数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 122-136

群と幾何における最近の動向

吉荒 聡
Satoshi Yoshiara
大阪教育大・教養・数理科学

京都大学数理解析研究所で2000年12月13日に行われた談話のOHP用原稿に多少手を入れ作成した。

1．８０年以降の成果と問題点

「群と幾何」と呼ばれる研究分野では、群 G をそれが作用するグラフや幾何 Γ を通じて研究すると共に、グラフや幾何という組合せ的対象 Γ をその自己同型群 G を通じて研究する。このような研究意識は、代数方程式の根の置換としての群論の登場以来潜在するものであったろうが、有限単純群分類にめどが立った８０年代の初めに再強調された。それ以降、８０−９０年代におけるこの分野の成果は、一口に言って、

Local Structure から Global structure を捉える技術の定式化とその応用が進んだ

ことであろう。すなわち、次の典型的な設定が与えられたときに群をある正規部分群を modulo として決定する方法が確立したのである。

「（典型的設定）群 G が作用するグラフ（単体複体）Δ とその vertex x, edge $\{x,y\}$, ある部分グラフ Σ が与えられ、それぞれの stabilizers G_x, $G_{\{x,y\}}$, G_Σ の、x, $\{x,y\}$, Σ を含むまたは含まれる vert ices, edges, Σ と G-共役な部分グラフたち、への作用が知られている。」

純群論的に換言すれば、K_x を適当な G_x の正規部分群 etc. として次を仮定する。「G_x/K_x, $G_{\{x,y\}}/K_{\{x,y\}}$, G_Σ/K_Σ 及びこれらの交差の様子がわかっている」

このとき 次のような典型的プロセスをふんで 群 G/K の構造を決定するのである。（以下に現れる言葉の厳密な定義は後で紹介する。）

(Local なプロセス) ある群 K を modulo として G_x, $G_{\{x,y\}}$, G_Σ とその交わり方が何通りかに決まる (amalgam types の決定)。よって得られた amalgam $\mathcal{A}$ の universal completion $G(\mathcal{A})$ を計算すれば G/K はそのどれかの準同型像。

(Global なプロセス) Δ のサイクルの全体を部分グラフ Σ の適当なサイクルの G-共役の和になるものにより割った群 (Δ の基本群) （ただし重複するパス xx や 自明な行き戻りパス xyx を除いたり挿入する操作を度外視する）を計算して $G(\mathcal{A})$ を求める。

上の手段の応用として多くの結果が得られた。例えば、

(0) flag-transitive な群の作用を仮定した拡大極空間、拡大双対極空間、P-幾何、T-幾何などが分類された。(Pasini, Meixner, Pasechnick, Yoshiara, Weiss, Ivanov, Shpectorov, Stroth, Meierfrankenfelt, etc. による)

(1) （散在型）有限単純群の一意性がある程度統一的に示され、その過程で各群の構造に対するより良い説明も得られた。(Aschbacher, Segev, etc.)

(2) 散在型有限単純群の構成が、その表示を（具体的なモジュール中に）実現する形で、計算機の援用なしに与えられた。(Ivanov, Shpectorov, Stroth, Baumeister, etc.)

(3) Monster が Y-presentation を持つ事の証明。(Ivanov, Norton)

次章において上記の項目 (1),(3) について多少の解説を試みる。
こうした結果を踏まえての問題として生ずるものを幾つか挙げると、

(Q1) flag-transitivity という群論的仮定はどれほど本質的か？
拡大双対極空間については、階数 3 のときにはこの仮定が必要 であることは Yoshiara, ect. により示されている。階数 ≥ 4 のときには、アフィンケースを除くと、(時にはかなり技術的な仮定の元で）群の作用に関する仮定なしに同じ結果を出せることが、ここ１、２年の Ivanov, Shpectrov, Pasechnick, Wiedron etc. の仕事からわかっている。しかしその証明は必ずしも明瞭ではない。

(Q2) 何故階数２の幾何として上のようなもののみが重要か？–群の構造に本質的にかかわる幾何は何か？
９６年頃からの S.D.Smith, Yoshiara, Sawabe の研究の結果 Centric p-radicals のなす複体のホモトピー変形が、有力候補である。本集会で、この点に関し沢辺氏による優れた成果の紹介があるので、そちらの記事を参考にされたい。

(Q3) （以下、小さい問題だが）Thompson 群の一意性の良い証明は今の所ないようである。

(Q4) O'Nan 群はその構成がコンピューターの援用なしに出来ていない唯一の散在群であるらしい（2000 年 6 月のミラノの集会で Stroth がそう言っていた)。

一方、群に関する仮定をしないアプローチ（幾何）が伝統的に存在し、その成果は幾何からスタートして群を見直すときに有効に使われてきた。こうした方面での主要な成果として、次が挙げられる。

(1) Tits による buildings (建物）の理論

(2) Buekenhout-Shult による極空間の point-line 系の 1 or all axiom (線 l 上にない点 P に対し P と線で結べるような l 上の点は唯一点か全点である) による特徴付け、その Cooperstein, Shult による発展 (metasymplectic, parapolar spaces など)

(3) Pasini, Thas, van Maldeghem 等の (circular/affine) extended buildings に関連する多くの仕事 (最近の筆者の有限幾何への貢献もここに位置付けられる)

(4) Cooperstein, Shult (Ivanov 等) による幾何の表現 (埋め込み) 論

特に buildings （建物）の理論に関しては、歴史も古く、創始者 Tits を中心に分類理論は最近も活発に発展している。Buildings of irreducible, spherical type, rank ≥ 3 という幾何たちは absolutely simple algebraic groups と classical groups over division rings という群たちにほぼ一対一に対応するというのが Tits の古典的結果である。

Affine buildings, rank ≥ 4 は Tits, 1987, [R] により分類されているが、そこでは buildings at "infinity" が spherical になることが効いている。ただし、一般の建物の分類は無理であることが [R] で示されている。最近の活発な話題であるのは opposite の考え方を用いて twin buildings を分類することである。 Twin builings に対応する群としては Kac-Moody groups に加えて更に新たな対象が出現することが期待されている。

さて、以上を導入として、第２章では local structure から global structure を捉える技術の典型的応用例として Aschbacher-Segev の理論とその適用について紹介し、第３章では、建物理論の基礎概念を振り返ると共に、最近 Tits と Weiss により完成された Moufang polygons (自己同型群の大きい階数２の建物) の分類とその意義について触れたい。

