであろう。

不安定開始前における孤立波の振幅と速度が分散式からずれる理由は十分に理解できていない。水深が小さい場合の実験では、図5-2に示したように、初期波形が2個の孤立波に分裂する過程で不安定を観測している。分裂の過程は、同じ向きに進む2個の孤立波の追い越しと同じであるから、大きい孤立波の速度、つまり先頭の孤立波の速度は相互作用による加速を受け、単一の孤立波に比べ速度が大きくなっている可能性がある。しかし、図5-1に示した単一孤立波が伝播する場合にも、不安定開始前の速度は理論的な予測より大きい。このように、不安定開始前に観測される孤立波の速度は、その振幅から計算される理論値より必ず大きい。つまり、不安定開始前の孤立波は分散式を満足していない。一つの理由として、定常的な孤立波に変形する前に不安定化する可能性が考えられる。不安定は造波機から2~3メートルの距離で起こることが多い。この領域では孤立波が定常的な波形に落ち着いていない可能性が高い。孤立波に伴う流体の変位は水深に依存するのに対し、造波機は水深に関係なく流体を水平方向に移動させるため、定常的な流体運動が実現されるまでにはある程度の距離が必要になる。この定常性が造波機から2~3メートルの距離で実現できないことが、不安定開始前に孤立波は分散式を満足していない理由の一つと考えられる。

一方、安定回復後の孤立波についても類似の理由が考えられる。安定を回復してから、長い距離を伝播した孤立波は分散式を満足するであろうが、安定性回復直後には定常

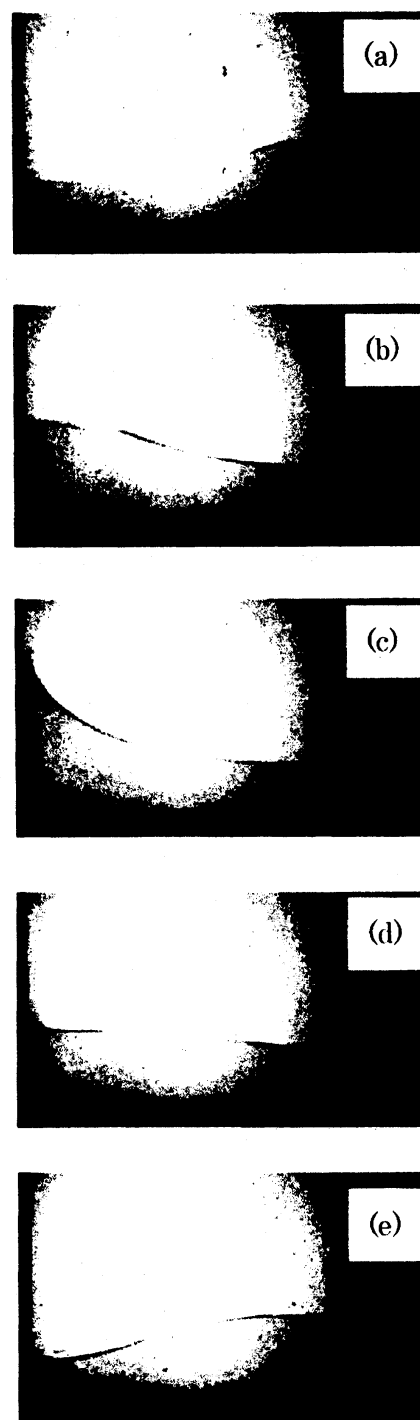


図7: $\varepsilon=0.64$ における反射

- (a) 入射前
- (b) 入射した瞬間
- (c) 最大波高を持つ時点
- (d) 反射波が壁から離脱する瞬間
- (e) 反射後

性が実現できていないため、必ずしもすべての孤立波が分散式を満足しない。

5. 実験結果Ⅱ 固定壁による孤立波の反射

図7に反射が始まってから終わるまでの様子を示す。波は右から壁の方に向けて進んでいく(図7a)。やがて反射壁に達し、壁面の水位が上がっていく。全体の水位の最大値を与える位置が壁面になった瞬間を孤立波が入射した時刻と見なす事にする(b)。さらに時間が経過し、壁面の水位が最高に達した(c)後、再び下がり始める。やがて全体の水位の最大値を与える位置が壁面でなくなった時点(壁面近傍で盛り上がった部分は反射する孤立波の挙動と関連が薄く、考慮外とした方が良くと判断した)で反射波が壁面から離脱し(d)、右へと伝播していく(e)。

