

液膜のレイリー・テイラー不安定性の数値的研究

阪府大工 飯田和雄 (Kazuo Iida)

阪府大工 村上洋一 (Youichi Murakami)

1 はじめに

薄い液膜に作用する主な外力としては、重力と表面張力が挙げられる。特に、その薄さゆえに表面張力の働きが重要となり、熱が絡む場合には表面張力の温度依存性から生じる接線応力による力(マランゴニ効果)も働く。また、系の代表的な長さが小さくなるため、一般に、粘性力が慣性力を優ることが多い。

この研究では、薄い液膜が天井に貼りついている場合の振る舞いについて考察する。重力と表面張力のみが作用し、温度不均一の効果はないとする。静止した状態ではこれらの外力と圧力がつりあうことになる。軽い流体(空気)の上に重い流体(液体)があり、下向きの重力加速度が作用しているので、系は不安定であることが推察される。この重力による不安定性はレイリー・テイラー不安定性(Taylor [1])と呼ばれている。液膜の表面での微小変形を考えると、その曲率から判断して表面張力は変形を抑制する方向に働くことがわかる。

薄い粘性流体のレイリー・テイラー不安定性に関する実験は、Fermigier et al[2]によって行われている。彼らは、直径56mmの容器に粘性率の大きなシリコンオイルを用いて0.2mmの薄さの層を作った。このようにアスペクト比が非常に大きいので側壁の影響がほとんどない実験に相当すると考えられる。Whitehead and Luther[3]が以前に行った実験では、流体層はそれほど厚くなくアスペクト比も大きくない。Fermigier et al[2]は実験によって不安定な表面変形の時間発展に関して、以下の点を見出した。(i)一般に局在した点から同心円状に広がりながら攪乱は発達するが、最終的には6回対称性を持つように変形のピーク(その各々は、ほぼ軸対称となっている)が分布する。ここでは、これを六角形パターンと呼ぶ。(ii)ワイヤーを用い線上に攪乱を与えると、攪乱の成長とともに線上にピークが並び、最終的には6回対称性を持つようにピークが分布する。これはワイヤーを交差するように2本用いた場合でも同様である。(iii)ピークの間隔は線形安定性理論の最大増幅率に対応する波数とほぼ一致する。(iv)最終的にはピークは零となって落下する。

この現象に対する理論的な説明のために、潤滑近似を用いることにより表面の変形を記述する長波長方程式が導出されている。Fermigier et al[2]では、この長波長方程式を再度導き、その枠組みで振幅方程式を導出し六角形パターンが生じることを議論している。Yiantsios and Higgins[4]は1次元に限定した長波長方程

式（したがって、直線状の変形しか扱えない）をもとに定常解について考察している。実験結果からも明らかなように表面変形を1方向に一様と仮定することはできない。そこで、この研究では2次元の長波長方程式を数値的に解くことにより、実験で得られた2次元パターンが再現できるかを調べる。Schwartz[5]が、差分法により予備的な数値シミュレーションを行っているが、最終状態の1例を与えているに過ぎない。

まず、長波長方程式の導出および性質を説明する、次に、1次元の数値シミュレーション結果について述べる。その後、2次元の数値シミュレーション結果を与え、実験との比較を行う。最後に、この研究のまとめを行う。

2 長波長方程式

2.1 導出

Fermigier et al[2]に従って、長波長方程式を導出する。3次元非圧縮粘性流体が満たす連続の式およびナビエーストックス方程式は以下のように与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \partial_x w = 0, \quad (1)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_x) \mathbf{u}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\rho(\partial_t w + (\mathbf{u} \cdot \nabla + w \partial_x) w) = -\nabla p + \eta \nabla^2 w + \rho g. \quad (3)$$

ここで、 (\mathbf{u}, w) , $\mathbf{u} = (u, v)$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ としてあり、水平速度成分と垂直速度成分をわけて記述している。

