数理解析研究所講究録 1211 巻 2001 年 122-128

調和関数のFourier-Ehrenpreis積分表示

千葉工業大学自然系 山根英司
Hideshi YAMANE, Chiba Institute of Technology

1 Ehrenpreisの基本原理

$z\in\mathbf{C}^n$ の多項式 $P_1(z),\ldots,P_m(z)$ を考える．$P=(P_1,\ldots,P_m)$ は $\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^m$ への写像を定める．

$\mathbf{R}_t^n$ の有界凸開集合 Ω において定数係数線形偏微分方程式系

$$(*)\quad P_j(D)u(t)=0,\quad 1\le j\le m,\quad t\in\Omega\subset\mathbf{R}_t^n$$

を考える．ここで，$\mathbf{R}_t^n$ の座標を $t=(t_1,\ldots,t_n)$ とし，$D=D_t=(D_1,\ldots,D_n)$, $D_j=i\partial/\partial t_j\,(1\le j\le n)$ とする．(D_j の符号は慣用と違うが，Berndtsson-Passare に倣う．)

このとき Ehrenpreis の基本原理によれば $P^{-1}(0)=\bigcap_{j=1}^m\{z\in\mathbf{C}^n;P_j(z)=0\}$ に台を持つ測度 μ_k が存在して

$$u(t)=\sum_k\int_{P^{-1}(0)}A_k(z,t)e^{-i\langle z,t\rangle}d\mu_k(z),\quad t\in\Omega$$

が成り立つ．ここで A_k は多項式で，各 $z\in P^{-1}(0)$ を固定したとき，t の関数 $A_k(z,t)e^{-i\langle z,t\rangle}$ は $(*)$ の解である．

証明は構成的でなく，Hahn-Banach の定理を用いる．(Hahn-Banach は Zorn の補題を用いて示されることに注意しよう．)

2 基本原理の具体的バージョン

もともと基本原理は抽象的な存在定理で，測度 μ_k を具体的な式で書くことは出来なかった．しかし，多変数複素解析の積分公式の発達により，測度の代わりにカレントを用いて，解が具体的に書けるようになった．ここでは Berndtsson-Passare の結果を紹介しよう．

まず $\Omega\subset\mathbf{R}_t^n$ は0を含み，有界かつ狭義凸で，境界は滑らかとする．

$z\in\mathbf{C}^n$ を t に dual な変数とし，$y=\mathrm{Im}z\in\mathbf{R}^n$ とおく．$\psi(y)=\sup_{t\in\Omega}\langle t,y\rangle$ を Ω の台関数とする．

ψ は1次斉次 $(\psi(\lambda y)=\lambda\psi(y),\ \lambda>0)$ で狭義凸な関数であり，$y\neq 0$ で滑らかである．$y=0$ における特異性は都合が悪いので，ψ の値を $y=0$ の近くで適当に修正して，$\mathbf{R}^n_y$ 全体で滑らかな狭義凸関数 $\varphi(y)>0$ を作る．$|y|\gg 0$ で $\varphi\equiv\psi$ である．$\varphi'=\mathrm{grad}\varphi$ とおく．$\varphi':\Omega\to\bar{\Omega}$ かつ

$$\begin{array}{lll}\varphi'(y)\in\partial\Omega & \text{if} & |y|\gg 0,\\ \varphi'(y)\in\Omega & \text{if} & 0\le|y|\ll 1\end{array}$$

となるように φ を作れる．

多項式の族 $\{g_{jk}(z,\zeta)\}_{j=1,\dots,m;k=1,\dots,n}$ を $\{P_j\}$ に付随する Hefer map とする．すなわち

$$P_j(\zeta)-P_j(z)=\sum_{k=1}^{n}g_{jk}(z,\zeta)(\zeta_k-z_k),\quad 1\le j\le m$$

とする．($\{g_{jk}\}$ は一意ではないが，一組を選ぶ.)

$$g_j(z,\zeta)=\sum_k g_{jk}(z,\zeta)dz_k,\quad g(z,\zeta)=g_m\wedge\cdots\wedge g_1$$

とおく．g は z の $(m,0)$-形式で，ζ をパラメータに持つ．

P に関して次の2つの仮定をおく:

(H1): $P:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^m$ は complete intersection, すなわち，$\mathrm{codim}_{\mathbf{C}}P^{-1}(0)=m$. 特に $m\le n$.