このような写真を解析することにより反射に関する4つの量を調べ、これについて議論する。

まず孤立波が壁に到達してから離脱するまでの「滞在」時間(t_r/τ : $\tau=(h/g)^{1/2}$, g は重力加速度)を図8に示す。振幅が大きくなるほど滞在時間は短くなり、 $\epsilon=0.3\sim 0.4$ で一定となる。この傾向は数値計算やMaxworthyの実験と一致している。我々は彼らのデータが無い $\epsilon=0.6\sim 0.7$ での計測を2例行っているが、 $\epsilon=0.3\sim 0.4$ の値とあまり変わらず、一定値になるという $\epsilon=0.3\sim 0.4$ までの傾向がここでも見られるという結果を得た。

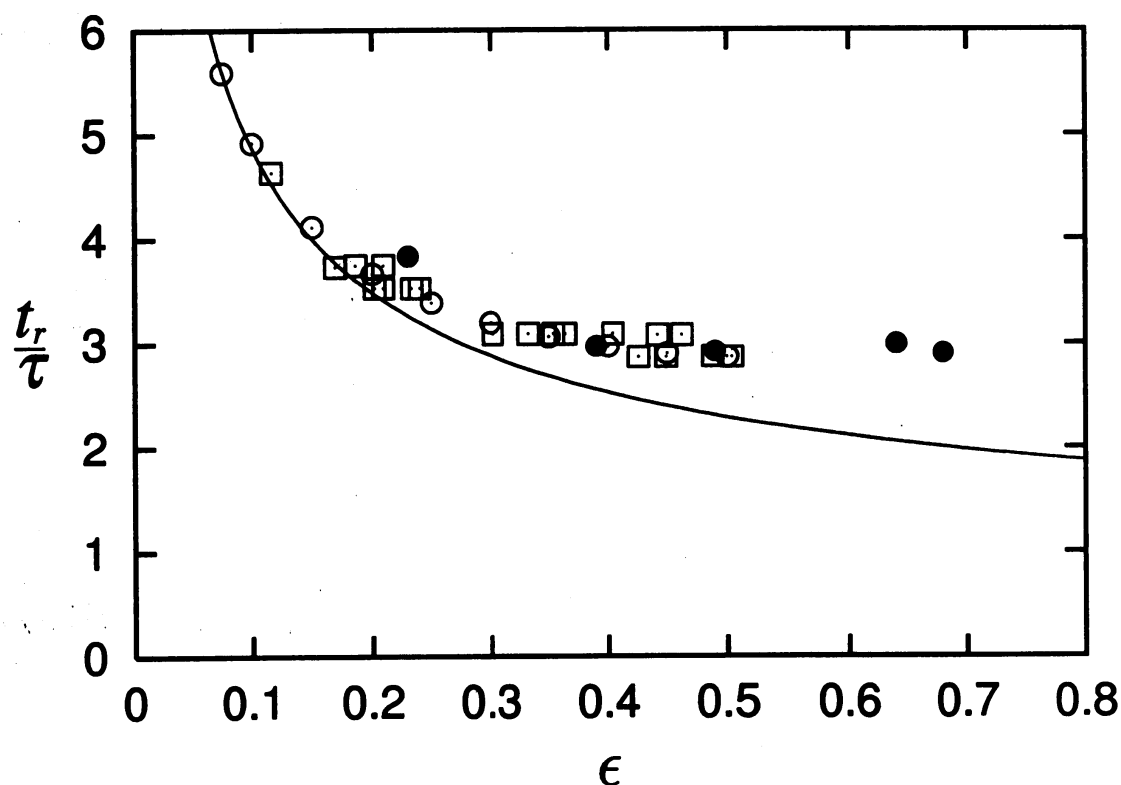


図8 孤立波が到達してから離脱するまでの時間 t_r/τ
 黒丸：実験結果 白丸：Cokker らの数値計算の結果
 白四角：Maxworthy の実験結果

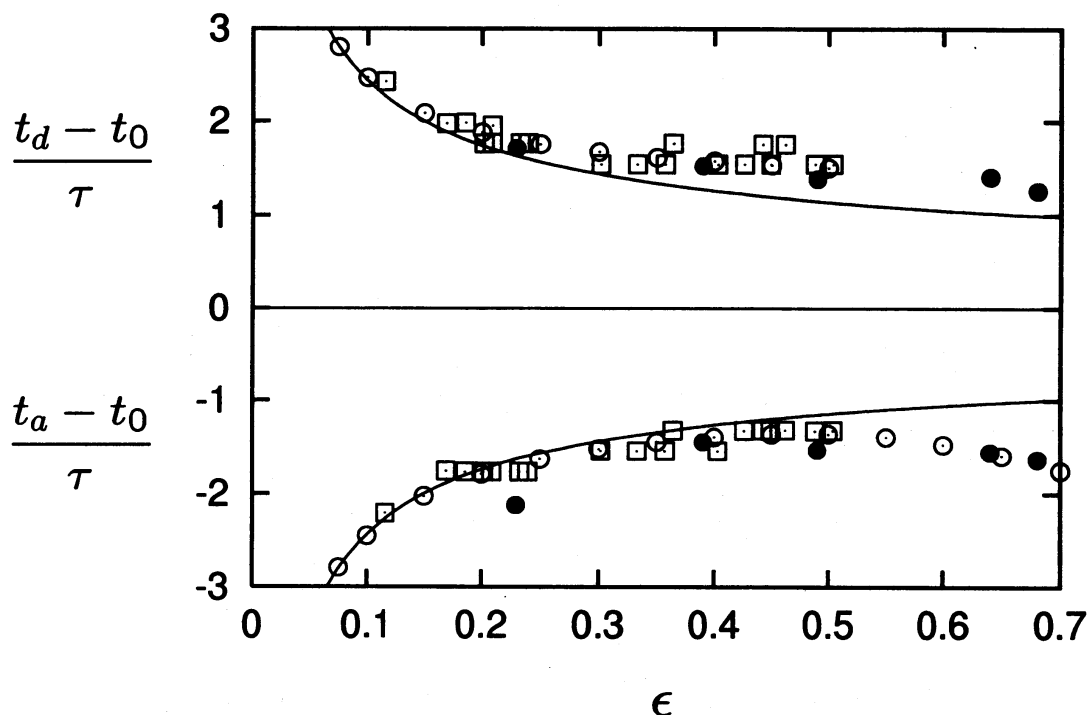


図9 到達時刻 t_a と最大振幅になった時刻 t_0 の差 $(t_a - t_0)/\tau$ 及び t_0 と反射波の離脱時刻 t_d の差 $(t_d - t_0)/\tau$.
黒丸, 白丸, 白四角および実線: 図8を参照.

次に到達時刻 t_a と最大振幅になった時刻 t_0 の差 $(t_a - t_0)/\tau$ 、 t_0 と反射波の離脱時刻 t_d の差 $(t_d - t_0)/\tau$ を図9に示す。 $\epsilon = 0.23$ での $(t_a - t_0)/\tau$ が今までの結果から少しずれているが、後はほぼこれまで報告された結果と同じ傾向を示している。ここでは、大きな ϵ での数値計算の結果が $(t_a - t_0)/\tau$ について与えられている。 ϵ が大きくなるにつれて $(t_a - t_0)/\tau$ は増えていき途中からわずかに減少する。我々の実験は、途中からの減少傾向はデータ数の不足や誤差により何ともいえないが、全体の傾向は数値計算の結果と一致している。 $(t_d - t_0)/\tau$ については t_0/τ と同様、ある程度大きな ϵ で値が変わらない傾向があることを示している。

