数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 11-26

有限群論のカテゴリー論的様相

(Categorical Aspects of Finite Group Theory)

吉田 知行 (Tomoyuki YOSHIDA)

概要

The purpose of this paper is to introduce an attempt at "categorification "of the theory of Burnside rings of finite groups. We construct the abstract Burnside ring of a finite category with coequalizer condition in which all morphisms are epic, and then prove the fundamental theorem and idempotent formulas. We furhtermore give, as explicit examples, some congruences including Stirling numbers and binomial coefficients which can be viewed as kinds of Brown's homological Sylow theorem and weak Frobenius theorem.

1 はじめに

有限群の表現論ではホモロジー代数を通して，(主にアーベル) カテゴリーとファンクターの概念はおなじみである．しかし，抽象的なしかも非加法的カテゴリーとなると，有限群をやっている我々には取りつきにくいし，果たして役に立つのかという根本的疑問も感ずる．それでも，カテゴリーに関係のありそうな有限群論と組み合わせ論の分野がいくつかあり，それらは有限群論と他分野を結びつける有力な拠点になりそうに思える．

有限群のかわりにカテゴリーを使って理論を書き直し，そうして得られた理論を特別なカテゴリーに適用することによって，新たな結果が得られることがある．カテゴリー論を実際の数学に応用するときの定跡のひとつと言える．また,「アソシエーションスキームの理論は，群なしの群の表現論である」という名言があるが，それにも似ている．

$\boxed{\text{群を含む理論}} \longrightarrow \boxed{\text{群を除いた抽象的理論}} \longrightarrow \boxed{\text{特殊化された理論}}$

群を除くところでカテゴリーを使うのである．何かの抽象的理論を築くのには，数学は，カテゴリーに限らず，抽象代数学や位相空間論などを提供してくれる．抽象化によって，理論の骨格が明白になり，他分野との関連や応用が得られる．今世紀猛威を振るった抽象化の波は過ぎ去ったようだが，有限群論 (それと組み合わせ論) については抽象化がやり残されている．何でもかんでもカテゴリーの言葉で書くのは，カテゴリー論の専門家の得意とする

ところであるが，幸か不幸か彼らの手は我々の分野にまだ及んでいないようである．ともかく，「有限群論の結果や方法は他分野のものと異なる」と言って孤高を守るのは好ましいことではない．有限群論や組み合わせ論の結果や方法の抽象化 (カテゴリー化) は，２１世紀初頭に片づけておくべき課題のひとつと思う．

群 (より一般に単位的半群) G 自身をカテゴリーと見なすことができる．実際，ただ一つの対象を持ち，射の集合を G とし，合成を G における演算として，カテゴリーができる．しかし，このカテゴリーは余りにも特殊すぎて (連結な亜群)，一般化の意味がないし，例も本質的には群しかない．実際には，もっと大きなカテゴリーが便利である．たとえば，カテゴリーと見なした群 G を含み直和・余等化で閉じた最小のカテゴリーを考えると，不思議なことにそのカテゴリーは，直積・ファイバー積でも閉じており，実際それは有限 G-集合のカテゴリーに同値になる．さらに，G を含む最小のアーベルカテゴリーは有限生成 $\mathbf{Z}G$-加群のカテゴリーになる．実際は，$\mathbf{Z}G$-加群のカテゴリーに至る前の加法的カテゴリー (たとえば置換加群のカテゴリー，trivial source module のカテゴリーなど) が有用である．

有限集合 X が G-集合であるとは，群 G が左から X に作用していることであった．この作用 $G \times X \longrightarrow X; (g, x) \longmapsto gx$ は，条件 (i) $1x = x$, (ii) $(gg')x = g(g'x)$, $g, g' \in G, x \in X$ を満たさなければならない．G-集合の間の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が G-写像であるとは，$f(gx) = gf(x)$, $g \in G, x \in X$ を満たすことをいう．有限 G-集合と G-写像は，有限 G-集合のカテゴリー $\mathbf{Set}_f^G$ をなす．有限群 G は，$\mathbf{Set}_f^G$ における，連結かつ射影的対象の自己同型群なので，$\mathbf{Set}_f^G$ からもとの群 G を復活できる．有限 G-集合のカテゴリーは，直和 $X+Y$・直積 $X \times Y$・等化・余等化・ファイバー積 $X \times_Z Y$ などを持ち，局所有限トポスという種類のカテゴリーの典型例である．有限群 G のところを $\mathbf{Set}_f^G$ で置き換え，準同型写像を関手で置き換えて有限群論をカテゴリーの言葉で書き換えられる．これによって失われる情報はなく，有限群論のカテゴリー化ができるはずである．当然，局所有限トポスへの拡張を期待することになる．