2. Aschbacher-Segev の理論とその適用例

この章の内容についてより正確に知りたい方は [AS1][AS2][A, Part III] を参照されたい。しばらくの間形式的な定義が続くが、我慢して頂きたい。

Definition 1 *[A, Section 37]* $\mathcal{U} = (G, H, \Delta, \Delta_H)$ が**一意系** *(*uniqueness system*)* であるとは次が満たされることとする。

(1) Δ はグラフであり、Δ_H は Δ の部分グラフである。G はこのグラフの頂点集合及び辺集合上に可移に作用する自己同型群で、有限群であり、H は G の部分群。

(2) Δ の異なる二つの頂点 x, y で、隣接していて、更に次の条件を満たすものが存在する。

(2-1) ある H の元 h_0 が存在して $y = x^{h_0}$ となる。

(2-2) 部分グラフ Δ_H の頂点の集合は $\{x^h \mid h \in H\}$ と一致し、
辺の集合は $\{\{x, y\}^h \mid h \in H\}$ と一致する。

(3) $G = \langle H, G_x\rangle$, $G_x = \langle G_{x,y}, H_x\rangle$, $H = \langle H_{\{x,y\}}, H_x\rangle$ が成り立つ。

この定義から H の元 t で x と y を入れ換えるものがあることがわかる。[A, Lemma 37.2(1)]

Uniqueness system $\mathcal{U}$ の**アマルガム** (*amalgam*) $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ とは、単に G_x, $G_{\{x,y\}}$, H とこれらの交差である $G_{x,y}$, H_x, $H_{\{x,y\}}$; $H_{x,y}$ とそれらの間の自然な埋め込み写像からなる図式のことである。二つのアマルガムの射とは対応する部分群間の準同型の組で、得られる図式を可換にするものであり、それぞれの準同型が同型に取れるとき二つのアマルガムは同型であるという。(より形式的な定義については [A, Section 36] を参照。) アマルガム $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ は部分群 G_x, $G_{\{x,y\}}$, H etc. のみに依存し、G には依存していない事に注意されたい。

また、一意系のグラフ Δ は G の G_x によるコセット上に次のように定義されるグラフ (G の部分群 G_x, $G_{\{x,y\}}$, H に関するコセット幾何の共線グラフ) と同型である事が示される。[A, Lemma 37.3]

コセット G_xg と G_xg' が隣接する $\overset{def}{\Leftrightarrow}$
ある元 $a \in G$ が存在して $G_xg \cap G_{\{x,y\}}a \neq \emptyset$ かつ $G_xg' \cap G_{\{x,y\}}a \neq \emptyset$.

Definition 2 *[A, Section 37, p.199 の下の部分]* 一意系 $\mathcal{U} = (G, H, \Delta, \Delta_H)$ が一意系 $\overline{\mathcal{U}} = (\overline{G}, \overline{H}, \overline{\Delta}, \overline{\Delta}_{\overline{H}})$ に**同値** *(*equivalent*)* であるとは、以下の条件を満たすような Δ_H の辺 $\{x, y\}$ と $\overline{\Delta}_{\overline{H}}$ の辺 $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ 及び群の同型写像 $\alpha : G_x \to \overline{G}_{\overline{x}}$ と $\beta : H \to \overline{H}$ 及び元 $t \in H_{\{x,y\}} \setminus H_{x,y}$ が存在することとする。

$\alpha|_{H_x} = \beta|_{H_x}$ で、この写像は $\overline{H}_{\overline{x}}$ 上への全射であり、
$\alpha|_{G_{x,y}}$ は $\overline{G}_{\overline{x},\overline{y}}$ への全射であり、$\beta|_{H_{\{x,y\}}}$ で、この写像は $\overline{H}_{\{\overline{x},\overline{y}\}}$ への全射。
更に、すべての $z \in G_{x,y}$ に対して $(z^t)^\alpha = (z^\alpha)^{t^\beta}$.

込み入った定義であるが、条件には $G, \overline{G}$ そのものは登場しないので、local な性質である点に注意。次が言える。

Lemma 3 *[A, Lemma 37.6]* $\mathcal{U}$ と $\overline{\mathcal{U}}$ が同値な一意系であれば、それぞれの定めるアマルガムは同型である*:* $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{A}(\overline{\mathcal{U}})$.

次の例が最も基本的で重要である。

Example. [A, Lemma 37.5] $\mathcal{U}$ を一意系とし、$\tilde{G}$ をアマルガム $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ の**普遍完備化** (*universal completion*) とする。すなわち集合 $G_x \cup G_{\{x,y\}} \cup H$ 上の自由群を、これらの部分群において成立している関係で割って得られる剰余群を $\tilde{G}$ とする。(より正確な定義は [A, Lemma 36.3 とその直前の定義] 参照。)

このときグラフ $\tilde{\Delta}$ を、コセットの集合 $\tilde{G}/G_x$ を頂点の集合とし、二つのコセット $G_x\tilde{g}$ と $G_x\tilde{g}'$ が結ばれるのは、ある元 $\tilde{a} \in \tilde{G}$ が存在して $G_x\tilde{g} \cap G_{\{x,y\}}\tilde{a} \neq \emptyset$ かつ $G_x\tilde{g}' \cap G_{\{x,y\}}\tilde{a} \neq \emptyset$ である時として定義する。また、H に対応するコセットの集合 $G_x\tilde{h}$ $(h \in H)$ 上の $\tilde{\Delta}$ の誘導部分グラフを $\tilde{\Delta}_{\tilde{H}}$ とする。

このとき $\tilde{\mathcal{U}} := (\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}_{\tilde{H}})$ は $\mathcal{U}$ と同値な一意系となる (定義の α, β として標準的な同型写像が取れる) [A, Lemma 37.5(1)]。従って、これらの一意系の定めるアマルガムは同型

$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{U}}) \cong \mathcal{A}(\mathcal{U})$ である。更に群準同型 $\rho : \tilde{G} \to G$ で $\rho|_{G_x} = \alpha$ かつ $\rho|_H = \beta$ を満たすものが存在することもわかる。

グラフ $\tilde{\Delta}$ の作り方から、三角形に関する多少の条件を付けるとグラフ $\tilde{\Delta}$ はグラフ Δ の被覆をなしていることがわかる [A, Lemma 37.5(3)] ので、更に

(*) Δ の任意のサイクルは部分グラフ Δ_H の G-共役中のサイクルたちの和になる

と仮定すると、群の同型 $\tilde{G} \cong G$ が得られる [A, Lemma 37.5(4)]。

ここまで認めれば、次の Aschbacher-Segev の基本定理の証明はたやすい。

Theorem 4 *(Aschbacher-Segev [AS2], [A, Theorem 37.7])*
互いに同値な一意系 $\mathcal{U}$ と $\overline{\mathcal{U}}$ の両方が、上の例中の条件 (*) を満たすならば、一意系中の群は同型である*:* $G \cong \overline{G}$.

