

# 不安定構造の Generic 自己同型写像

東海大・理・情報数理 桔梗宏孝 (Hiroataka Kikyo)

Dept. of Math. Sci., Tokai University

kikyo@ss.u-tokai.ac.jp

## 1 はじめに

言語  $\mathcal{L}$  のモデル完全な理論  $T$  に対し (不完全な) 理論  $T_\sigma = T \cup \{\sigma \text{ は } \mathcal{L} \text{ 自己同型}\}$  を考える.  $T_\sigma$  の言語は  $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L} \cup \{\sigma\}$  である.  $T$  のモデル  $M$  と  $\sigma \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(M)$  に対し,  $\sigma$  が generic 自己同型であるとは  $(M, \sigma)$  が  $T_\sigma$  の存在閉モデル (an existentially closed model) ということである.

一般に構造  $D$  が理論  $U$  の存在閉モデルであるとは, (1)  $D$  が  $U$  のモデルで, (2)  $D$  にパラメータをもつ量化子のない任意の論理式 (たとえば  $D$  係数の方程式) について, それが  $D$  を拡大した  $U$  のモデルで解をもつならば  $D$  でも解をもつということである. たとえば, 体の理論の存在閉モデルは代数的閉体である.

一般的な問題として,  $T_\sigma$  の存在閉モデルのクラスが初等クラスになるための  $T$  に関する必要十分条件を求めるといことが考えられる.  $T_\sigma$  の存在閉モデルのクラスが初等クラスになるとは,  $\mathcal{L}_\sigma$  の一階の理論でそれが公理化できるということであるが, この理論を  $TA$  と書くことにする. これは  $T_\sigma$  のモデルコンパニオンである.

この問題は  $T$  を安定理論に限っても難しいようである [1], [5], [9]. この論文の意味での generic 自己同型写像は Lascar [8] により最初に研究された.  $T$  が代数的閉体の理論  $ACF$  の場合は Chatzidakis と Hrushovski [2] によって詳しく調べられ, この問題がさらに興味あるものになった. Chatzidakis と Pillay は安定な  $T$  に対する  $TA$  の一般論を展開したが [3],  $TA$  の存在条件についてはそれほど述べていない.

Kudaibergenov は,  $TA$  が存在するならば  $T$  において「無限に存在する」という量化子が消去できることを示した. したがって,  $T$  が安定で  $TA$  が存在するならば  $T$  は fcp をもたないことになる.

一方, 坪井氏はランダムグラフの理論に対する  $TA$  を構成しようとしていたが, ある種の難点を見つけていた. それをもとに筆者はランダムグラフの理論には  $TA$  が存在しないことを示した. この事実を筆者が Pillay に話したとき, 彼は Kudaibergenov の結果をふまえて, fcp が理由かも知れないと言った. これは, Kudaibergenov の結果から  $T$  が安定の場合は正しいので,  $T$  が不安定ならば  $TA$  はないという予想

そこで、稠密全順序集合の理論や無原子ブール代数の理論についても調べてみたが、ランダムグラフの場合と同様の方法により  $TA$  が存在しないことがわかった。稠密全順序集合の場合はランダムグラフの場合より自然に議論ができたが、その議論をさらに自然に拡張することにより、 $T$  が不安定で independence property をもたなければ  $TA$  が存在しないことがわかった [4]。  $T$  が不安定で independence property をもたなければ  $T$  は strict order property をもつが、Shelah は strict order property をもつならば  $TA$  が存在しないことを示した [6]。

無原子ブール代数やランダムグラフは independence property をもつので、これらの場合を含む一般の場合についても  $TA$  の非存在を示したかったが、 $T_\sigma$  が融合性 (amalgamation property) をもつ場合も、 $T$  が不安定ならば  $TA$  が存在しないこともわかった [4]。

$TA$  の存在しない例は Hrushovski も与えており、単純理論の有名な例である ACFA や擬有限体の理論  $\text{Psf}$  に対しても  $TA$  は存在しない (未発表)。彼の議論は体論を本質的に使っているので、なかなか一般化ができない。  $\text{ACFA}_\sigma$  は融合性をもたないが、 $\text{Psf}_\sigma$  が融合性をもつかどうかは知られていないようである。