(H2): P は準楕円型である．すなわち正数 A,γ が存在して，任意の $z\in P^{-1}(0)$ に関して $|z|^\gamma\le A(1+|y|)$ が成り立つ．

定理 1 (Berndtsson-Passare) もし $u(t)\in\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ が Ω で $(*)$ をみたすならば，任意の $t\in\Omega$ に対して

$$(\#)\quad u(t)=\frac{1}{(2\pi i)^n}R(z).g(z,D_t)u(\varphi'(y))\wedge e^{-i\langle z,t-\varphi'(y)\rangle}(2\bar{\partial}\partial\varphi(y))^{n-m}$$

が成り立つ．ここで $R(z)=\bar{\partial}[1/P_1(z)]\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}[1/P_m(z)]$ である．

$R(z)$ はいわゆる留数カレントであり，主値のようなものである ([2], [7])．$P_j\neq 0$ のところで $\bar{\partial}[1/P_j]=0$ だから $\mathrm{supp}\,R(z)\subset P^{-1}(0)$ は明らか．$R(z)$ は z に関する微分を含むことがあり，その場合 $te^{-i\langle z,t\rangle}$ のような項が現れる．$A_k(z,t)$ に相当する因子が見かけ上現れないのはこれが理由である．なおこの結果は Rigat によって一般化されている．

さて，ラプラシアンの場合にこの式がどうなるか調べてみよう．$P(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$, $g(z,\zeta) = \sum_{k=1}^{n}(z_k + \zeta_k)dz_k$ より，

$$g(z, D_t)u(\varphi'(y)) = \sum_{k=1}^{n}\{z_k u(\varphi'(y)) + (D_k u)(\varphi'(y))\}dz_k$$

となる．$u(\varphi'(y))$ は Dirichlet 境界値 (と u の Ω での値) であり，$(D_k u)(\varphi'(y))$ は大体 Neumann 境界値にあたる．調和関数は Dirichlet 境界値だけで決まるから，(#) には無駄がある．Dirichlet 境界値だけを含む Fourier-Ehrenpreis 積分表示を得たい．そのような結果を，3 変数の場合に関して，次の節で述べる．2 変数の場合は第 5 節で述べる．

3 主結果

$n = 3$ とする．$\Omega = \{t \in \mathbf{R}^3; |t| < 1\}$ とすると $\partial\Omega = S^2$ である．$V = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3; z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$ とおく．V の smooth locus $V \setminus \{0\}$ に沿う積分のカレントを $[V]$ と表す．($V \setminus \{0\}$ は複素多様体だから自然な向きがある．) $2\pi i[V] = \bar{\partial}[1/z^2] \wedge d(z^2)$ であるから，$[V]$ による積分表示が得られれば，留数カレント $\bar{\partial}[1/z^2]$ による積分表示も同時に得られたことになる．

次が主結果である．

定理 2 (山根) $u(t) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ が Ω で調和と仮定する．$v = u|_{\partial\Omega} \in \mathcal{C}^0(S^2)$ を Dirichlet 境界値とする．このとき

$$u(t) = [V] \cdot \frac{1}{4\pi^2}\left(2 - \frac{1}{|y|}\right) v(y/|y|) e^{-i\langle z, t - y/|y|\rangle}(\bar{\partial}\partial|y|)^2, \quad t \in \Omega$$

が成り立つ．特に，$u(t)$ は $\left\{\exp(-i\langle z, t - y/|y|\rangle)\right\}_{z^2=0,\, y/|y| \in \operatorname{supp} v}$ の重ね合わせである．