証明　一意系 $\mathcal{U}$ と $\overline{\mathcal{U}}$ は同値なので、それらの定めるアマルガムは同型: $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{A}(\overline{\mathcal{U}})$. これらの同型なアマルガムの普遍完備化を取るとそれらは同型な群である。しかし、条件 (*) が満たされているので上の例の結果が適用できて、$\mathcal{A}(\mathcal{U})$ の普遍完備化は G と同型であり、$\mathcal{A}(\overline{\mathcal{U}})$ の普遍完備化は $\overline{G}$ と同型である。従って、$G \cong \overline{G}$. Q.E.D.

応用例 : $L_5(2)$, M_{24}, He 型の群の一意性　今まで述べてきた事は一見 general nonsense のようであるが、そうではない。このことを多少理解して頂くために、ここでは [A] の第 14 章の概要を紹介する。

以下 G は次の性質を持つインヴォルーション z を含む有限群とする。

$$H := C_G(z) \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & L_3(2) & 0 \\ c & \mathbf{b} & 1 \end{pmatrix} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{F}_2^3, c \in \mathbf{F}_2 \right\} \cong 2_+^{1+6} : L_3(2)$$

しかし $z^G \cap O_2(H) \neq \{z\}$ (従って $G \neq H$) とする。

H は $L_5(2)$ 中の移換 (transvection) の中心化群と同型であるから、例えば G として期待されるのは $L_5(2)$ であるが、よく知られているように散在型の単純群 M_{24} (24 次マシュー群) や He (ヘルドの群) も中心化群が H と同型になるようなインヴォルーションを含む。実は、G は非単純で $2^4 : L_4(2)$ となってしまうか、またはこの 3 種類の単純群のどれかと同型になること (高々 4 個の同型類しかない) が [A, Chapter 14] で初等的に示されている。

まず H 中の次の部分群 $U_1 \cong 2^4$, $U_2 \cong 2^4$, $A_1 \cong 2^6$, $A_2 \cong 2^6$ に目を付ける。

$$U_1 \leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & I & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad U_2 \leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A_1 \leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad A_2 \leftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

多少の群論的議論の後に次が示せる。

Lemma 5 *[A, 40.5] 必要ならばインデックス 1 と 2 を取り替える事により、次のいずれかが成立する。*

(0) $G = N_G(U_1) \cong 2^4 : L_4(2)$

(1) *($L_5(2)$ 型)* $i = 1, 2$ *のいずれでも* $N_G(U_i)/U_i \cong L_4(2)$, $N_G(A_i)/A_i \cong L_3(2) \times S_3$

(2) *(M_{24} 型)* $N_G(U_1)/U_1 \cong L_4(2)$, $N_G(U_2) = H$,
$N_G(A_1)/A_1 \cong L_3(2) \times S_3$, $N_G(A_2)/A_2 \cong 3 \cdot S_6$

(3) *(He 型)* $i = 1, 2$ *のいずれでも* $N_G(U_i) = H$, $N_G(A_i)/A_i \cong 3 \cdot S_6$

場合 (1),(2),(3) のそれぞれに応じて $G \cong L_5(2)$, $G \cong M_{24}$, $G \cong He$ となる事が示される。最後の場合は面倒であるので、ここでは場合 (1),(2) のとき、これまで説明した基本的原理をどの様に適用するのか示す。

以上で定められた部分群の正規化群 $N_G(U_1)$, $N_G(A_1)$, $N_G(A_2)$ を使って階数 3 のコセット幾何 $\Gamma(G) := (G/N_G(U_1), G/N_G(A_1), G/N_G(A_2))$ を考え、Δ を Γ の共線グラフ、Δ_H を H の元を代表に持つコセット上で定義された Δ の誘導部分グラフ、とする。

具体的な群 $L_5(2)$ ないし M_{24} を取ると、これらはそれぞれ $L_5(2)$, M_{24} タイプの群であり、これらの群に対する上のコセット幾何は $L_5(2)$ に対しては二元体上の 4 次元射影空間（射影点・線・平面）であり、M_{24} に対してはスタイナー系 $S(5, 8, 24)$ の定めるオクタッド・トリオ・セクステットのなす幾何である。

特に $L_5(2)$ に対する $\Gamma(L_5(2))$ の共線グラフ $\Delta(L_5(2))$ は射影点を頂点集合とし、その二つが射影線上にあるときに結んでできるグラフであるから、単に 15 点上の完全グラフであり、明らかにこのグラフ上のどんなサイクルも三角形に分割される。従って特に、先の条件 $(*)$ が満たされる。M_{24} の場合も、共線グラフ $\Delta(M_{24})$ のどんなサイクルも Δ_H の共役にはいる四角形達の和に分解できる事が確かめられ、条件 $(*)$ が成立する。従ってこれらの具体的な群 G その部分群 H, 共線グラフ Δ とその部分グラフ Δ_H から定められる一意系 $\mathcal{U} := (G, H, \Delta, \Delta_H)$ に対し、そのアマルガムの完全完備化は G と一致する。

$\overline{G}$ を具体的な群 G と同じタイプの任意の群とするとき $\mathcal{U} = (G, H, \Delta, \Delta_H)$ と $\overline{\mathcal{U}} := (\overline{G}, \overline{H}, \overline{\Delta}, \overline{\Delta_H})$ は同値な一意系である事が確かめられる [A, Lemma 41.4]。

すると、それぞれの一意系の定めるアマルガムの完全完備化 $\tilde{G}$ と $\tilde{(\overline{G})}$ は同型な群である。特に $\overline{G}$ は $\tilde{G}$ の剰余群と同型である。上の考察から、具体的な群 G については $\tilde{G}=G$ であったから、G の単純性と併せて $\overline{G}\cong G$ が導かれる。これにより、タイプ $L_5(2)$, M_{24} の群の一意性が得られた。