境界条件としては、固体壁では粘性境界条件: $\mathbf{u}(x, y, 0, t) = 0, w(x, y, 0, t) = 0$ を満たす。液体表面 $z = h(x, y, t)$ においては次の応力のつりあいの条件と運動学的条件を満たす必要がある。

$$\eta \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

$$P_a - p = \gamma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \right), \quad (5)$$

$$\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h = w. \quad (6)$$

また、側壁の境界条件については、周期境界条件を用いた。説明しようとしているパターンが境界の条件を受けないことが実験から推察されるので、計算領域では生じる波がある周期で規則的に歪んでいるものとした。低レイノルズ数の流れ(ストークス近似)と長波長不安定($h_0 \ll \lambda_M$, ここで h_0 は波長の厚さ, λ_M は不安定モードの波長)を仮定する。連続の式(1)より、垂直速度成分 w は水平速度成分 u, v と比べて非常に小さいことがわかる。これらの近似を基礎方程式に適用し、

境界条件を用いて得られる液体の圧力分布の式、またそれから求められる水平速度分布の式は以下ようになる。

$$p(\mathbf{r}, z, t) = P_a - \rho g(h - z) - \gamma \nabla^2 h, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, z, t) = \frac{1}{2\eta} z(z - 2h) \nabla(-\rho g h - \gamma \nabla^2 h). \quad (8)$$

上式を液体表面での運動学的条件に代入することで、以下の発展方程式を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{3\eta} \nabla \cdot \left[(h_0 + \zeta)^3 \nabla (\rho g \zeta + \gamma \nabla^2 \zeta) \right] = 0. \quad (9)$$

ここで、 $h = h_0 + \zeta(\mathbf{r}, t)$ である。

次に、この式を無次元化するため代表長さを h_0 として、式(9)を書き直すと、次のようになる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[\nabla \cdot (1 + \zeta)^3 \nabla \left(\zeta + \frac{1}{B} \nabla^2 \zeta \right) \right] = 0, \quad (10)$$

$$T = \frac{3\eta}{\rho g h_0}, \quad B = \frac{\rho g h_0^2}{\gamma}. \quad (11)$$

ここで、 B はビオ数である。

2.2 長波長方程式の性質

$\zeta \propto \exp(\sigma t + ikx)$ と仮定し、それを式(10)の線形項のみに代入して波数と線形増幅率の関係を調べると、 $k_m = \sqrt{B/2}$ のとき最大値 $\sigma_{max} = B/4$ をとることがわかる。よって波数が k_m の攪乱が最も成長しやすいことが予測される。

次に、長波長方程式(10)のエネルギーの時間発展について考える。

$$E = \int \left(\frac{1}{2B} (\nabla \zeta)^2 - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) dV, \quad (12)$$

と定義し、式(10)を考えると、

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int (1 + \zeta)^3 \left| \nabla \left(\zeta + \frac{1}{B} \nabla^2 \zeta \right) \right|^2 dV < 0 \quad (13)$$

となる。重力によるポテンシャルエネルギーと境界における表面張力のエネルギーを含む流体層の自由エネルギーの時間変化が、流体層内の粘性力によるエネルギー散逸に等しいことを示している。これは表面変形が進むとエネルギー E は単調減少することを示しており、時間に依存するアトラクターはありえないことがわかる。

3 数値シミュレーション(1次元)

表 1: Fermigier et al の実験のパラメーター

	数値	次元
初期厚さ (代表長さ) h_0	0.0002	m
粘性率 η	1.0	kg/m·s
密度 ρ	970	kg/m ³
表面張力 γ	0.021	N/m

今回用いたパラメータについては, Fermigier が実験に用いた条件と一致させた. 最大増幅率を与える $\lambda_m = 2\pi h_0/k_m \approx 13.2\text{mm}$, $h_0/\lambda_m \approx 0.0152$ となり, 長波長近似の仮定は満たされているといえる.

数値計算方法については, 空間についてはフーリエガラーキン法でアライアジングエラーを除去したものとしていないもの, 時間発展については前進オイラーと4次のルンゲクッタ法, 刻み幅については信頼できるものを適宜確定していき, 次のような結果を得た(下の表は1次元1周期について).