以下、小文字  $a, b, c$  等はモデルの要素の有限列を表し、 $x, y$  等は変数の有限列を表す。  $a$  が要素の有限列で  $A$  が要素の集合のとき、 $a \in A$  は  $a$  の各要素が  $A$  に属することを表す。  $\varphi(x, a)$  がパラメータをもつ論理式で  $M$  が構造のとき、 $\varphi(M, a)$  は  $\varphi(x, a)$  の  $M$  における解集合を表す。また、 $\sigma: M \rightarrow M$  で、 $p$  が  $M$  上の部分タイプのとき、 $p$  に属する論理式のパラメータ (係数) を  $\sigma$  で動かして得られる部分タイプを  $\sigma(p)$  と書く。

## 2 具体例

この節では稠密全順序集合とランダムグラフの場合について generic 自己同型写像のクラスが初等的にならないことを示す。これらは次に定義する不安定構造の典型例である。

**定義 2.1** 構造  $M$  において、自然数  $k$ 、 $M^k$  上の定義可能な関係  $r(x, y)$ 、 $k$  組の列  $a_i \in M^k$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) が存在して、 $i < j \Leftrightarrow r(a_i, a_j)$  が成り立つとき、 $M$  は不安定であるという。理論  $T$  が不安定なモデルをもつとき、 $T$  を不安定と呼ぶ。

**命題 2.2**  $T = \text{Th}(\mathbb{Q}, <)$  に対し、 $TA$  は存在しない。

**証明**  $TA$  が存在すると仮定する。  $\sigma_0(x) = x + 1$  とすると  $\sigma_0$  は  $(\mathbb{Q}, <)$  の自己同型写像である。  $(\mathbb{Q}, <, \sigma_0)$  を  $TA$  のモデル  $(N, <, \sigma)$  に拡大する。さらに初等拡大を考えることにより、 $(N, <, \sigma)$  は十分飽和と考えてよい。さて、次の部分タイプ  $p(x)$  を考える。

$$p(x) = \{n < x : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

すると,  $(N, <, \sigma)$  において次の2つが成り立つ.

$$(1) p(x) \vdash \exists z (0 < z < x \wedge \sigma(z) = z),$$

$$(2) q(x) \text{ が } p(x) \text{ の有限部分ならば } q(x) \not\vdash \exists z (0 < z < x \wedge \sigma(z) = z).$$

まず (2) を示す.  $q(x)$  を  $p(x)$  の有限部分とすると, 十分大きな自然数  $m$  は  $q(x)$  を満たす. さて,  $q(x) \vdash \exists z (0 < z < x \wedge \sigma(z) = z)$  とすると, ある  $b \in N$  に対し  $(0 < b < m \wedge \sigma(b) = b)$  が  $(N, <, \sigma)$  で成り立つ. ところで,  $\sigma$  は  $\sigma_0$  の拡張だったので,  $\sigma(0) = 1, \sigma^2(0) = 2, \dots, \sigma^m(0) = m$  である. 一方,  $b$  は  $\sigma$  の固定点なので,  $\sigma^m(b) = b$  である.  $\sigma$  が  $<$  についての同型写像なので,  $0 < b$  から  $m = \sigma^m(0) < \sigma^m(b) = b < m$  となり, 矛盾する.

次に (1) を示す. これが示せれば  $(N, <, \sigma)$  の飽和性に矛盾するので, 命題が示せたことになる.

$p(x)$  の  $N$  での解  $c$  を任意にとる. 自然数  $0, 1, 2, \dots$  と  $c$  を含む  $(N, <, \sigma)$  の可算な初等部分構造  $(M, <, \sigma|_M)$  をとる.  $(M, <)$  において  $0, 1, 2, \dots$  の自然数で決まる切断のタイプ  $r(z)$  を考える ( $r(z) = \{a < z : a \in M, \exists i \in \mathbb{N}(a < i)\} \cup \{z < d : d \in M, \forall i \in \mathbb{N}(i < d)\}$ ). すると,  $\text{Th}(\mathbb{Q}, <)$  は QE を許すので  $r(z)$  は  $M$  上の完全タイプで,  $0 < z < c$  は  $r(z)$  に属し,  $\sigma(r) = r$  である.