タイプ He の群の場合は、条件 (*) の確認ができるグラフ Δ は上のように単純には構成できず、ルート部分群の可換グラフを取る必要があるので、この部分群を構成し、色々調べる必要が生じて議論がはるかに長くなる。この場合にも、ひとたびうまい Δ が見つかれば、一意系の同値性が言え、それに基づいて同型が導かれるという最後の部分は全く同じ議論である [A, Section 42–44]。

同様にして $C_G(z)\cong$ (extraspecial 2-group)(orthogonal group) なる形のインヴォルーション z を持つ群を (多少の条件付で) 特徴付けできる [A, Chapetr 16]。(J_2, Suz, $Co1$ において Δ として採用するのは位数 3 のある部分群の可換グラフ – 拡大双対極空間に密接に関連している–である。)

応用例 : Monster の Y-表示 Ivanov-Norton による Monster の Y-表示予想の解決もほぼ上の例と同様の思想で行われた。紙数の都合上、Y_{555} の定義などは省くが、ともかく美しい表示式で定義される群である。Norton により $(Y_{555})'$ の直積成分の一つ H は次を満たす事が示される。

> $H=\langle H_1,H_2,H_3\rangle$ ここで $H_1\cong 2^{1+24}.Co1$, $H_2\cong 2^{2+11+22}.(S_3\times M_{24})$, $H_3\cong 2^{3+6+12+18}.(L_3(2)\times 3S_6)$. $[H_2:H_1\cap H_2]=3$, $[H_3:H_3\cap H_i]=7$ $(i=1,2)$.
> H_3 の組成商 $L_3(2)$ のコセット空間 $H_3/(H_3\cap H_i)$ $(i=1,2)$ への作用は $L_3(2)$ の射影平面 $PG(2,2)$ の点と線の集合への作用と同値。

Ivanov はこのとき H が位数最大の散在型単純群であるモンスター $\mathbf{M}$ と同型になる事を概略次のように示した。[Iv] まず、H_3 中のあるインヴォルーション σ をとり $L:=\langle C_{H_i}(\sigma)\mid i=1,2,3\rangle$ が $2\cdot BM$ (BM は散在型単純群**ベビイモンスター**) と同型であることを示す。その方法は、以下の方法と同様だが、最後には [T2] の建物の local な特徴付けを用いる。

次に H/L 上にグラフの構造 $\Delta(H)$ を定義して、その辺が唯一つの三角形を定め、この三角形の stabilizer X が $2^2\cdot{}^2E_6(2)$ と同型であることを示す。そしてアマルガム $\mathcal{A}=(H_1,L,X)$ の同型を除いた唯一性を示す。

一方現実の単純群 $\mathbf{M}$ は上の H に対する条件を満たすので一般に $\Delta(H)$ は $\Delta(\mathbf{M})$ の被覆グラフとなる。しかし $\Delta(\mathbf{M})$ はモンスターの $2A$-インヴォルーションたちを頂点とし積が再び $2A$-インヴォルーションになるときに結ぶというグラフ (モンスターグラフ) であって、具体的に調べられる。とはいえ、かなり大変な計算によって、それは自分自身以外の被覆グラフを持たない事が確かめられる。従って $H\cong\mathbf{M}$. (今の場合 Aschbacher-Segev 理論の G_x, $G_{x,y}$, H; Δ に相当するのが L, X, H_1; モンスターグラフだが、X は辺の stabilizer では無いので多少状況は異なる。)

3. 建物理論の新展開

この章の詳しい内容については [T1][T2][T3] 及び [R] を参照のこと。

Definition 6 ある集合 I により行・列をインデックスづけられた対称行列 $M=(m_{ij})_{i,j\in I}$ は、すべての対角成分が 1 で非対角成分が 2 以上の自然数か記号 ∞ であるとき**コクセター行列** *(*Coxeter matrix*)* と呼ばれる。インデックス集合 I の空でない真部分集合 J が存在して、任意の $j\in J$ と $k\in I-J$ に対して $m_{jk}=2$ であるとき M は**可約** *(*reducible*)* といい、そうでないとき**既約** *(*irreducible*)* という。

Definition 7 コクセター行列 $M=(m_{ij})_{i,j\in I}$ に対して (W,S) が M 型の**コクセター群** *(*Coxeter group*)* であるとは、W が集合 $S=\{s_i \mid i\in I\}$ により生成され、関係式 $(s_is_j)^{m_{ij}}=1$ により表示される群である事とする。特に各 s_i はインヴォルーションである。

更に、部分集合 $J\subseteq I$ に対し $W_J:=\langle s_j \mid j\in J\rangle$ とおき、$w\in W$ に対して S 上の語としての w の最短表示の長さを $l(w)$ と書く。

Definition 8 M 及び (W,S) は上の通りとする。W**-距離** *(*W-distance*)* と呼ばれる写像 $d:\Delta\times\Delta\to W$ が定義されている集合 Δ が M **型の建物** *(*a building of type M*)* であるとは、次の条件が満たされる事と定義する。

(Bu1) $x,y\in\Delta$ に対して $x=y$ と $d(x,y)=1$ は同値

(Bu2) $x,y,z\in\Delta$ に対して $d(x,y)=w$ かつ $d(y,z)=s\in S$ であれば $d(x,z)=w$ または ws である。更に $l(ws)=l(w)+1$ であれば $d(x,z)=ws$ である。

(Bu3) $d(x,y)=w$ を満たす $x,y\in\Delta$ と任意の $s\in S$ に対して、$d(y,z)=s$ かつ $d(x,z)=ws$ を満たす $z\in\Delta$ が存在する。

Δ の元を**小部屋** *(*chamber*)* と呼ぶ。

実例: アパート (Apartments) (W,S) を M 型のコクセター群とするとき、$d_W(x,y):=x^{-1}y$ により定められる距離 d_W に関して (W,d_W) は M 型の建物となる。一般に、M 型の建物 (Δ,d) に対して Δ の部分集合 A とそこへの距離の制限 のペア $(A,d|_{A\times A})$ が (W,d_W) と同型であるとき A を**アパート** (*apartment*) という。どの小部屋 $c\in\Delta$ も適当なアパートに含まれる。

実例: (射影空間 $PG(n-1,k)$**)** V を斜体 k 上の n 次元ベクトル空間とし、その自明でない真部分空間のなす長さ $n-1$ の包含列 $c=(V_1,V_2,\ldots,V_{n-1})$, $dim(V_i)=i$, $V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_{n-1}$ 全体の集合を Δ とする。どの $c'\in\Delta$ に対しても適当な Δ の元の列 $c_0=c,c_1,c_2,\ldots,c_m=c'$ で、各 $j=1,\ldots,m$ において c_{i-1} と c_i は j_i 次元部分空間のみで異なる、というようなもの