図10は壁での最大振幅 $\zeta_{\max} h$ を示す。 ϵ が大きい所で数値計算の結果が理論よりわずかに大きく出ているが、我々の実験結果は数値計算に近い傾向を示している。

最後に、壁に到達した時点の振幅 ζh を図11に、壁から出ていくときの振幅 ζh を図12に示す。 ζh は ϵ の大きい所で、これまでの理論及び数値計算(この二つは良く合う)に比べわずかに小さい振幅が得られた。ただ振幅の大きい3例は不自然にずれているようにも思え、今後検討の余地がある。一方、 ζh は ϵ の大きい所で理論に比べかなり小さい振幅となった。このパラメーターの領域では、反射波が出る時点やその後、激しい流体の動きが壁付近で観察される。このため、理論が実験の結果から外れても不自然ではなく、それに代わる別の理論か数値計算で実験との比較をする事は興味深い。

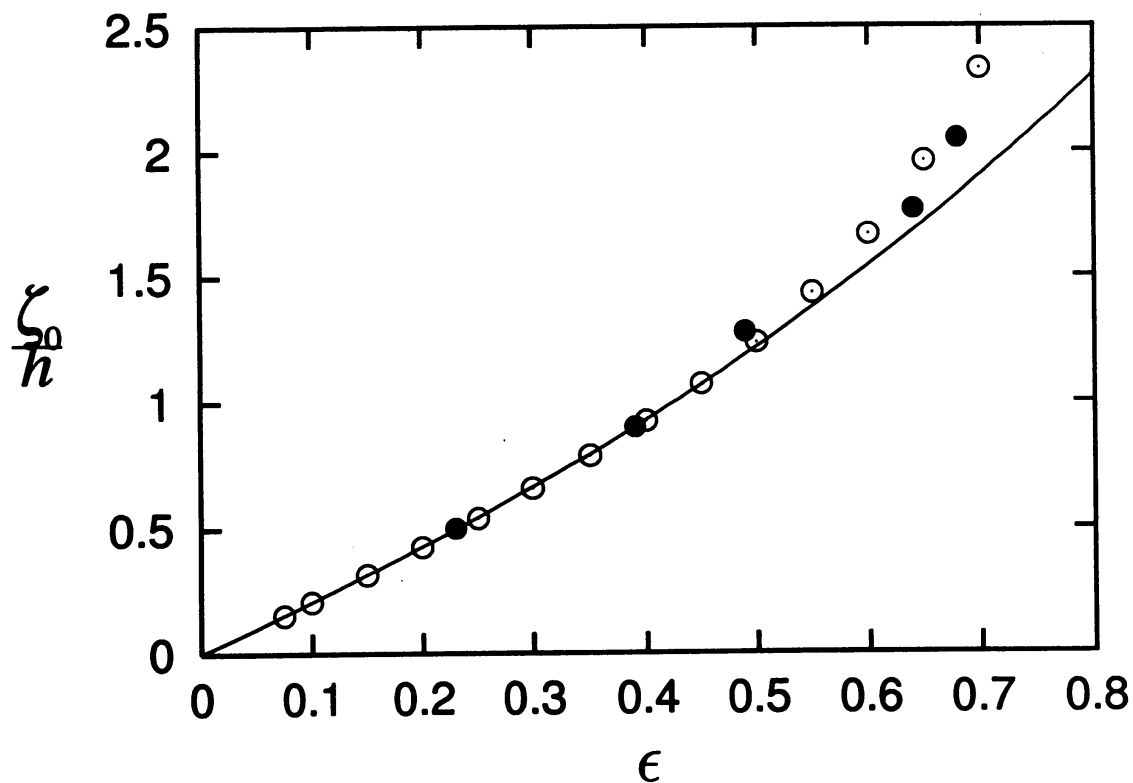


図10 壁での最大振幅 ζ_0/h
 黒丸, 白丸: 図8を参照. 実線: Su and Mirie らの求めた漸近形 ($O(\epsilon^3)$)