$(N, <)$  が十分飽和なので, 次のような  $(N, <)$  の初等部分構造  $(M', <)$  とその自己同型写像  $\tau$  が存在する:  $r$  の解  $b'$  で  $\tau(b') = b'$  となるものが  $M'$  からとれ,  $\tau|_M = \sigma|_M$  である. すると  $(M', <, \tau)$  において  $(0 < b' < c \wedge \tau(b') = b')$  が成り立つが,  $(M, <, \sigma|_M) \subset (M', <, \tau)$  で  $(M, <, \sigma|_M)$  が  $T_\sigma$  の存在閉モデルなので,  $(0 < z < c \wedge \sigma(z) = z)$  は  $(M, <, \sigma|_M)$  においても解をもつ. 以上により (1) が示せたので命題が得られる.  $\square$

$T$  が不安定で independence property をもたない場合 (もちろんモデル完全性も仮定する) に  $TA$  が存在しないことの証明も同様にできる. 自然数列  $0, 1, 2, \dots$  の代わりに一様列 (indiscernible sequence)  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) を  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$  となるようにとる.  $<$  は不安定性を与える順序である. したがって,  $a_i$  は一般に組である.  $\sigma_0(a_i) = a_{i+1}$  となるように  $T$  のあるモデルの自己同型写像をとり,  $TA$  の飽和モデルに拡大して同様に議論すればよい.  $r$  は  $T$  の言語に対する  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) の  $M$  における平均タイプ (average type) とする. すると independence property が無いことから  $r$  は  $M$  上の完全タイプになる.

**命題 2.3**  $(G, R)$  がランダムグラフのとき,  $T = \text{Th}(G, R)$  に対し,  $TA$  は存在しない.

**証明**  $TA$  が存在すると仮定する.  $(G, R)$  の自己同型写像  $\sigma_0$  と  $a \in G$  を  $a$  を含む  $\sigma_0$  軌道が無限になるようにとる (たとえば往復論法で存在が示せる). すると,  $i \neq j$  ならば  $\sigma_0^i(a) \neq \sigma_0^j(a)$  である.  $(G, R, \sigma_0)$  を  $TA$  のモデル  $(N, R', \sigma)$  に拡大す

る。表記を簡単にするため、 $R'$  も  $R$  と書くことにする。 $(N, R, \sigma)$  は十分飽和なモデルとしてよい。さて、次の部分タイプ  $p(x)$  を考える。

$$p(x) = \{x \neq \sigma^m(a) : m \in \mathbb{Z}\}$$

$p(x)$  は  $a$  を含む  $\sigma$  軌道に  $x$  がないということを記述している。すると、 $(N, R, \sigma)$  において次の2つが成り立つ。

$$(1) p(x) \vdash \exists z (R(a, z) \wedge \neg R(x, z) \wedge \sigma(z) = z),$$

$$(2) q(x) \text{ が } p(x) \text{ の有限部分ならば } q(x) \not\vdash \exists z (R(a, z) \wedge \neg R(x, z) \wedge \sigma(z) = z).$$

まず(2)を示す。 $q(x)$  を  $p(x)$  の有限部分とすると、十分大きな自然数  $m$  に対し、 $\sigma^m(a)$  は  $q(x)$  を満たす。(2)の結論の否定が成り立つとすると、 $\sigma$  のある不動点  $z$  に対し、 $R(a, z)$  と  $\neg R(\sigma^m(a), z)$  が成り立つ。 $z$  が  $\sigma$  の不動点で、 $\sigma$  が同型写像であることより、 $R(a, z)$  から  $R(\sigma^m(a), z)$  が得られるが、これは矛盾である。