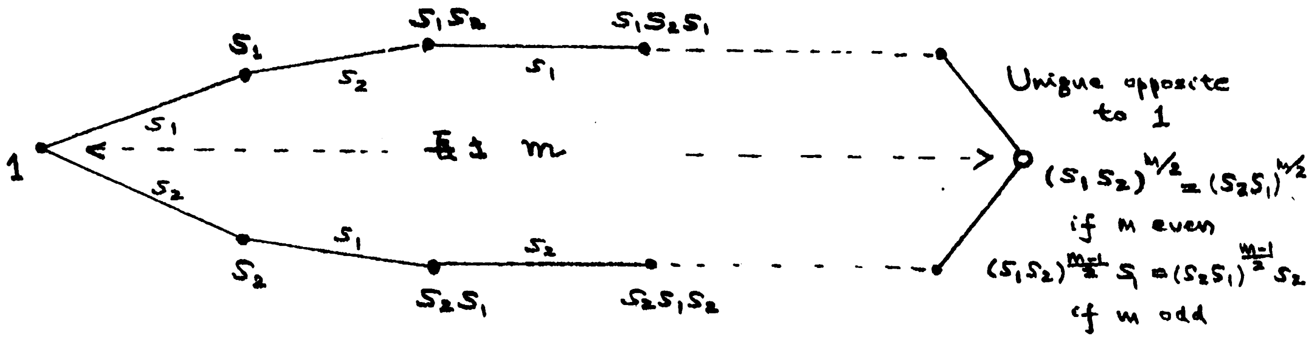
が存在する。このとき $d(c,c') := s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_m}$ により W への距離関数を定めれば、これは上のような列の取り方によらない事が示される。従って (Δ, d) は (A_{n-1} 型の) 建物となる。(ここで A_{n-1} とは対角成分の一つ上・下が 3 で残りの非対角成分が 2 であるコクセター行列)

単体複体としての建物　(Δ, d) を M 型の建物とする。$J \subseteq I$ 及び $c \in \Delta$ に対する Δ の部分集合 $\Sigma_J(c) := \{c' \in \Delta \mid d(c,c') \in W_J\}$ を**中心 c の J-球** (J-*sphere at center* c) という。

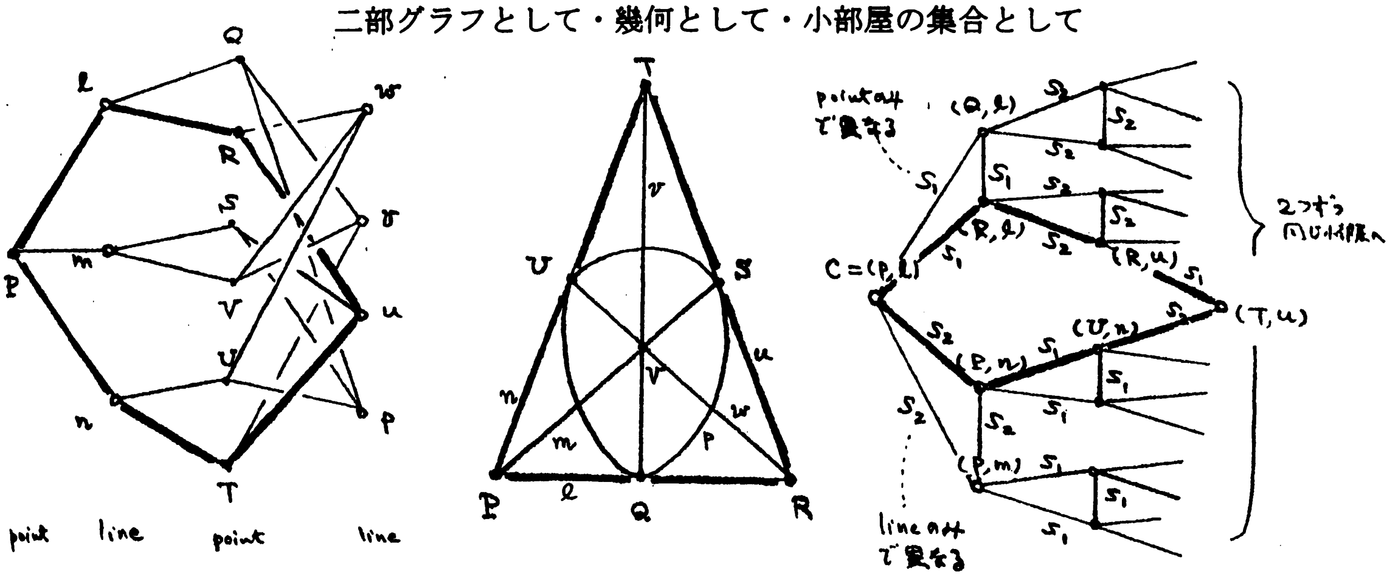
J を固定したとき J-球たちは Δ を分割する。さて $|J| = |I| - 1$ を満たす J に対する J-球たちの全体を頂点とし、$\cap_k \Sigma_{J_k}(c_k) \neq \emptyset$ であるような $\Sigma_{J_k}(c_k)$ の集合を単体として (このときある $c' \in \Delta$, $K \subseteq I$ に対して $\cap_k \Sigma_{J_k}(c_k) = \Sigma_K(c')$ となる) Δ に単体複体の構造が入る。

階数 2 の建物 (Generalized Polygons)　$|I|$ を建物の階数 (*rank*) という。階数 2 の建物とは、階数 2 のアパート ($2m$ 角形) を張り合わせたものであり、いわゆる一般化された多角形 (直径 m 内径 $2m$ の二部グラフ) を点と線の幾何と見たものの旗複体に他ならない。

階数 2 のコクセター群 $W = \langle s_1, s_2 \mid (s_1s_2)^m = s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle \cong D_{2m}$
に対応するアパート (W, d_W)



