数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 107-113

有限群の極大放物幾何とそのホモトピー*

澤辺　正人 (Masato Sawabe)
学振ＰＤ、熊本大・理 (Kumamoto University)

この原稿は平成１２年１２月１２日に行われた私の講演の再現である。詳しい内容は [Sa4] を参照されたい。講演の内容および [Sa4] はある種の有限群に付随する p-局所幾何の一般論・基礎理論の構築が動機となり始まったものである。そのモデルになるものはリー型の群に付随するビルディングである。そこで一般の有限群 G とその位数の素因子 p に対するビルディングの類似物である $\mathcal{B}_p(G)$ が我々の研究対象となる。目指すところは、群の構造及び表現論が良く反映された幾何の一般的な枠組み作りその基礎理論を整備すること、さらにその中でリー型の群のビルディングといわゆる"Sporadic Geometries" を統一的にかつ systematic に理解することである。後に述べるように部分群複体 $\mathcal{B}_p(G)$ は幾何以外の分野でも重要な役割を果たしており、これらの関連性をしっかりと保ちながら我々の一般論も整備していくべきと思われる。

1 Standing notation and $\mathcal{B}_p(G)$

以下断らない限り G を勝手な有限群、p を G の位数の素因子、S を G の一つの Sylow p-部分群とする。次がこの話の中で最も重要になってくる部分群族 $\mathcal{B}_p(G)$ である。$\mathcal{B}_p(G)$ と書いたら G の p-部分群 U で $O_p(N_G(U))=U$ を満たすもの全体の集合とする。定義から直ちに分かるように $O_p(G)$ は常に $\mathcal{B}_p(G)$ に属する。そこで我々は $\mathcal{B}_p(G)$ と書いたら $O_p(G)$ は常に除いておくことにする[1]。即ち $\mathcal{B}_p(G):=\{U\leq G : p\text{-部分群} \mid O_p(N_G(U))=U\}\backslash\{O_p(G)\}$. $\mathcal{B}_p(G)$ に属する p-部分群のことを G の p-radical 部分群と呼ぶ。

2 Model case

我々は p-局所幾何の一般論を展開したい。そこでまずそのモデルになるリー型の群に付随するビルディングについて述べる。

2.1 Tits building $\mathcal{G}$ associated with Lie type groups

G を標数 p の体上で定義されているランク l のリー型の群、B を Sylow normalizer $N_G(S)$ (Borel subgroup)、$\{P_1,\ldots,P_l\}$ を B を含む G の極大 parabolic 部分群全体の集合とす

*This manuscript was written while the author was visiting to University of Illinois at Chicago during 1999–2001 using a grant from JSPS.

[1] $O_p(G)$ を $\mathcal{B}_p(G)$ に含めると $\mathcal{B}_p(G)$ を自然に半順序集合と見なした時 $O_p(G)$ がその中でただ一つの極小元となり $\mathcal{B}_p(G)$ が可縮になってしまうことにも注意する

る。$\{P_1, \ldots, P_l\}$ は G の極大 parabolic 部分群の G-共役類の代表系を与える。これらを用いて coset 幾何 $\mathcal{G}$ 以下の如く定義する。

$$\mathcal{G} = (G/P_1, \ldots, G/P_l; *).$$

関係 $*$ は $[xP_i * yP_j (i \neq j) \Longleftrightarrow xP_i \cap yP_j \neq \emptyset]$ で定義される。これで $\mathcal{G}$ に幾何構造が入り、さらに $\mathcal{G}$ はビルディングをも定義する。$\mathcal{G}$ はリー型の群に付随する Tits ビルディングと呼ばれている。