次に(1)を示す。これが示せば、 $(N, R, \sigma)$  の飽和性に矛盾するので、命題が示せたことになる。

$p(x)$  の  $N$  での解  $c$  を任意にとる。さらに、 $a$  と  $c$  を含む  $(N, R, \sigma)$  の可算な初等部分構造  $(M, R|M, \sigma|M)$  をとる。 $a$  を含む  $\sigma$  軌道を  $A$  とし、 $M$  上のタイプ  $r(z)$  を

$$r(z) = \{R(d, z) : d \in A\} \cup \{\neg R(d', z) : d' \in M \setminus A\}$$

と定義すると  $r(z)$  は  $M$  上の言語  $\{R\}$  に対する完全タイプで、 $\sigma(r) = r$  である。 $(N, R)$  の飽和性より、 $(N, R)$  の初等部分構造  $(M', R)$  とその自己同型写像  $\tau$  と  $b' \in M'$  が存在して、 $b'$  は  $r(z)$  の解で  $\tau$  の不動点にもなっており、 $\tau|M = \sigma|M$  である。 $(M', R, \tau)$  において  $(R(a, b') \wedge \neg R(c, b') \wedge \tau(b') = b')$  が成り立つが、 $(M, R, \sigma|M) \subset (M', R, \tau)$  で  $(M, R, \sigma|M)$  が  $T_\sigma$  の存在閉モデルなので、 $(R(a, z) \wedge \neg R(c, z) \wedge \sigma(z) = z)$  は  $(M, R, \sigma|M)$  でも解をもつ。以上により(1)が示せたので命題が得られる。□

### 3 一般論

この節では一般的な結果をいくつか証明する。

**定義 3.1**  $T$  を理論とする。任意の論理式  $\varphi(x, y)$  に対しある自然数  $n$  が存在し、 $T$  の任意のモデル  $M$  と任意の  $b \in M$  に対し、 $\varphi(x, b)$  の  $M$  における解の個数が  $n$  個以上ならばその数が無限になるとき、 $T$  において「無限個存在する」という量子子が消去できるという。

**定理 3.2 (Kudaibergenov)**  $T$  がモデル完全で  $TA$  が存在すれば  $T$  において「無限個存在する」という量子子が消去できる。

**証明** 簡単な議論により,  $T$  は完全であると仮定できる.  $TA$  が存在するが, 「無限個存在する」という量化子が消去できないと仮定する. すると, ある論理式  $\varphi(x, y)$  が存在し,  $T$  のあるモデル  $M_0$  において  $b_i \in M_0$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) が存在して, 各  $i \in \mathbb{N}$  について  $\varphi(x, b_i)$  の  $M_0$  における解の個数は  $i$  以上有限になる.

$(M_0, id)$  ( $id$  は恒等写像) を  $TA$  のモデル  $(M, \sigma)$  に拡大する.  $T$  がモデル完全なので  $M_0 \prec M$  である. したがって, 各  $i \in \mathbb{N}$  に対し,  $|\varphi(M_0, b_i)|$  が有限なので,  $|\varphi(M, b_i)| = |\varphi(M_0, b_i)|$  となり, したがって  $\varphi(M, b_i) = \varphi(M_0, b_i)$  となる. すると  $\sigma$  は  $\varphi(M, b_i)$  の要素を点ごとに固定していることになる.

ここで,  $\mathbb{N}$  上の単生成でない超フィルター  $\mathcal{U}$  をとり,  $(M, \sigma)$  の  $\mathcal{U}$  上の超積  $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$  を考える.  $\tilde{b} = \langle b_i : i \in \mathbb{N} \rangle / \mathcal{U}$  とすると,  $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$  において  $\tilde{\sigma}$  は  $\varphi(x, \tilde{b})$  の解を各点ごとに固定する.