4 証明

大雑把にいって V に座標を入れて計算する．

まず $z^2 = 0$ は $|x|^2 - |y|^2 = \langle x, y\rangle = 0$ と同値である．つまり $|x| = |y|$ で，x と y は直交する．

$y \neq 0$ を固定すれば，対応する x の全体は S^1 と微分同相である．よって V は $\mathbf{R}^3_y \times S^1_\theta$ にほぼ等しい．しかし本当に等しいわけではない．(そのような写像を大域的に作るには位相的障害がある．) そこで V と $\mathbf{R}^3_y$ それぞれの稠密な開集合

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V \setminus \{y_1 = y_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^3, \\ E &= \mathbf{R}^3_y \setminus \{y_1 = y_2 = 0\}\end{aligned}$$

を導入する．$\hat{V}$ は複素多様体である (特異点がない) から自然な向きを持つ．$E \times S^1_\theta$ には $dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta$ で向きをつける．

$E \times S^1$ から $\hat{V}$ への，向きを保つ微分同相 Φ を構成しよう．そのためにまず，$y \in E$ に対し

$$\begin{aligned}v &= v(y) = \frac{|y|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}(-y_2, y_1, 0), \\ w &= w(y) = \frac{1}{|y|} y \times v = \frac{(-y_1 y_3, -y_2 y_3, y_1^2 + y_2^2)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\end{aligned}$$

とおく．$\langle y, v\rangle = \langle v, w\rangle = \langle w, y\rangle = 0$ かつ $|y| = |v| = |w|$ である．

次に $x = x(y, \theta) = v(y)\cos\theta + w(y)\sin\theta$ とおけば当然 $\langle x, y\rangle = 0, |x| = |y|$ であり，

$$\Phi : E \times S^1 \to \hat{V}, \quad (y, \theta) \mapsto z = x(y, \theta) + iy$$

は向きを保つ微分同相となる．

$\hat{V}$ は V の稠密な開集合だから，$[V]$ を計算するには $E \times S^1$ 上の積分を考察すればよい．後者と $(\mathbf{R}^3_y \setminus \{0\}) \times S^1$ 上の積分との区別を必要に応じて忘れる．

補題 1

$$\begin{aligned}\Phi^*\left(-i\langle z, t - y/|y|\rangle\right) &= \langle y, t\rangle - |y| - i\langle x(y, \theta), t\rangle, \\ \Phi^*\left((\bar{\partial}\partial|y|)^2\right) &= \frac{1}{2|y|} dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta\end{aligned}$$

が成り立つ．

$t \in \Omega$ より第 1 式の右辺の実部は $y \neq 0$ のとき負であることに注意しよう．

第 2 式を証明するには特別なアイデアはいらないが，相当の計算量を要する．筆者は Maple を用いた．

第 2 式の結果がこのように簡潔になる本当の根拠は不明で，計算してみたらきれいになったとしか言えない．角度 θ の選び方が特に効いているわけではない．実際 $\{y, v, w\}$ 以外の orthogonal frame を用いて角度 ξ を導入したとすれば (向きは同じとする) $\xi = \theta + \eta(y)$ なる関数 $\eta(y)$ が存在するが，明らかに $dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\xi = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta$ が成り立つ．

$E \times S^1$ 上の，あるいは $(\mathbf{R}^3_y \setminus \{0\}) \times S^1$ 上の積分を計算するために極座標を導入しよう．$q = |y|, s = y/|y| \in S^2$ とおくと $dy_1 dy_2 dy_3 d\theta = q^2 dq d\theta ds$ となる．まず q についての積分は Laplace 型で容易に計算できる．次に θ について積分すると，残るのは $s \in S^2$ に関する積分で，これが Poisson 積分に一致することが証明できる．