2.2 Some properties of $\mathcal{G}$

幾何 $\mathcal{G}$ の重心細分 (barycentric subdivision) $sd(\mathcal{G})$ を考える。$sd(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ の flag 全体の集合を頂点集合とし、そこに自然な包含関係を導入することによって得られる単体複体のことである。特に $sd(\mathcal{G}) = \{(\cap_{i\in F} P_i)^g \mid g \in G,\ \emptyset \neq F \subseteq \{1, \ldots, l\}\}$ と記述できる。即ち $(\cap_{i\in F} P_i)^g$ が $\mathcal{G}$ の flag であり、勿論それは G の真の parabolic 部分群全体の集合を走る。そこでその "dual" を考えれば $sd(\mathcal{G})$ は $O_p(G)$ を除いた unipotent radicals 全体から成る部分群複体に他ならない事が分かる。さらに Borel-Tits の定理からこれは部分群複体 $\mathcal{B}_p(G)$ と一致する。即ち unipotent radical とは G の p-部分群 U で $O_p(N_G(U)) = U$ で特徴付けられるという事である。

$$\begin{aligned}\mathcal{G} \simeq sd(\mathcal{G}) &\simeq \{(\cap_{i\in F} P_i)^g \mid g \in G,\ \emptyset \neq F \subseteq \{1, \ldots, l\}\}\\ &\simeq \text{the set of all unipotent radicals except for } O_p(G), \text{ by the duality}\\ &= \mathcal{B}_p(G), \text{ by Borel-Tits}\end{aligned}$$

よって部分群複体 $\mathcal{B}_p(G)$ をビルディングそのものと見なすことが出来る。逆に一般の有限群 G に対する $\mathcal{B}_p(G)$ と言うのは unipotent radical の類似物、即ちビルディングの類似物を扱っていることに他ならないと言うことになる。続く $\mathcal{G}$ の(即ち $\mathcal{B}_p(G)$ の)基本性質として次を挙げることが出来る。

Basic properties of the basics *1. For $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B}_p(G)_{min})_{\leq S}$, $\langle \mathcal{X} \rangle \in \mathcal{B}_p(G)_{\leq S}$.*

2. For $U \in \mathcal{B}_p(G)_{\leq S}$, there exists P_i such that $N_G(U) \leq P_i$.

3. For $U \in \mathcal{B}_p(G)_{\leq S}$, U is weakly closed in S with respect to G, that is, $(U^G)_{\leq S} = \{U\}$.

ここで $\mathcal{B}_p(G)_{min}$ は $\mathcal{B}_p(G)$ の極小元全体の集合、$\mathcal{B}_p(G)_{\leq S}$ は Sylow p-部分群 S に含まれる $\mathcal{B}_p(G)$ の元全体からなる集合である。これらは $\mathcal{G}$ の全くの基本的性質でありながら、後に見るように、本質的な部分を大いに含んでいる。

2.3 How $\mathcal{G}$ is useful

次にビルディング $\mathcal{G}$ がどの様に元のリー型の群 G に対して役に立っていたのかを見てみる。

1. まず G が $\mathcal{G}$ の上に flag-transitive で作用していることが挙げられる。先に述べた様に $\mathcal{G}$ は unipotent radical であり parabolic 部分群である。即ちこの作用を通して G の部分群構造を詳しく調べることが出来る。

2. $\mathcal{G}$ の自己同型群 $Aut(\mathcal{G})$ を考える。G は自然に $Aut(\mathcal{G})$ の中に含まれてくるのであるが、その上は G から高々その Outer しか上がらない。即ち $\mathcal{G}$ は G を大体復元する。

3. $\mathcal{G}$ が G の情報を豊富に備えていると言う典型的な例として、$\mathcal{G}$ が G の統一的な単純性の証明を与えていることが挙げられる。

4. $\mathcal{G}$ のホモロジー群 $H_*(\mathcal{G})$ を考える。これは Solomon-Tits の定理として知られているように、トップホモロジー $H_l(\mathcal{G})$ が G の Steinberg module St $(= H_l(\mathcal{G}))$ を与える。即ち $\mathcal{G}$ は G に対して良い表現空間を与えている。

3 What we want to do

先の model case から一体何をしたいのかと言うと、一般の有限群 G に対してもビルディング $\mathcal{G}$ のように群の構造や表現論が良く反映されている幾何を一般に考えたいと言うことである。そこで我々は一般に次の条件を満足するような対 (G, p) に付随する幾何 $\Delta_p(G)$ を要求していく。