表 2: 空間分割数と時間刻み

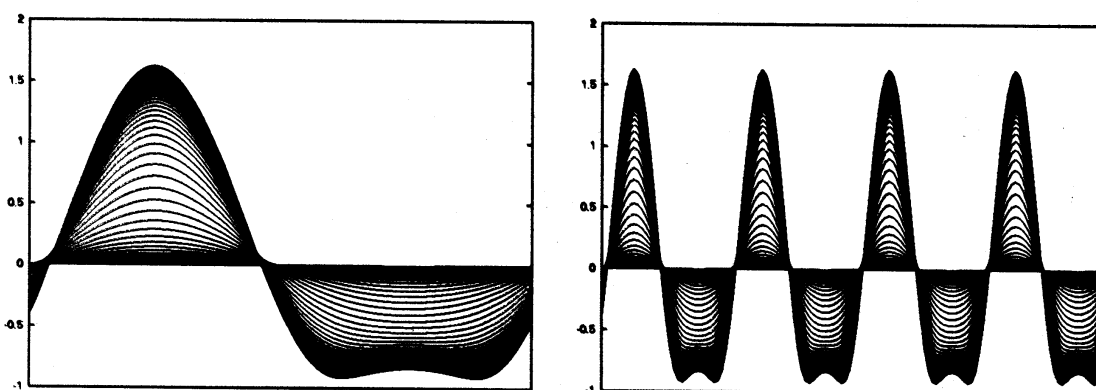
高周波除去	空間刻み n_x	時間刻み dt
なし	8	0.75
なし	16	0.025
あり	32	0.01
あり	64	0.0005
あり	128	0.000025

また, 数値計算は最終的に発散する可能性が高いので, 発散時間の判定において, 最小の表面厚さが初期厚み h_0 に対して $\zeta = (-1.0 + 10^{-4})h_0$ にまで達したとき(液膜の厚みが0に近づくと)に, 発散とみなし, 計算を止めることにした. この理由として, 壁面と境界面との間の距離が極めて小さくなってくると, この計算では考慮に入っていないファンデルワールス力の影響が大きくなるということと, 表面が固体壁と接するという破断が生じる近傍では, 正確な計算結果が期待されないからである.

図1(a)は初期条件として最大増幅率に対応する波数の微小なサインカーブを1周期与えたものである(停止時間6000s). 時間が進むにつれて重力方向にピークが発生し(重力の向きを上向きに取っている), 壁面方向には2つのくびれを形成しながら液層表面が変化していく様子がわかる. その変位は次第に緩やかになり, 安定した形状となる. これは, 空間領域を4倍にし, かつ微小な攪乱を加えても(攪乱はサインカーブの初期の大きさ 10^{-2} の1000分の1としている)同じ形状が形成される(図1(b)). すなわち, この最大増幅率の波長に対応する波形は非常に安定であることがわかる. しかしながら, 波形は止まることはなく, ゆっくりと変

化を続ける。図2は、振幅最小値の時間変化がプロットされている。非常にゆっくりと変化しており、一定値に近づくかどうかははっきりしない。図3は図1(a)の発展方程式の右辺についてプロットしている。左の部分 $0 < x < 60$ と $x = 100$ のあたりはほぼ定常と考えられるが、そのつなぎめの部分は空間変化しているの、 $\zeta \neq -1$ である限り $\zeta_t \neq 0$ となる。これは液層表面は時間が経てば、必ず固体壁に付着することを示唆している。この結果は Yiantios and Higgins[4], Hammond[6], Oron and Rosenau[7] らの理論的、数値的研究の結果と一致する。

図4(a),(b)は、空間領域を最大波数の4倍および8倍として初期条件に微小な攪乱を与えたものである(停止時間6000s)。このように最大増幅率に対応する波数に依存しない初期条件を与えると、狭い系(図4(a))では最大増幅率の波長に対応する最終状態になるが、図4(b)では歪みのある波形が形成され、広い系では初期値依存性があることを示している。