5　2変数の場合

$\Omega = \{t \in \mathbf{R}^2; |t| < 1\}$ とすると $\partial\Omega = S^1$ である．$V = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; z^2 = z_1^2 + z_2^2 = 0\}$ とおく．V の smooth locus $V \setminus \{0\}$ に沿う積分のカレントを $[V]$ と表す．

定理 3 (山根) $u(t) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ が Ω で調和と仮定する．$v = u|_{\partial\Omega} \in \mathcal{C}^0(S^1)$ を Dirichlet 境界値とする．このとき

$$Q[v](t) = \frac{-1}{16\pi^2}[V] \cdot v(y/|y|) e^{-i\langle z, t - y/|y|\rangle} \bar{\partial}\partial|y|$$

とおけば, 任意の $t \in \Omega$ に対して $u(t) = 2Q[v](t) - Q[v](0)$ が成り立つ．

6　n 変数への一般化をめざして

n 変数調和関数の場合に同様の公式は今のところ得られていない．

Berndtsson-Passare の式と同様に，筆者の式も，背景には多変数複素解析の積分公式があると予想される．その積分公式を n 変数で定式化できれば，調和関数の Fourier-Ehrenpreis 積分表示はすぐに求められると思う．

最後に，和田-森本の公式を簡単に紹介しよう．

$z \in \mathbf{C}^{d+1}$ に対し，$z = x + iy$ とおくとき，

$$N = \{z; z_1^2 + \cdots + z_{d+1}^2 = 0, |x| = |y| = 1\}$$

と定めると，Nは規準的な測度dNを持つ．もし$f(z)$が(複素)調和関数，すなわち$(\partial^2/\partial z_1^2+\cdots+\partial^2/\partial z_{d+1}^2)f(z)=0$ならば，

$$f(z)=\int_N f(\rho z'/2)\frac{1+\bar{z}'\cdot(z/\rho)}{\{1-\bar{z}'\cdot(z/\rho)\}^d}dN(z')$$

が成り立つ．ここでρは適当な正定数．

$N\subset\{z\in\mathbf{C}^{d+1};z_1^2+\cdots+z_{d+1}^2=0\}$だから基本原理と関係があるかも知れないが，指数関数とどう結びつくのかは明らかでない．また，右辺は$\frac{\rho}{2}N=\{\rho z/2;z\in N\}$上での$f$の値で書けているが，$\frac{\rho}{2}N\not\subset\mathbf{R}^{d+1}$だから，筆者の公式との関係はつきそうにない．

References

[1] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, *"Residue currents and Bezout identities"*, Birkhäuser, Basel, 1993.

[2] B. Berndtsson and M. Passare, Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle, *J. Funct. Anal.*, **84** (1989), 358-372.

[3] J. E. Björk, "Rings of differential operators", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[4] N. R. Coleff and M. E. Herrera, "Les courants résiduels associés à une forme méromorphe", Lect. Notes in Math. **633**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[5] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables, third edition (revised)", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1990.

[6] A. Meril and A. Yger, Problème de Cauchy globaux, Bull. Soc. math. France, **120** (1992), 87-111.

[7] M. Passare, A calculus for meromorphic currents, J. reine angew. Math., **392** (1988), 37-56.

[8] M. Passare, Residue solutions to holomorphic Cauchy problems, "Seminar in Complex Analysis and Geometry 1987 (Rende, 1987)", EditEl, Rende, 1988, 101-105.

[9] S. Rigat, Version explicite du principe fondamental d'Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov dans le cas non homogene, J. Math. Pures Appl., **76** (1997), 777-799.

[10] H. Yamane, Residue currents and a Fourier integral representation of harmonic functions, preprint.

[11] H. Yamane, Fourier integral representation of harmonic functions in terms of a current, preprint.

[12] A. Yger, Formules de division et prolongement méromorphe, Springer Lecture Notes in Math., **1295** (1987), 226-283.

[13] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo Journal of Math., **10**(1987), 93-105