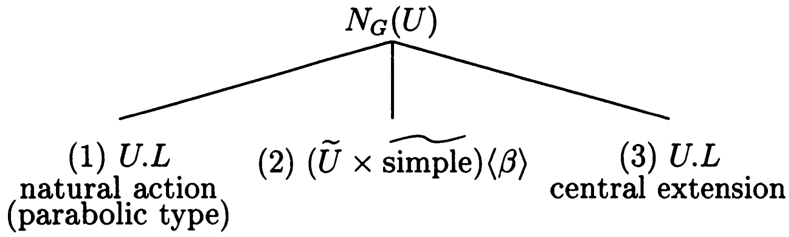
Our requests *1. $\Delta_p(G)$ is a generalization of the building $\mathcal{G}$.*

2. $\Delta_p(G)$ is homotopy equivalent to the subgroup complex $\mathcal{B}_p(G)$.

まず最初にリー型の群の場合に非常にうまくいっているビルディングの概念を含んでいると言う事である。ビルディングの一般化に関してはこれまで多くの人々がいろいろな条件の下で議論をしてきている訳であるが、我々の場合は更に $\Delta_p(G)$ と $\mathcal{B}_p(G)$ のホモトピー同値性を要求していく。これが意味するところは次の通りである。まず、ホモロジー群はホモトピー不変であることに注意しておく。先に見たようにビルディング $\mathcal{G}$ は Steinberg module St と言う良い表現空間を元のリー型の群に与えている。さらに $\mathcal{B}_p(G)$ は一般の有限群 G に対するビルディングの類似物であった。すなわち $\Delta_p(G) \sim \mathcal{B}_p(G)$ は我々が考えるべき幾何 $\Delta_p(G)$ もビルディングが与えるような良い表現空間を元の群 G に提供しなさい、と言うことを要求しているのである。即ち表現論に関して豊富な情報を備えていることを要求している。言ってみれば、群の構造に関して良く反映して欲しいと言うことで 1. を設定し、表現論に関しても良く反映して欲しいと言うことで 2. を設定しているのである。以下の話はある“自然な”状況の下で我々の要求する $\Delta_p(G)$ が常に存在していると言うことである。

4 How to construct $\Delta_p(G)$

先に要求した条件を満たす $\Delta_p(G)$ を構成するため、まず最初に一般の有限群 G に対して parabolic 部分群を出来るだけ正確に取り出してくる事から始める。p-radical $U \in \mathcal{B}_p(G)$ は unipotent radical の類似物であった。即ちその正規化群 $N_G(U)$ は G の p-parabolic 部分群と呼ばれるべきものになっている。いろいろな群について計算をして見ると $N_G(U)$ の構造は大雑把に次の 3 つに大別出来る“感じ”になっている。即ちあくまでも現象論である。



(1) は U にある群 L が自然に作用しているいわゆる parabolic type の正規化群、(2) は U を少し膨らませたところに単純群もどきの群が可換に作用しておりその上に Outer が少し乗っていると言うもの。あるいは (3) として中心が U であるような中心拡大である。多くの例を見てみると (2), (3) は例外的に現れ通常この場合 U は非常に小さい p-radical になっている。そこで我々は (1) の parabolic type の正規化群を自動的にかつ正確に取り出したい。そこで次の概念を用いる。

Definition 1 (p-centric) *For a p-subgroup U of G, U is called p-centric if any p-element of $C_G(U)$ is in U, that is, in $Z(U)$.*

Notation 1 $\mathcal{B}_p^{cen}(G) := \mathcal{B}_p(G) \cap \{p\text{-centrics of } G\}$