(a) 波数1

(b) 波数4

図1: 波形の時間発展。上向きに g をとっており、 -1 が壁面に相当する。

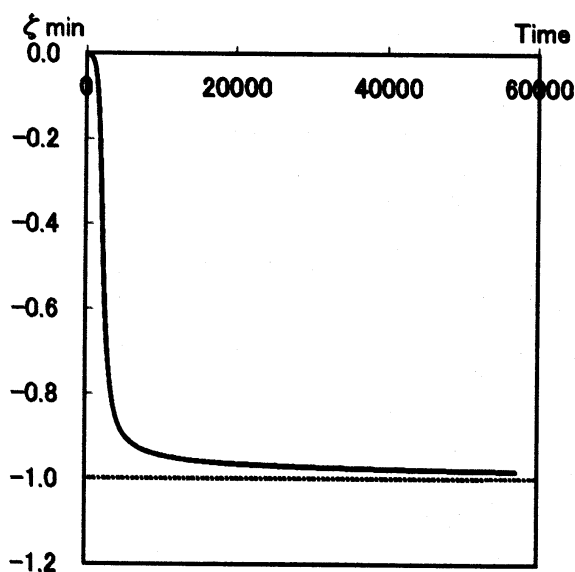


図2: 最小値の時間発展

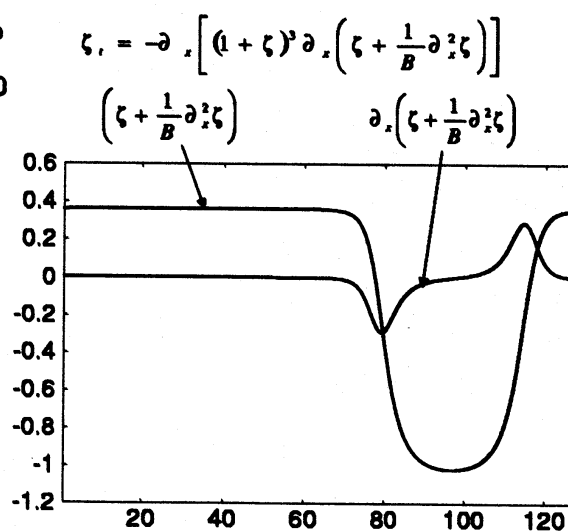
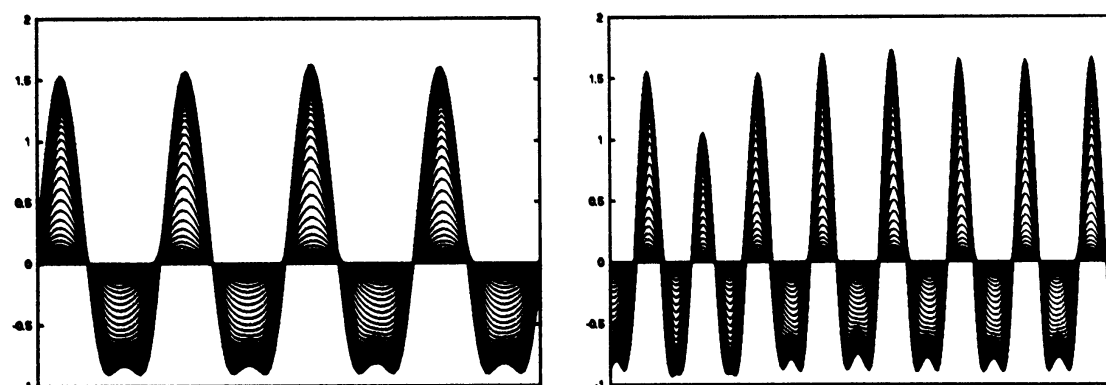


図3: $t = 6000s$ の図1(a)の場合



(a) 波数 4

(b) 波数 8

図 4: 波形の時間発展. 攪乱のみが初期条件となっている. 上向きに g をとっており, -1 が壁面に相当する.

4 数値シミュレーション結果

次に計算領域を 2 次元に拡張した. その結果について述べる. 初期条件は 1 次元方向にロール形状を施したものに微小な攪乱を加えたもの, ガウス分布に微小な攪乱を加えたもの, 攪乱だけを加えたものの 3 つのケースについて調べた. いずれも初期形状のオーダーは $O(\zeta) = 0.01$ 以内におさめている. また, ここで用いた刻み幅は, 1 波長 (λ_m) あたり 16 分割で空間領域の大きさは $L_x = L_y = L \times \lambda_m (L = 8)$ としてある. 1 次元のときと比べて特徴的なのは, 破断 (液層表面が固体壁に付着する) 時間がきわめて早い ($t \approx 5000$ 程度, 1 次元では $t > 60,000$) という事, 表面の最大振幅が $\zeta_{max} \approx 7.0$ (実空間で $1.4mm$) あたりまで伸びるということである (図 6 参照). また, 表面変形が発達し六角形パターンが形成される経過の中で, 各々ピークが互いに引きあい運動を始め, 近くにあるピークを吸収して振幅を増大させるものがあるなど, 1 次元では生じない興味深い現象が見いだされた. 破断する直前での平均波数については, ロール&ランダムでは, $\bar{k}/k_m = 1.15$, ガウス分布&ランダムでは, $\bar{k}/k_m = 1.13$, ランダムでは $\bar{k}/k_m = 1.14$ という結果を得た. つまり, 最大増幅率に対応した波数よりも若干大きな値が算出された. この結果は, Fermigier et al[2] で, 最大増幅率を与える波長よりも少し長い波長が得られたという結果と合わない. 彼らは, 実験図のピークの間隔から波長を求め, どのように平均をとったか不明であるので, 単純な比較はできない.