射影平面 $PG(2,2)$ の 3 つの表現
二部グラフとして・幾何として・小部屋の集合として



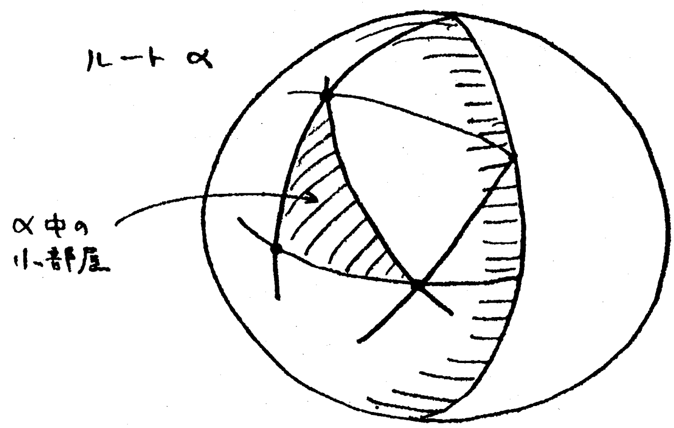
ルートとルート群

Definition 9 Δ を M 型の建物、A を Δ のアパートとする。A と (W, d_W) の同型において、適当な $s \in W$ に対する W の部分集合 $\{w \in W \mid l(sw) = l(w) + 1\}$ に対応する A の部分集合 α のことを**ルート** (root) という。

α を Δ の複体と見なす事が出来るが、その幾何学的表示の境界のことを $\partial(\alpha)$ と書く。($\partial(\alpha)$ は α より次元の低い単体の集合であり、もはや小部屋の集合ではない事に注意。)

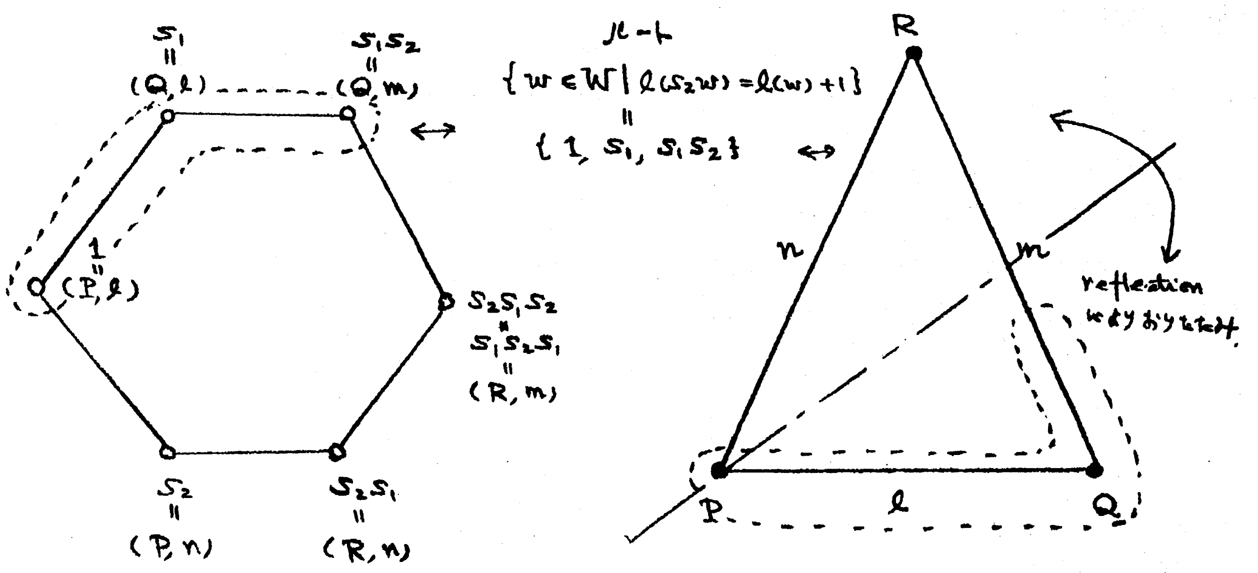
$|I| = 3$ のときのイメージ，W：有限

単体複体の幾何学的実現として–アパート A は２次元球面



$|I| = 2$ のときのイメージ

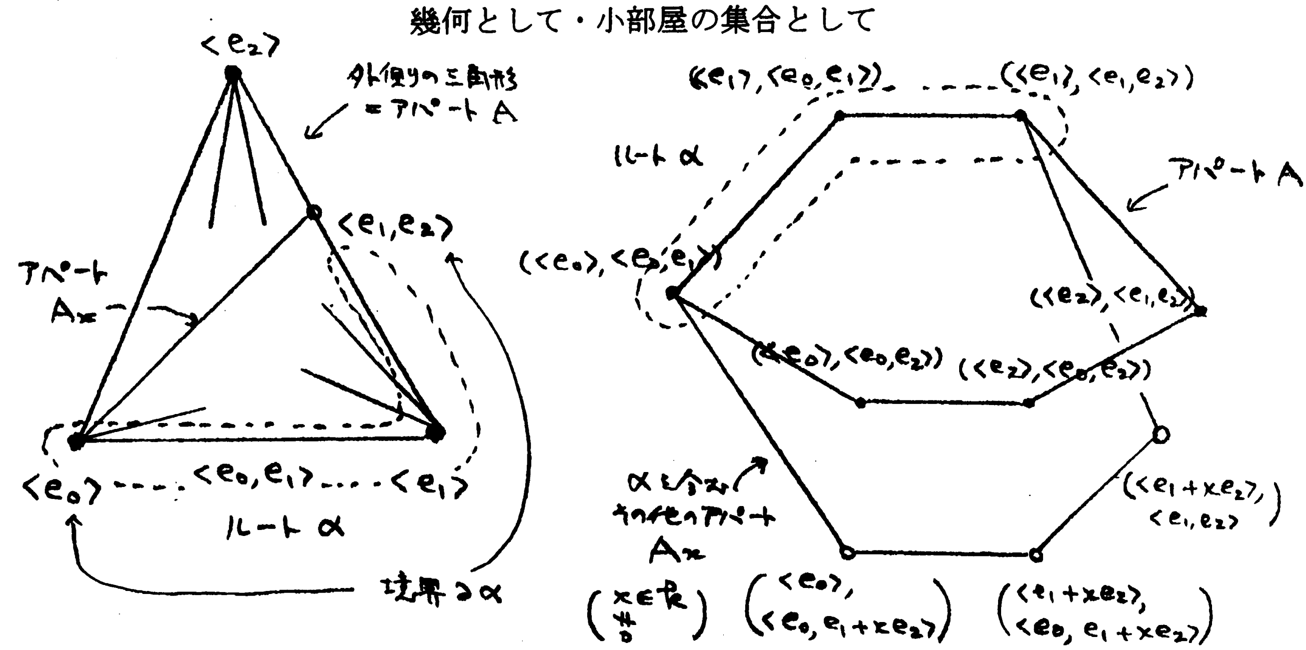
小部屋の集合として・単体複体の幾何学的実現として–アパート A は１次元球面



Definition 10 α におけるルート部分群 U_α とは、境界に入らない補次元 1 のルートの部分単体を含むような小部屋をすべて固定する建物の自己同型のなす部分群と定義する:
$U_\alpha := \{g \in Aut(\Delta) \mid g$ *fixes every chambers* x *having a codim* 1-*simplex in* $\alpha - \partial(\alpha)\}$.