一方,  $\varphi(x, \tilde{b})$  は  $\tilde{M}$  において無限個の解をもつ. すると,  $\varphi(x, \tilde{b})$  を含む  $\tilde{M}$  上のタイプ  $p(x)$  で非代数的なものが存在する.  $c \models p(x)$  に対し  $c' \neq c$  なる  $c' \models \tilde{\sigma}(p)$  がとれる. すると  $\tilde{M}$  の拡大  $N \models T$  と  $N$  の同型写像  $\tau$  で,  $\tau|_{\tilde{M}} = \tilde{\sigma}$  かつ  $\tau(c) = c' \neq c$  となるものがとれる.  $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$  は  $T_\sigma$  の存在閉モデルなので,  $\varphi(x, \tilde{b})$  の解で,  $\tilde{\sigma}$  により固定されないものがあることになる. これは先程示したことと矛盾する.  $\square$

**定義 3.3** 構造  $M$  が strict order property をもつとは,  $M$  の要素の組の列  $a_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) と論理式  $\varphi(x, y)$  が存在して,

$$i < j \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(M, a_i) \subset \varphi(M, a_j)$$

となることである.  $\varphi(M, x) \subsetneq \varphi(M, y)$  で  $x < y$  を定義すると,  $x < y$  は  $T$  の言語で定義可能な順序 (非対称な推移関係) で, 無限上昇列をもつものになる. 理論  $T$  が strict order property をもつモデルをもつとき,  $T$  は strict order property をもつという.

**定理 3.4 (with Shelah)**  $T$  がモデル完全で  $T$  が strict order property をもつならば  $TA$  は存在しない.

**証明**  $M_0$  を strict order property をもつ  $T$  のモデルとする. また,  $T$  の言語を  $\mathcal{L}$  とする. したがって, ある自然数  $k$  に対し  $M_0^k$  上の定義可能な順序  $<$  と  $k$  組の集合  $\{a_i : i \in \mathbb{N}\} \subset M_0^k$  が存在して  $i < j$  ならば  $a_i < a_j$  となる. ラムゼーの定理より,  $M_0$  を拡大することにより,  $\langle a_i : i < \omega \rangle$  は  $M_0$  における  $\mathcal{L}$ -様列と仮定してよい. さらに  $M_0$  を拡大することにより,  $\sigma_0(a_i) = a_{i+1}$  となる  $M_0$  の自己同型写像  $\sigma_0$  があると仮定できる. すると,  $(M_0, \sigma_0)$  は  $T_\sigma$  のモデルになる.

さて,  $TA$  が存在するとして矛盾を導こう.  $(M_0, \sigma_0)$  を  $TA$  のモデル  $(N, \sigma)$  に拡大する.  $T$  がモデル完全なので,  $M_0 \prec N$  である.  $(N, \sigma)$  は十分飽和であると仮定してよい. 以下,  $(N, \sigma)$  の中で考える.

部分タイプ  $p(x) = \{a_i < x : i < \omega\}$  と論理式  $\psi(x) \equiv \exists y (a_0 < \sigma(y) < y < x)$  を考えると  $(N, \sigma)$  において次が成り立つ.

(1)  $p(x) \vdash \psi(x)$ ,

(2)  $p(x)$  の任意の有限部分  $q(x)$  に対し,  $q(x) \not\vdash \psi(x)$ .

これらが成り立てば  $(N, \sigma)$  の飽和性に矛盾する.

まず (2) を示す.  $p(x)$  の有限部分  $q(x)$  に対し,  $q(x) \subset \{a_i < x : i < n^*\}$  となる  $n^*$  をとる. すると  $a_{n^*}$  は  $q(x)$  を満たす.  $q(x) \vdash \psi(x)$  とすると,  $a_{n^*}$  は  $\psi(x)$  を満たす.  $b \in N$  を  $a_0 < \sigma(b) < b < a_{n^*}$  となるようにとる.  $a_0 < \sigma(b)$  より,  $a_{n^*} = \sigma^{n^*}(a_0) < \sigma^{n^*+1}(b)$  である.  $\sigma(b) < b < a_{n^*}$  から,

$$\sigma^{n^*+1}(b) < \sigma^{n^*}(b) < \dots < \sigma(b) < b < a_{n^*}.$$

推移性により,  $a_{n^*} < a_{n^*}$  となり矛盾する.

では, (1) を証明しよう.  $c \in p(N)$  と仮定する.  $a_0, c \in M$ ,  $|M| = |T|$ , となるように  $(N, \sigma)$  の初等部分構造  $(M, \sigma|_M)$  をとる.