4.1 ロール&ランダム

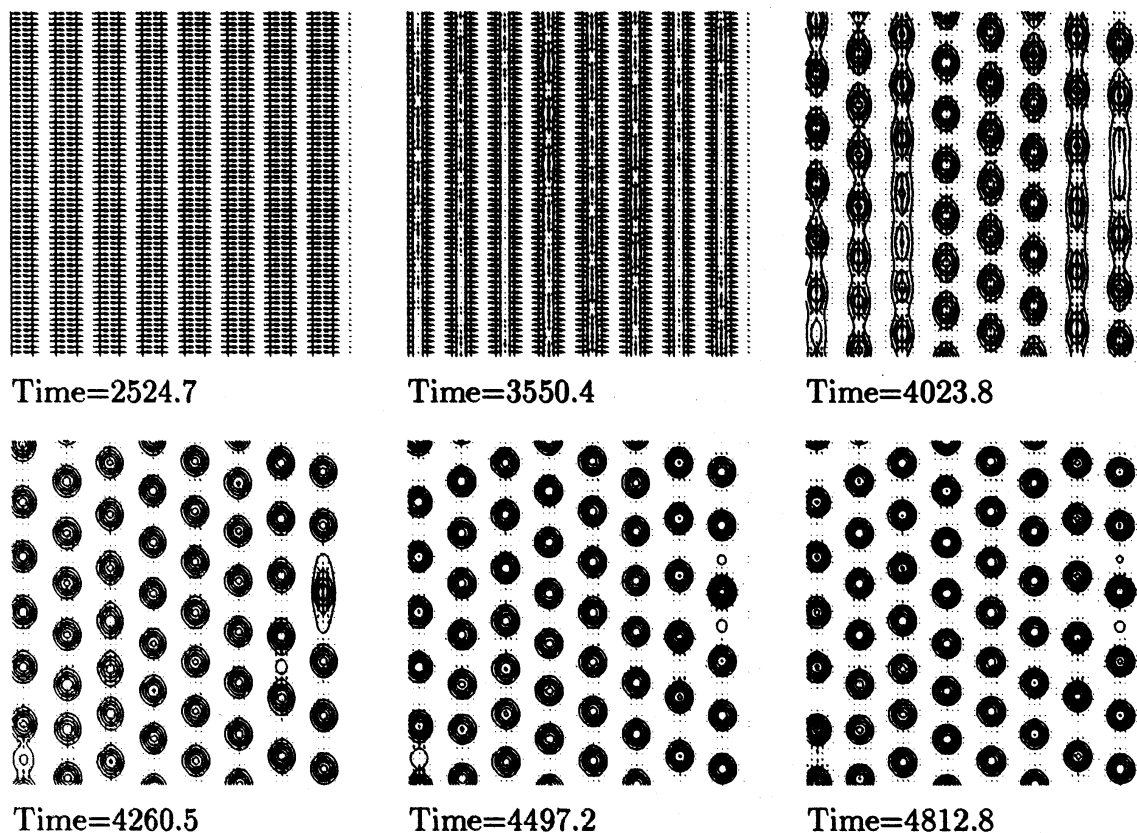


図 5: ロール&ランダム

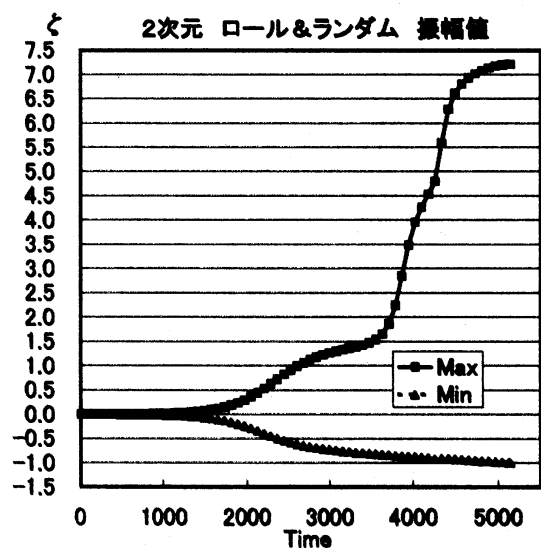


図 6: 最大値と最小値の時間発展

図 6 は液層の振幅の時間発展を示している。 $T = 3500$ あたりまではロー

ル形状がそのままの形で振幅が成長し、それを過ぎると非線形項の影響がはじめて 2 次元方向に攪乱が成長をはじめ、六角形パターンのピークを作り出してくるので、振幅最大値の傾きが急になってくる。 $T = 4000$ あたりでまた変化量が増えているのはピークが融合したためであり (図 5 の右真中あたり)、そのピークが振幅最大値となり、最終段階ではその付近で液層表面が壁面に付着し、破断に達する。

図 7 はそのピークが融合する様子を断面から見たもので、速度ベクトルからもわかるように、はじめは 2 つのピークが形成されるもの、次第に寄り合ってきて 1 つの大きなピークに成長していることがわかる。

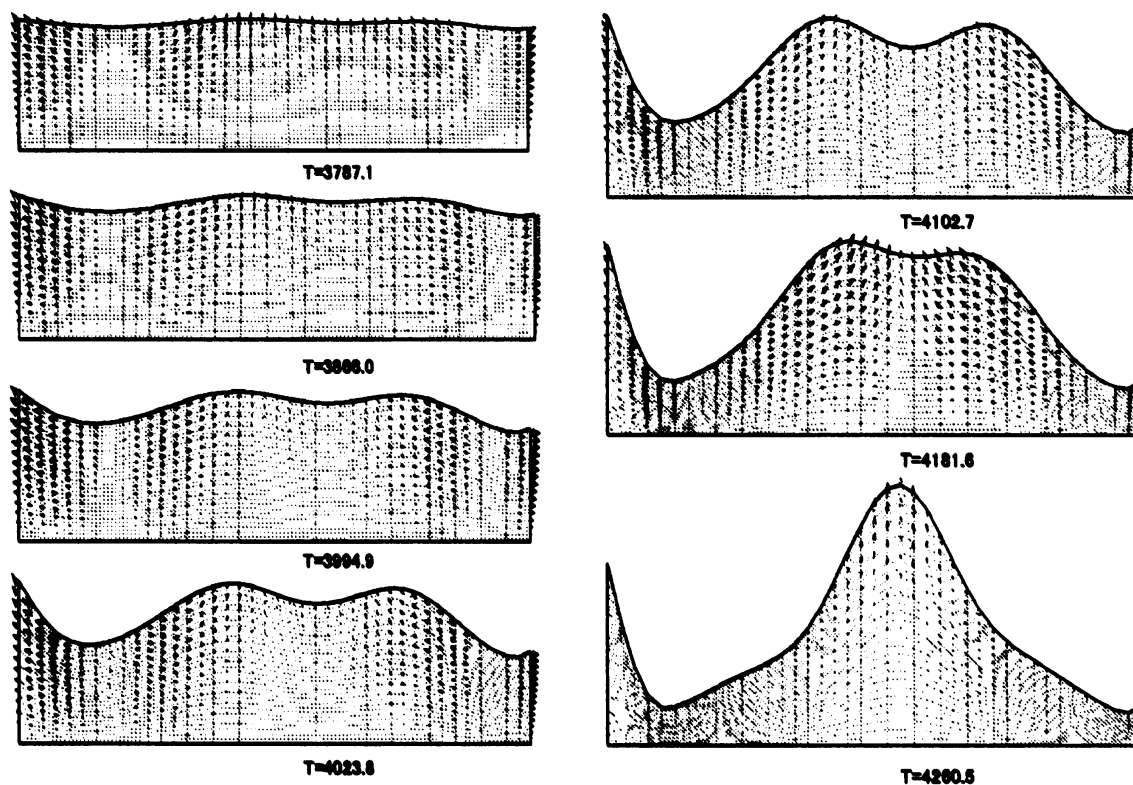
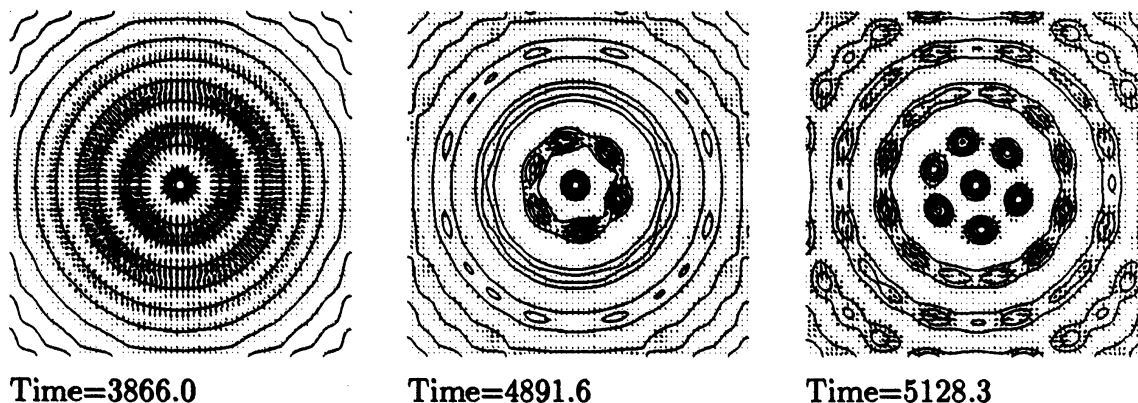