この様に p-centric で制限することによって"通常"先の (2), (3) を自動的に取り除くことが出来る。これは"通常" $\widetilde{\text{simple}}$ 及び L の位数が共に p で割れていることから明らかであろう。ここで注意すべきことは G が標数 p の体上で定義されているリー型の群の時 $\mathcal{B}_p(G)$ を p-centric で制限しても何も変わらない、即ち $\mathcal{B}_p^{cen}(G) = \mathcal{B}_p(G)$ と言うことである。この事は先に我々が要求したホモトピー同値性の条件 $\Delta_p(G) \sim \mathcal{B}_p(G)$ を $\Delta_p(G) \sim \mathcal{B}_p^{cen}(G)$ に変えても本質的な違いがないことを言っている。

さて $U \in \mathcal{B}_p^{cen}(G)_{min}$ は極小な unipotent radical の類似物であるから $N_G(U)$ は G の極大 p-parabolic 部分群と呼ばれるべき群になっている。さらに部分群族 $\{M_1, \ldots, M_l\} := \{N_G(U) \mid U \in (\mathcal{B}_p^{cen}(G)_{min})_{\leq S}\}$ を定める。これは明らかに極大な parabolic 部分群の共役類の代表系の類似物を与えている。l はリーランクの一般化である。これらを用いて我々の幾何 $\Delta_p(G)$ を coset 幾何で定義する。

$$\Delta_p(G) := (G/M_1, \ldots, G/M_l; *)$$

構成の仕方から $\Delta_p(G)$ は対 (G, p) に付随する極大放物幾何(maximal parabolic geometry) と呼ばれるべきものになっている。なお G が標数 p の体上で定義されているリー型の群の時 $\Delta_p(G)$ がビルディングに一致していることはもはや明らかであろう。$\Delta_p(G)$ に対して次の結果が得られている。

Theorem 1 ([*Sa4*]) *Suppose $O_p(G) = 1$, and*

1. *For $\mathcal{X} \subseteq (\mathcal{B}_p^{cen}(G)_{min})_{\leq S}$, $\langle \mathcal{X} \rangle \in \mathcal{B}_p^{cen}(G)_{\leq S}$,*

2. *For $U \in \mathcal{B}_p^{cen}(G)_{\leq S}$, there exists M_i such that $N_G(U) \leq M_i$,*

3. *For $U \in (\mathcal{B}_p^{cen}(G)_{min})_{\leq S}$, U is weakly closed in S with respect to G.*

Then $\Delta_p(G)$ is homotopy equivalent to $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$.

上の 1, 2, 3 は先に述べたビルディングの基本性質を改めて仮定したものである。即ちビルディングが持つ自然な状況の下で我々の要求する幾何 $\Delta_p(G)$ が常に存在するのである。

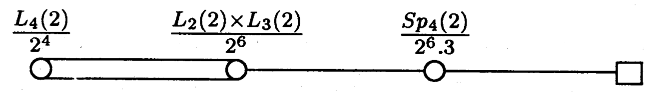
5 Example

次に定理 1 の仮定を満たす群の例を見ていく。

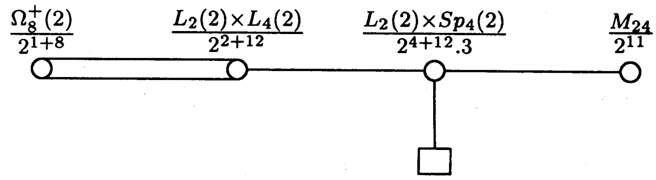
1. G = a group of Lie type in characteristic p. 既に述べた様にこの場合 $\Delta_p(G)$ は G に付随するビルディングに一致し、勿論対応する図形はデンキン図形である。

2. G = a Sporadic group. Sporadic の様な individual な群に対して条件 1, 2, 3 をチェックしようとするとまず最初にどうしてもその群の p-radical 部分群を分類する必要が出てくる。これに関してはさまざまな動機から既に多くの人達によって調べられている (See [AC],[Ki-Yo],[Sa1],[Sa2],[Sm-Yo],[Yo1],[Yo2],[Yo3],[Yo4],...)。Sporadic に対する面白い例として次が挙げられる。