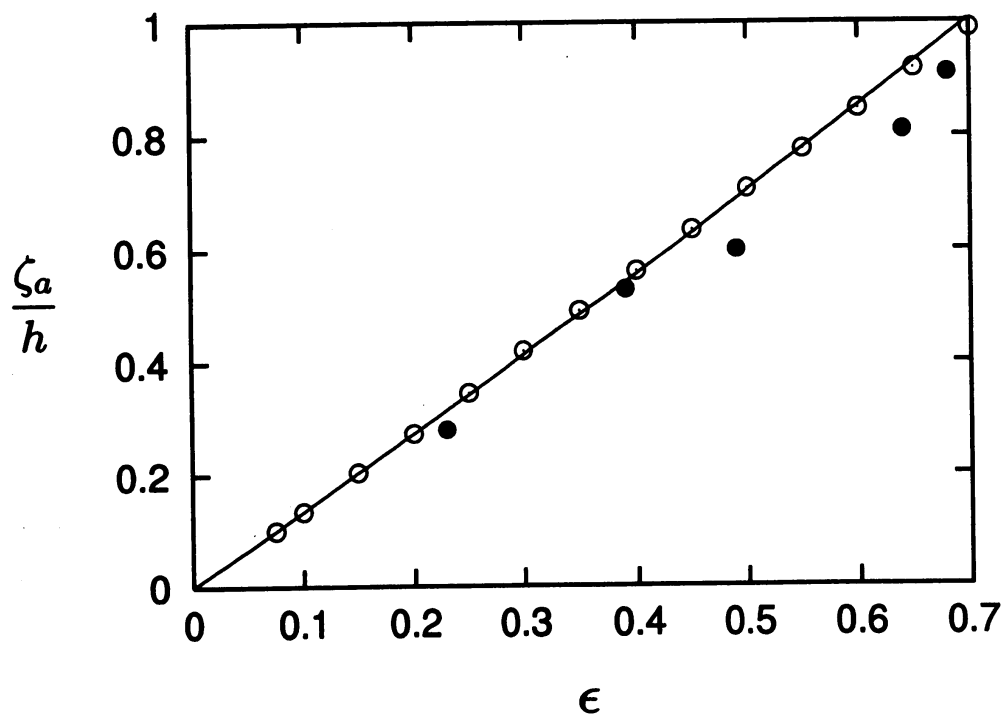


図11 壁に到達した時点の振幅 ζ_a/h
 黒丸, 白丸: 図8を参照. 実線: Su and Mirie らの求めた漸近形 ($O(\epsilon^{1/2})$)