各  $d \in p(N)$  に対し,  $d' \in p(N)$  かつ  $d' < d$  なるある  $d'$  により  $N$  で満たされる  $\mathcal{L}(M)$  論理式全体の集合を  $\Psi(d)$  とする.

すると,  $d_1, d_2 \in p(N)$  かつ  $d_2 < d_1$  ならば  $\Psi(d_2) \subseteq \Psi(d_1)$  であり, また, コンパクト性により, 任意の  $d_1, d_2 \in p(N)$  に対し,  $d_3 < d_1$  かつ  $d_3 < d_2$  となる  $d_3 \in p(N)$  が存在する.

$\Psi = \bigcap_{d \in p(N)} \Psi(d)$  とおく.

$\Psi$  に属さない  $\mathcal{L}(M)$  論理式全体を  $\{\varphi_i(x) : i < |M|\}$  とする.  $\Psi$  の定義より, 各  $i < |M|$  に対し,  $\varphi_i(x) \notin \Psi(d_i)$  となる  $d_i \in p(N)$  をとる.  $N$  の飽和性と上のことから,  $c^* \in p(N)$  をうまくとると, すべての  $i < |M|$  に対し  $c^* < d_i$  となる.  $\Psi(c^*) \subseteq \Psi(d_i)$  なので, 各  $\varphi_i(x)$  は  $\Psi(c^*)$  に属さない. よって,  $\Psi(c^*) \subseteq \Psi$  となり,  $\Psi(c^*) = \Psi$  となる.

$d \in p(N)$  かつ  $d < c^*$  ならば  $\Psi(d) = \Psi(c^*)$  である. さらに,  $c^* < c$  と仮定できる. 集合  $p(N)$  と  $M$  は  $\sigma$  で不変なので,  $\Psi(c^*)$  も  $\sigma$  で不変である. すなわち, 任意の  $\mathcal{L}$  論理式  $\varphi(x, y)$  と組  $a \in M$  に対し,  $\varphi(x, a) \in \Psi(c^*)$  と  $\varphi(x, \sigma(a)) \in \Psi(c^*)$  は同値になる.

ここで,  $b_1 \in p(N)$  を  $b_1 < c^*$  となるようにとり,  $q_1(x) = \text{tp}_{\mathcal{L}}(b_1/M)$  を考える. すると,  $q_1(x) \subseteq \Psi(c^*)$  である.  $\Psi(c^*)$  は  $\sigma$  で不変だったので,  $\sigma(q_1(x)) \subseteq \Psi(c^*)$  である.  $c^*$  のとり方から  $\Psi(c^*) = \Psi(b_1)$  なので,  $\sigma(q_1(x)) \subseteq \Psi(b_1)$  である.  $\Psi(b_1)$  の定義とコンパクト性から,  $b_2 \in p(N)$  で  $b_2 < b_1$  かつ  $b_2$  が  $\sigma(q_1(x))$  を満たすようなものがとれる.

$\sigma(q_1(x))$  が  $M$  上の完全  $\mathcal{L}$  タイプなので,  $M b_1 b_2 \subset M'$ ,  $\tau(b_1) = b_2$  かつ  $\tau|_M = \sigma|_M$  となる  $N$  の  $\mathcal{L}$  初等部分構造  $M'$  と  $M'$  の  $\mathcal{L}$  自己同型写像  $\tau$  が存在する.

すると, 次が成り立つ.

$$(M', \tau) \models a_0 < \tau(b_1) < b_1 < c.$$

$(M, \sigma|M)$  は  $TA$  のモデルだったので, それは  $T_\sigma$  の存在閉モデルである.  $T$  がモデル完全であることから, 順序  $<$  が  $\mathcal{L}$  の存在形の論理式で定義できることに注意すると, 論理式  $a_0 < \sigma(y) < y < c$  が  $(M, \sigma|M)$  でも解をもつことがわかる. したがって,  $(M, \sigma|M) \models \psi(c)$  である. これで (1) が示せたので, 定理が証明できた.  $\square$

ランダムグラフは strict order property をもたないが,  $TA$  は存在しない.  $T_\sigma$  が融合性をもつ不安定な理論  $T$  に対しては  $TA$  は存在しない.