$PG(2,k)$ での説明

幾何として・小部屋の集合として



上図において（小部屋の集合と見ると）

$$\alpha = \{(\langle e_0\rangle, \langle e_0, e_1\rangle), (\langle e_1\rangle, \langle e_0, e_1\rangle), (\langle e_1\rangle, \langle e_1, e_2\rangle)\}$$

であり、従って

$$\partial(\alpha) = \{\langle e_0\rangle, \langle e_1, e_2\rangle\}$$

である。そこで $\alpha - \partial(\alpha)$ の補次元 1 の単体を共有するような小部屋は

$$(\langle e_0\rangle, \langle e_0, e_1\rangle),\ (\langle e_1\rangle, \langle e_1, e_2\rangle),$$
$$(\langle xe_0 + e_1\rangle, \langle e_0, e_1\rangle),\ (\langle e_1\rangle, \langle e_1, xe_0 + e_2\rangle),\ x \in k;$$

すなわち（射影点と線の幾何と見て）線 $\langle e_0, e_1\rangle$ 上の点全体及び点 $\langle e_1\rangle$ を通る線全体である。
これから $Aut(PG(2,k))$ を半線形射影変換のなす群と見れば U_α は e_0, e_1, e_2 に関して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表現される線形変換のなす群である。この群は α を含むアパートの全体に可移に作用している事に注意されたい。

さて、Tits の球面型建物（すなわち対応するコクセター群が有限群であるような建物）の分類指針となった重要な定理を紹介する。([T1, Theorem 4.1.2])。

Theorem 11 Δ と Δ' を球面型の建物とし、Δ のアパート A の小部屋 c と Δ' のアパート A' の小部屋 c' を選ぶ。c と補次元 2 以下の部分単体で交わるような Δ の小部屋の集合を $E_2(c)$ と書く: $E_2(c) := \{x \in \Delta \mid x \in \Sigma_J(c)\ (\forall |I-J| \le 2)\}$. 同様に $E_2(c')$ を定義する。

このとき $E_2(c) \cup A$ から $E_2(c') \cup A'$ の上への任意の同型写像は (一意的に) 建物 Δ から建物 Δ' への同型写像に拡張できる。

この定理の重要な系として次の結果が得られる。これは、上の実例でみた現象の壮大な一般化であり、幾何学的な公理系のみから大きな自己同型群の存在が示されるという希有な例である。このような結果が得られるということ自体が Tits による建物の公理系の妥当性を示すものと考えられる。上記の定理の原証明 [T1, Subsection 4.4.–4.17, pp.61–74] は当然の如く長くて複雑である。ここでは系をいかに導くか説明する ([T1] では p.274 にこのことが述べられているが、証明は省略されている。[R, Corollary 6.7, p.67] 参照)。

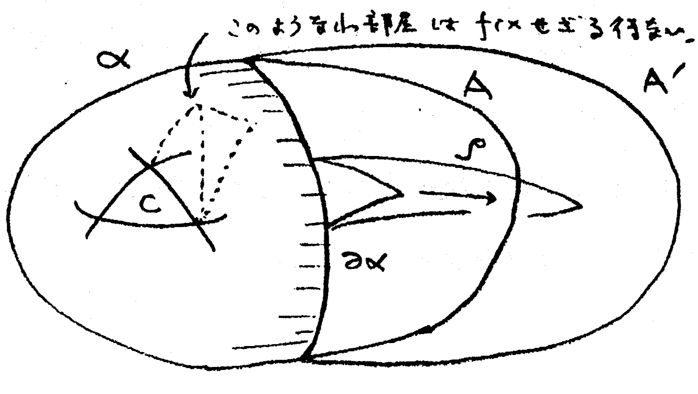
Corollary 12 Δ は M 型の建物で、階数 $|I|$ が 3 以上で、既約、かつ球面的 (W が有限群) とする。このとき、どのルート α に関するルート部分群 U_α も、このルート α を含むアパートの全体に可移に作用する。

(一般に建物 Δ がこの結論を満たすとき Δ は**ムーファン** (*Moufang*) という。

Proof. ルート α を含むアパート A, A' を取る。仮定から、そのどんな部分単体も $\partial(\alpha)$ と交わらぬような小部屋 c が α 中に取れる。すると $E_2(c) \cap A$ と $E_2(c) \cap A'$ は α に含まれる。

ところで α の小部屋をすべて固定するような A から A' への同型写像 ρ が同型 $A \cong A' \cong (W, d_W)$ を通じて作れる。そこで写像 ρ' を A 上では ρ であり、$E_2(c)$ 上では恒等写像として定めれば、定義域の共通部分では ρ は恒等的だから、ρ' は矛盾無く定義され $A \cup E_2(c)$ から $A' \cup E_2(c)$ への同型写像となる。

すると上記の定理 11 により、ρ' は Δ の自己同型 g に拡張される。後は $g \in U_\alpha$ を確認するだけであるが、これは c からの距離に関する帰納法で出来る。 **Q.E.D.**



上の Tits の定理 11 の原理を深く追求することにより、幾つかの重要な概念 (foundation 等)・定理が生じた。そして Tits 自身による次の結果は、建物の local な特徴付けを与えるものとして、以後汎用の定理となったばかりでなく、そこでの方法論（代数的トポロジーに現れる被覆空間・被覆の理論の組合せ的類似となる理論）が群と幾何という分野の誕生を促したのである。

Theorem 13 *[T2]*（I により添え字付けられたタイプを持つ）単体複体は、そのランク 2 の剰余空間 *(*$\Sigma_J(c)$*,* $|J| = |I| - 2$ に相当*)* が階数 2 の建物で、しかもランク 3 の剰余空間 *(*$\Sigma_J(c)$*,* $|J| = |I| - 3$ に相当*)* がすべて建物であるならば、それ自身建物である。