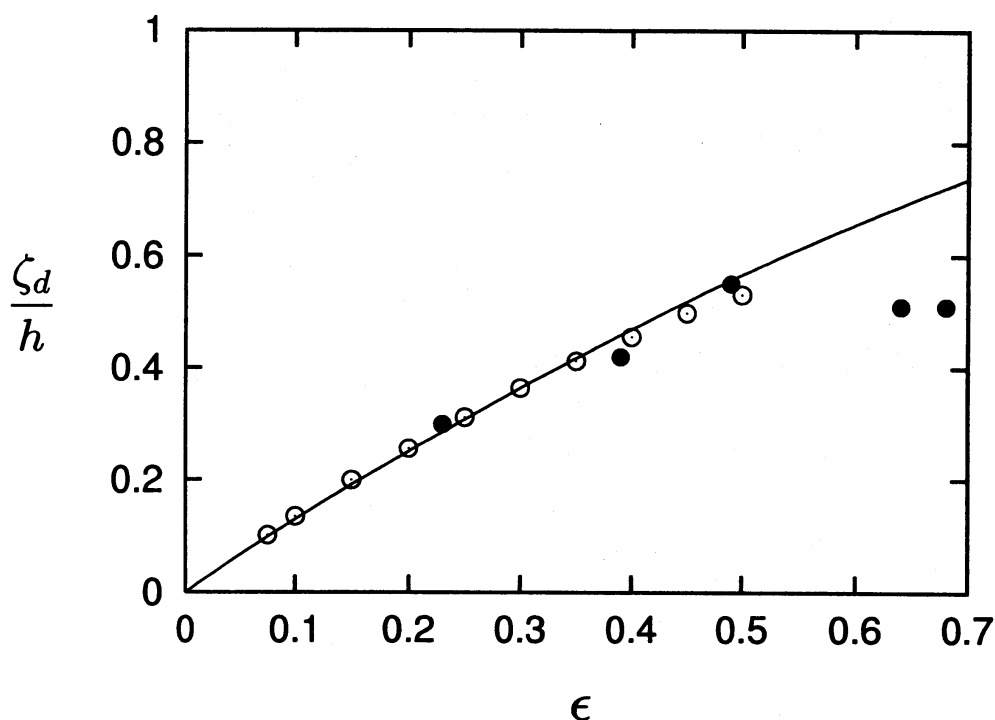


図12 壁から出ていくときの振幅 ζ_d/h
 黒丸, 白丸および実線: 図11を参照

7. まとめ

安定伝播領域においては、規格化した振幅 a/h が 0.7 を越える範囲まで、安定に伝播する減衰の少ない孤立波を観測した。減衰が少ない理由は、水深が浅いため伝播速度が小さく、空気抵抗が小さいためであろう。速度は Longuet-Higgins & Fenton の理論とほぼ一致する。しかしながら、水深が浅くなると理論からの不一致が顕著に現れる。不一致の原因は表面張力の効果によるものと考えられる。

不安定領域では、孤立波の不安定が観測された。臨界振幅 $a/h = 0.780640$ 以下においても不安定は起きる。しかし、そのとき孤立波の速度は、臨界振幅に対応する臨界速度 $c/(gh)^{1/2} = 1.29385$ を越えている。したがって、不安定は臨界速度により支配されているように見える。不安定は一方の側壁に接する孤立波の頂上付近から発達する。不安定により、前方の立ち上がり領域の下部を除き、さざ波で覆われる。振幅が減衰し、速度が臨界値を下回ると安定化する。臨界振幅の観測は困難である。

固体壁との相互作用に関しては、さまざまな振幅の孤立波の反射を、高速度カメラを用いて撮影、観測した。特に ϵ が比較的大きい場合の反射時点に関連したデータはこれまで無かったので、非常に有意義なデータが得られた。ただ、今回得られた実験例が 5 例と少ないため、決定的な結

論を出すのは難しく，さらに実験を行う事が必要である．特に $\varepsilon = 0.49 \sim 0.64$ の間のデータは，の時点で反射の機構が質的に変わった可能性もあり，非常に重要であろう．

参考文献

- 1) M. S. Longuet-Higgins and J. D. Fenton: Proc. R. Soc. Lond. A. **340** (1974) 471-493.
- 2) H. Yamada: Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ. **5** (1957) 53-67.
- 3) M. Tanaka: Phys. Fluids **29** (1986) 650-655.
- 4) M. Tanaka, J. W. Dold, M. Lewy and D. H. Perigrine: J. Fluid Mech. **185** (1987) 235-248.
- 5) M. Oikawa and N. Yajima: J. Phys. Soc. Japan **34**(1973) 1093-1099.
- 6) M. J. Cooker, P. D. Weidman and D. S. Bale: J. Fluid Mech. **342**(1997) 141-158.
- 7) C. H. Su and R. M. Mirie: J. Fluid Mech. **98**(1980) 509-525.
- 8) T. Maxworthy: J. Fluid Mech. **76**(1976) 1177-185.

なお、多少古い論文ではあるが、次の孤立波に関するレビューもある。

- 9) "Solitary waves" J. W. Miles: Ann. Rev. Fluid Mech. **12** (1980) 11-43.