**定義 3.5** 理論  $U$  が融合性 (amalgamation property) をもつとは,  $U$  の任意のモデル  $M_0, M_1, M_2$  に対し,  $M_0 \subset M_1$  かつ  $M_0 \subset M_2$  ならば,  $M_1 \subset M_3$  なる  $U$  のモデル  $M_3$  が存在して,  $M_2$  が  $M_0$  上  $M_3$  に埋め込めるということである.

$T_\sigma$  が融合性をもつことを Lascar は PAPA と呼んだ. 彼によると, PAPA をもたない理論はあまり知られていない.

**定理 3.6**  $T$  がモデル完全かつ不安定で,  $T_\sigma$  が融合性をもつならば  $TA$  は存在しない.

**証明**  $T$  の言語を  $\mathcal{L}$ , スコーレム化した理論を  $T_S$ , スコーレム化した言語を  $\mathcal{L}_S$  とする. ただし, スコーレム関数は関係記号としていれておく.  $T$  が不安定なので,  $T$  のあるモデル  $D$  と  $\mathcal{L}$  の論理式で定義された  $D^k$  ( $k$  はある自然数) 上の 2 項関係  $r(x, y)$  と  $a_i \in D^k$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) をうまくとると  $i < j \Leftrightarrow r(a_i, a_j)$  となる.  $r(x, y)$  は非対称な関係と仮定できる.  $D$  に選択関数を加えることにより  $T_S$  のモデルに拡張できる. 簡単のためにこれも  $D$  と書く. さらに初等拡大することにより, 一様列も拡大し,  $\langle a_i : i \in \mathbb{Z} \rangle \wedge \langle b_i : i \in \mathbb{Z} \rangle$  が  $D$  において  $\mathcal{L}_S$  一様列であると仮定してよい.  $M_0$  をこの列のスコーレム閉包とすると,  $M_0$  は  $T_S$  のモデルである. また,  $\sigma_0(a_i) = a_{i+1}$ ,  $\sigma_0(b_i) = b_{i+1}$  と定義すると,  $\sigma_0$  は  $M_0$  の  $\mathcal{L}_S$  自己同型に自然に拡大できる.  $(M_0, \sigma_0)$  の  $\mathcal{L}(\sigma)$  への制限は  $T_\sigma$  のモデルである.

では,  $TA$  が存在すると仮定しよう. 目標は矛盾を導くことである. まず,  $TA$  のモデル  $(M_1, \sigma_1)$  に  $(M_0, \sigma_0)$  を拡大する. スコーレム関数は  $M_1$  全体で定義されているかどうかはわからないことに注意しておく. そこで,  $M_1$  の中で  $M_0$  を表す述語  $P$  を加え,  $\mathcal{L}_S(P, \sigma)$  構造  $(M_1, P, \sigma_1)$  を考える. すなわち,  $P(M_1) = M_0$  で, スコーレム関数は  $P$  上で定義されている. また,  $\sigma_1$  は  $P(M_1)$  上では  $\mathcal{L}_S$  自己同型になっている.

$(M_1, P, \sigma_1)$  をさらに初等拡大して, 十分飽和なモデルにしておく.

次のような部分タイプ  $p(x)$  と論理式  $\psi \equiv \exists z (r(a, z) \wedge r(z, x) \wedge \sigma(z) = z)$  を考える.

$$p(x) = \{P(x)\} \cup \{\langle a_i : i \in \mathbb{Z} \rangle \wedge \langle \sigma^i(x) : i \in \mathbb{Z} \rangle \text{ は } \mathcal{L}_S \text{ 一様列} \}$$

すると,  $(M_1, P, \sigma_1)$  において次の 2 つが成り立つ.

- (1)  $p(x) \vdash \psi(x)$ ,  
 (2)  $p(x)$  の任意の有限部分  $q(x)$  に対し,  $q(x) \not\vdash \psi(x)$ .

この2つが示せば,  $(M_1, P, \sigma_1)$  の飽和性に矛盾するので,  $TA$  が存在しなかったことになる.