図 7: ピークの融合

4.2 ガウス分布&ランダム

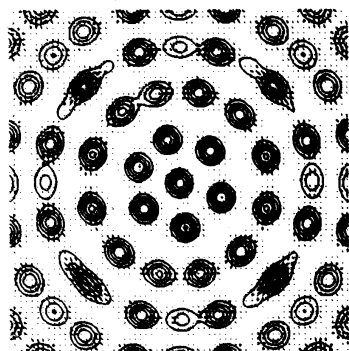
これは、Fermigier et al が行った実験と同様の初期パターンを再現したものである。彼らの実験では、初期パターンで単独の微小なピークを、液層表面にある小さな塵が原因でできたものとしており、それと同じ状態をガウス分布により再現している。時間発展が進むと局所的な攪乱から同心円状にピークができ、そのピークは次第に六角形パターンを形成するものになっていき、最終的に破断する(破断時間はおおよそ7000sで、これは実験で得られた時間発展とおおよそ一致)という、実験と定性的に同じ結果を得た。



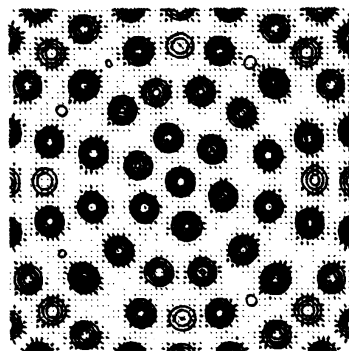
Time=3866.0

Time=4891.6

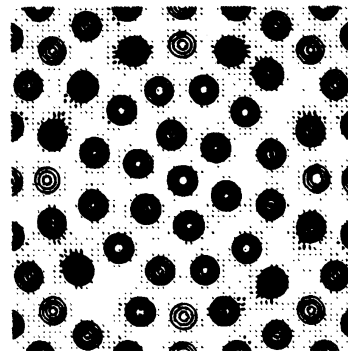
Time=5128.3



Time=5443.9



Time=5917.3

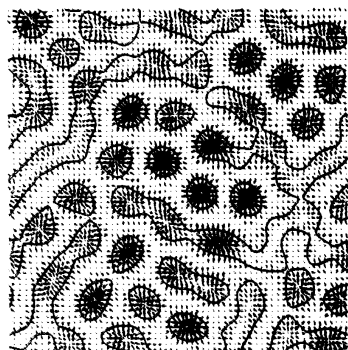


Time=7021.9

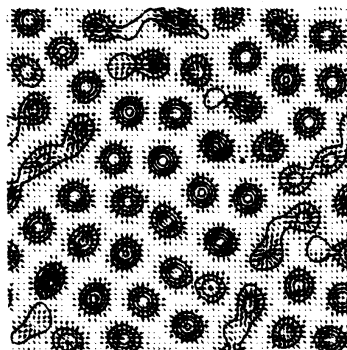
図 8: ガウス分布&ランダム

4.3 ランダム

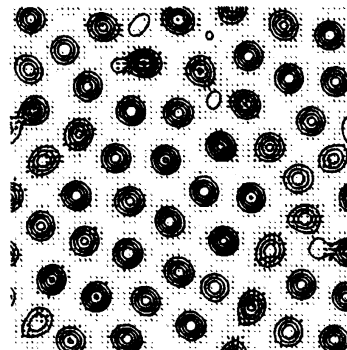
これは初期条件として微小な攪乱のみを与えたものであるが、時間発展が進むに従い液層はピークを作り始め、また近くにあるピークを吸収するものも出始め、成長を続ける。最終的には今までの結果と同様に六角形パターンを形成し、破断に至る。線形増幅率も初期段階では理論値と一致しており、この計算方法は妥当であることが示唆される。



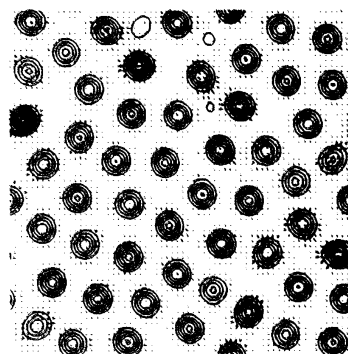
Time=3077.0



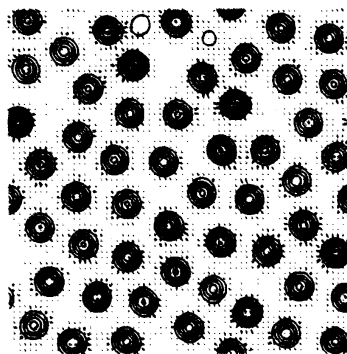
Time=3550.4



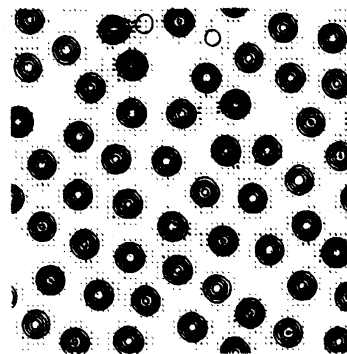
Time=3866.0



Time=4181.6



Time=4576.1