すなわち、この命題を群論的に言い換えたところから、冒頭に紹介した

> 「可能なアマルガムを決定し、その完備化を (知られた幾何の基本群を求めて）決定し、元の群をその完備化の準同型像として取り出す」、

という群と幾何における基本手段が明確化されたのである。

他方、建物理論の一般化を考えたとき、散在群に対する良い幾何の階数 2 の剰余空間はどのようなものかという興味を動機として、**散在型の幾何** (*sporadic geometries*)–散在型単純群などが旗上可移に作用する建物以外の幾何の総称–が多く発見された。(1980 年代前半）そしてこのような local な幾何の公理のみから全体の幾何とそこに大きく作用する群の復元が出来るかどうかを調べることが 80 − 90 年代前半の主流をなす研究であった。

その結果殆どすべての単純群に対して、その群が旗上可移に作用するような単体複体が存在し、しかもそれらの階数 2 の剰余空間としては、建物 (一般化された多角形), **サークル幾何** (c-geomtry), **ペーターセン幾何** (P-geometry), **チルダ幾何** (T-geometry) といった、非常に制限された構造のみが現れている事が観察された。これらの例外的な幾何は一般化された多角形のアフィン構造 (ある線を取り除いた構造）と関連しているが、統一的には記述できない。

しかしながら、これらの幾何をブロックとして建物理論の一般化を図るには一つの大きな障害がある。それは、階数 2 のコクセター群では群とそれが作用する一般化された多角形 (単なる多角形）は表裏一体のものであり、群 = 幾何といって良い面があるのに対し、他の階数 2 の幾何については、残念ながら群 = 幾何ではない (幾何とその自己同型群の対応が十分に良いものでない) からである。幾つか素朴だが根源的な疑問を提出する。

(Qa) 良い統一理論はあるか？

(Qb) 構成要素が上の 3 つの例外的な幾何と一般化された多角形に限るのはなぜか？

(Qc) 散在型幾何のアパート・コクセター群とは？

球面型建物分類の見直し Tits は球面型の建物の分類を完成した直後に、別な分類のやり方があることに気付いた [T1, Appendix]。すなわち、これらの建物をより広くムーファン建物と捉えて (系 12 参照)、「ムーファン建物のランク 2 の剰余空間はまたムーファンである」という帰納的な性質に基づいてムーファン建物そのものの分類を行うのである。当然、すべての基本として階数 2 のムーファン建物 (ムーファン多角形) の分類の必要性が生じる。そのための一番基本になるのは次の結果である。

Theorem 14 *(Weiss [W],[vM])* 厚いムーファン n-角形が存在するならば $n = 2, 3, 4, 6$

ムーファン多角形の分類については、1975 頃に Tits による分類完成の予告があったが、その後見直しが必要となり (ムーファン四角形が難関)、ながらく放置されていた。1996-97 頃パリ大学で完成部分の講義が Tits により行われ、そこに参加していた Richard Weiss の積極的な協力により、1998 – 99 頃についに完成された。一つのアパート上のルートに対するルート部分群たちは互いに関連する代数構造によって座標付けされるが、この代数構造と交換子関係の決定を厳密に行ったのである。成果は近刊予定 [TW] (また [vM] も良い導入を与える) にまとめられている。

近年筆者が参加したベルギー・イタリアでの集会には、共にこの成果の集中講義が含まれていた。それほど重要な成果であることは本稿から十分に察せられると期待したい。しかし、その内容のかなりの部分は交換子を巧みに用いた初等的群論であり、面倒なのは複雑な座標系を用いた代数構造の計算のみである。もとより有限幾何に限った話しではないのだが、有限性を仮定して、更に分類を読みやすいものに出来ないものかとも思う。

Kac-Moody 群等への幾何学的アプローチ–双子建物の分類 [T3][Ab]

球面型建物の分類において重要なのは、どの小部屋にもそれと**反対の** (*opposite*) 小部屋が存在することであった。(一般線形群では上半三角ボレル群に対応する小部屋の反対が下三角ボレル群に対応した) この事実は、コクセター群 W の有限性から最長元 w_0 が存在することに由来する。しかし Kac-Moody 群においても、共役ではないが、反対なボレル群のペアが取れる。そこで反対という関係により関連しあっている建物のペアを考えるという M.Ronan のアイデアに基づいて誕生し、発展してきたのが**建物の双子化 (双子建物)** (*twininig of buildings* (or *twin buildings*)) の理論である [T3] 。Tits による球面型建物の分類をトレースした双子建物の分類が Müllehrer 等により進行中であって、現時点で完成している可能性もある。

こうした仕事はもはや筆者の良く理解するところではないが、有限群にとらわれない仕事の中での有限群論の位置付けの見直しは、今後数学の中における有限群論の価値をはっきりさせるためにも重要な課題であろう。

(２００１年3月２１日提出)

参考文献

[T1] J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math. 386, Springer, 1974. (Second Ed., 1986.)

[W] R. Weiss, The non-existence of certain Moufang polygons, *Invent. Math.*51 (1979), 261–266.

[T2] J. Tits, A Local approach to buildings, pp.317–327, in *The Geometric Vein. The Coxeter Festchrift* (ed.D.Chandler et al.), Springer, 1981.

[R] M. Ronan, *Lectures on Buildings*, Academic Press, 1989.

[AS1] M. Aschbacher and Y. Segev, The uniqueness of groups of type J_4, *Invent. Math.*105 (1991), 589–607.

[AS2] M. Aschbacher and Y. Segev, Extending morphisms of groups and graphs, *Ann. Math.***135** (1992), 297–323.

[T3] J. Tits, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, pp. 249–286 in *Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 1990* (M.W.Liebeck and J.Saxl eds.), London Math. Lecture Note Ser. **165**, Cambridge U.Press, 1992.

[Iv] A. A. Ivanov, A Geometric Characterization of the Monster, pp. 46–62 in *Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 1990* (M.W.Liebeck and J.Saxl eds.), London Math. Lecture Note Ser. **165**, Cambridge U.Press, 1992.

[A] M. Aschbacher, *Sporadic Groups*, Cambridge U. Press, 1994.

[Ab] P. Abramenko, *Twin Buildings and Applications to S-arithmetic groups*, Lecture Notes in Math. **1641**, Springer, 1996.

[vM] H. van Maldeghem, *Generalized Polygons*, Monographs in Math.**93**, Birkhäuser, 1998.

[TW] J. Tits and R. Weiss, *The Classification of Moufang Polygons*, to be published (from Springer ?).