(2) は,  $q(x)$  を  $p(x)$  の有限部分とすると十分大きな  $m$  をとれば  $a_m$  が  $q(x)$  を満たすことによる.  $q(x) \vdash \psi(x)$  だとすると  $r(a_m, z)$  かつ  $r(z, a_m)$  となることがわかり,  $r$  の非対称性に矛盾する.

次に (1) を示す.  $M_1$  において  $p(x)$  を満たす  $c$  を任意にとる. すると,  $c \in P(M_1)$  で  $\langle a_i : i \in \mathbb{Z} \rangle \wedge \langle \sigma_1^i(c) : i \in \mathbb{Z} \rangle$  は  $\mathcal{L}_S$  一様列である. この列のスコーレム閉包  $N_0$  をとると  $N_0$  は  $T_S$  のモデルになる.  $N_0$  において  $\langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$  の  $\mathcal{L}$  平均タイプ  $s(z)$  を考えると,  $\langle a_i : i \in \mathbb{N} \rangle$  が一様列であることから  $s(z)$  は  $\mathcal{L}$  完全タイプになる. また, 定義より,  $r(a_0, z)$  と  $r(z, c)$  はともに  $s(z)$  に属し,  $\sigma_1(s) = s$  でもある. よって,  $(N_0, \sigma_1 | N_0)$  の拡大  $(N_2, \tau)$  で,  $N_2 \models T$ ,  $\tau$  は  $N_2$  の  $\mathcal{L}$  自己同型となるものが存在し,  $s$  の解  $b' \in N_2$  で  $\tau(b') = b'$  となるものがとれる. すると,  $(N_2, \tau)$  で  $\psi(c)$  が成り立つ.  $T_\sigma$  が融合性をもつことにより,  $(M_1, \sigma_1)$  の拡大  $(M_3, \sigma_3)$  で,  $(N_2, \tau)$  が  $(N_0, \sigma_1 | N_0)$  上埋め込めるようなものが存在する.  $T$  のモデル完全性により,  $r$  が  $T$  において存在形で表現できるので,  $\psi(c)$  が  $(M_3, \sigma_3)$  でも成り立つことがわかり,  $(M_1, \sigma_1)$  が  $T_\sigma$  の存在閉モデルであることから,  $(M_1, \sigma_1)$  でも  $\psi(c)$  が成り立つことがわかる.  $\square$

## 4 おわりに

$TA$  の存在はよく気をつけないと明らかに思えてしまうことが多い. 一般に,  $TA$  の存在も非存在も証明が難しいようである. 不安定な単純理論については道具立てがたくさんあるようだが,  $TA$  の非存在を証明するのは難しい. ACFA や Psf に対して, Hrushovski が  $TA$  の非存在を示したが, 彼は体論をうまく使っており, その議論の一般化はなかなかできないと思われる.

## 参考文献

- [1] Z. Chatzidakis, Generic automorphisms of separably closed fields, to appear in the Illinois J. of Math.  
 [2] Z. Chatzidakis and E. Hrushovski, The model theory of difference fields, Transactions of AMS, 351 (1999), 2997-3071.  
 [3] Z. Chatzidakis and A. Pillay, Generic structures and simple theories, Annals of Pure and Applied Logic 95 (1998) 71-92.



- [4] H. Kikyo, Model companions of theories with an automorphism, *J. Symb. Logic* **65** (2000) 1215-1222.
- [5] H. Kikyo and A. Pillay, The definable multiplicity property and generic automorphism, to appear in *Annals of Pure and Applied Logic*.
- [6] H. Kikyo and S. Shelah, The strict order property and generic automorphism, to appear in *J. Symb. Logic*.
- [7] D. Lascar, Autour de la propriété du petit indice, *Proc. London Math. Soc.* **62** (1991) 25-53.
- [8] D. Lascar, Les beaux automorphismes, *Arch. Math. Logic* **31** (1991) 55-68.
- [9] A. Macintyre, Generic automorphisms of fields, *Annals of Pure and Applied Logic* **88** (1997), 165-180.
- [10] S. Shelah, *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, North Holland, Amsterdam, 1978.