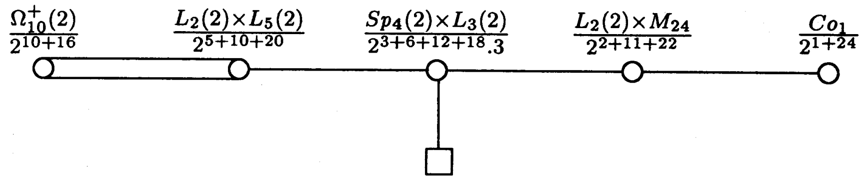
$\Delta_2(M_{24})$:



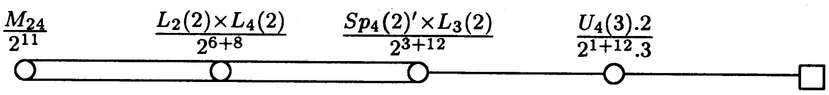
$\Delta_2(Co_1)$:



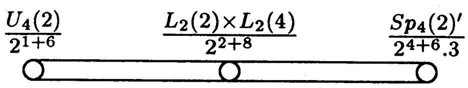
$\Delta_2(\mathbf{M})(?)$:



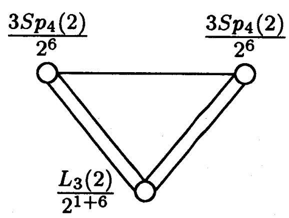
$\Delta_2(Fi'_{24})$:

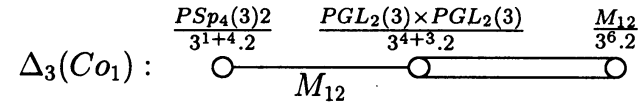


$\Delta_2(Suz)$:



$\Delta_2(He)$:





特に上に記述した 2-局所幾何は全て M.A.Ronan-S.D.Smith によって既に発見されているものである。これらの幾何は当時から明らかに essential なものと認識されていたのであるが、構成方法が ad-hoc methods によるものであったため general な視点からの説明がなかった。しかし我々の極大放物幾何の一般論による枠組みの中で考えると、なぜこのような 2-局所幾何が存在するのか、存在するべきなのかと言う数学的な説明が付くのである。

6 Other connections

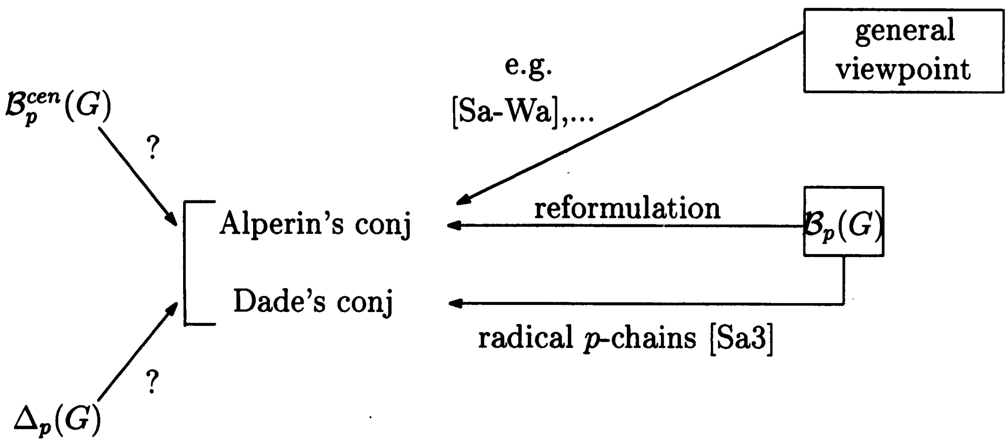
部分群複体 $\mathcal{B}_p(G)$ あるいは $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ が群に付随する幾何に対してどのように重要であるかは先に見た通りである。次に幾何以外にある $\mathcal{B}_p(G)$ と関連性について述べる。