Time=4970.5

図 9: ランダム

5 まとめ

粘性と表面張力を考慮に入れた薄膜液層のレイリー・テイラー不安定性を、2次元長波長方程式を導出して数値的に解いた。そして計算結果が実験で得られた2次元六角形パターンが再現できることを確認した。また、破断時間においても、初期条件を実験と同様にした場合、おおよそ一致する結果を得た。しかしながら、潤滑近似で用いた z 方向の速度の近似 ($w/u \approx 0$) が、成長するとピーク先端では成立しないので、実験とどの程度あうか検討する必要がある。ただし、Fermigier et al[2] の実験では表面張力の定量的な測定がなされていないので、比較することはできなかった。ピークの部分は軸対称とみなされるので、今後定常な軸対称と比較する必要がある。また、ピークの融合は裾における表面変形のアンバランスから生じると考えられるが、その定量的な説明も検討する必要がある。

参考文献

- [1]G. I. Taylor, Proc. R. Soc. London. **A201**, 192 (1950)
- [2]M. Fermigier, L. Limat, J. E. Westfreid, P. Boudinet and C. Quilliet, J. Fluid Mech. **236**, 349 (1992)
- [3]J. A. Whitehead and D. S. Luther, J. Geophys. Res. **80**, 705 (1975)
- [4]S. G. Yiantsios and B. G. Higgins, Phys. Fluids **A1**, 1484 (1989)
- [5]L. W. Schwartz, Advances in Coating and Drying of thin films, 3rd european coating symposium, Erlangen, 105 (1999)
- [6]P. S. Hammond, J. Fluid Mech. **137**, 363 (1983)
- [7]A. Oron and P. Rosenau, J. Phys. 2(France) **2**, 131 (1992)