P. Webb $H^*(G,\mathbf{Z}_p)_p = \sum_{\sigma\in\mathcal{B}_p(G)/\sim_G}(-1)^{dim(\sigma)}H^*(G_\sigma,\mathbf{Z}_p)_p$

まず、P.Webb による $\mathcal{B}_p(G)$ を用いたコホモロジーの交代和分解が良く知られている。即ちコホモロジー環の特に p-part の和の構造が単体の固定部分群のそれに帰着されると言う inductive な主張である。ところがごく最近 J.Grodal によって $\mathcal{B}_p(G)$ を $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ に変えても同様な分解が成り立つことが証明されている。

J. Grodal ([Gr]) $H^*(G,\mathbf{Z}_p)_p = \sum_{\sigma\in\mathcal{B}_p^{cen}(G)/\sim_G}(-1)^{dim(\sigma)}H^*(G_\sigma,\mathbf{Z}_p)_p$

即ち我々の幾何がどうして centric collection でうまくいっているのかと言う本質的な部分が分かるためには、よりトポロジカルナな立場に立つことが必要であることを示唆している様にも思われる。さらに $\mathcal{B}_p(G)$ は有限群の表現論の中で重要な対象として現れてくる。



良く知られているようにアルペリン予想は単体複体 $\mathcal{B}_p(G)$ を用いて記述することが出来る。いわゆる Knörr-Robinson による reformulation である。勿論この予想の original form の視点に立った研究も進んでおり、最近の結果としては例えば [Sa-Wa] 等を参照されたい。

同じく表現論で非常に重要なデイド予想を記述する際に現れるいわゆる radical p-chains も $\mathcal{B}_p(G)$ と深く関係している (See [Sa3])。また、これは阪大の宇野先生による情報なのであるが、最近 Robinson が defect group の self-centralizing subgroups を用いてこれら２つの予想のある条件の下での言い換えを証明している。勿論 p-block の defect group は p-radical $\mathcal{B}_p(G)$ であり、self-centralizing condition はいわば centric condition である。そこで $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ がこれらの予想にどう関係しているかと言うのは興味の出てくるところである。もし $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ が関係していれば当然 $\Delta_p(G)$ も関係してくる。以上の様にいろいろとある関連性を意識しながら我々の極大放物幾何 $\Delta_p(G)$ の一般論をさらに整備出来るのではないかと期待している。

References

[AC] J. An and M. Conder, The Alperin and Dade conjectures for the simple Mathieu groups, *Comm. Algebra* **23** (1995), 2797–2823.

[Gr] J. Grodal, Higher limits via subgroup complexes, preprint version of November 12, 1999.

[Ki-Yo] M. Kitazume and S. Yoshiara, The radical subgroups of the Fischer simple groups, preprint version of May 9, 2000.

[Sa1] M. Sawabe, 2-radical subgroups of the Conway simple group Co_1, *J. Algebra* **211** (1999), 115–133.

[Sa2] M. Sawabe, The 3-radicals of Co_1 and the 2-radicals of Rud, *Arch. Math.* **74** (2000), 414–422.

[Sa3] M. Sawabe, On the radical chains of finite groups, preprint version of June 20, 2000.

[Sa4] M. Sawabe, The centric p-radical complex and related p-local geometries, preprint version of January, 2001.

[Sa-Wa] M. Sawabe and A. Watanabe, On the principal blocks of finite groups with abelian Sylow p-subgroups, to appear in *J. Algebra.*

[Sm-Yo] S.D. Smith and S. Yoshiara, Some homotopy equivalences for sporadic geometries, *J. Algebra* **192** (1997), 326–379.

[Yo1] S. Yoshiara, The Borel-Tits property for finite groups, in: *Groups and Geometries* (L. di Martino et al., Eds.) *Trends Math.* (1998), 237–249.

[Yo2] S. Yoshiara, The radical 2-subgroups of the sporadic simple groups J_4, Co_2 and Th, *J. Algebra* **233** (2000), 309–341.

[Yo3] S. Yoshiara, The radical 2-subgroups of some sporadic simple groups, in preparation.

[Yo4] S. Yoshiara, Odd radical subgroups of the sporadic simple groups, in preparation.