有限群論のカテゴリー化についての筆者のこれまでの研究として以下のものがある：

・有限群の Burnside 環 ([Yo83], [Yo87])
・有限群の移送定理
・Hecke 作用素の環
・ブロックデザインに対する Fisher の不等式 ([Yo87])
・群環の quantum double ([OY00])
・置換表現の個数に関する Wohlfahrt の公式 ([Yo00a], [Yo00b])
・線形符号に対する MacWilliams の恒等式 ([Yo93])
・数え上げの組み合わせ論，とくに母関数の理論 ([Yo00b])

成功したものもあれば，失敗したものもある．やりかけの課題も多い．この他にも，母関数の理論のカテゴリー化は，Joyal をはじめとするフランスのグループが活発に研究している (species の理論)．ただカテゴリー論的にはまだ不満がある．2項定理のカテゴリー版が丹原による乗法的 transfer の公理の中に含まれている ([Ta93])．

今回紹介するのは，有限群の Burnside 環の理論の「カテゴリー化」(toy model) である．こうして得られる抽象 Burnside 環の理論は，1987 年の論文 [Yo 87] で概略を発表し，いろいろな研究集会で断片的に発表してきた．ここでは，理論構成の筋道を示すために，少し条件を強くした場合の理論とその応用を述べたい．

記号: これからは次の記号を断りなしに使う．

G：有限群　p：素数　k：可換環

$\mathbf{Z}_{(p)} := \{a/b \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \notin p\mathbf{Z}\} \subseteq \mathbf{Q}$

$\mathrm{Sym}(n)$：n 次対称群

n_p：自然数 n の p-ベキ部分　G_p：有限群 G のあるシロー p-部分群

$O^p(G)$：剰余群が p-群であるような最小の正規部分群

$H^g := g^{-1}Hg,\ {}^gH := gHg^{-1}, NH := N_G(H), WH := NH/H$

$\mathrm{Sub}(G)$：部分群束　$C(G) := \mathrm{Sub}(G)/\underset{G}{\sim}$ (部分群の共約類の集合)

有限順序集合 P の Möebis 関数とは，写像 $\mu \times \mu \longrightarrow \mathbf{Z}$ で，次の条件を満たすものである：

$$\mu(x,x) = 1,\ \mu(x,y) = 0 \quad \text{if } x \not\leq y,$$
$$\sum_{t \leq y} \mu(x,t) = \sum_{t \geq x} \mu(t,y) = \delta_{x,y}$$

有限順序集合 P のオイラー標数 $\chi(P)$ は，対応する順序複体のそれである．Möbius 関数を用いると

$$\chi(P) = \sum_{x,y \in P} \mu(x,y)$$

と表せる．

2 Burnside 環

有限群 G の **Burnside 環** $\Omega(G)$ とは，有限 G-集合のカテゴリー $\mathbf{Set}_f^G$ の Grothendieck 環である．したがって $\Omega(G)$ は，有限 G-集合の同型類 $[X]$ 全体で生成され，関係式 $[X+Y] = [X]+[Y]$ で定義される．積は $[X]\cdot[Y] = [X \times Y]$ を拡張して得られる．

有限 G-集合は有限個の可移 G-集合の直和に分解され，可移 G-集合は G/H の形をしている．さらに $G/H \cong_G G/K$ G-同型 $\Longleftrightarrow$ $H \underset{G}{\sim} K$ G-共約 であ

る．したがって $\Omega(G)$ は $\{[G/H] \mid (H) \in C(G)\}$ を基底とする自由加群である．この基底に関する積は

$$[G/H]\cdot[G/K] = \sum_{HgK\in H\backslash G/K} [G/H^g \cap K]$$

で与えられる．

部分群 $S \leq G$ に対し，環準同型 $\varphi_S : \Omega \longrightarrow \mathbf{Z}$ を $\varphi_S([X]) = |X^S|$ で定義する．ここで $X^S := \{x \in X \mid sx = x\ \forall s \in S\}$ である．したがって **Burnside 準同型**

$$\varphi := (\varphi_S) : \Omega(G) \longrightarrow \tilde{\Omega}(G) := \mathbf{Z}^{C(G)} = \prod_{(S)\in C(G)} \mathbf{Z}$$

が得られる．$\tilde{\Omega}(G)$ は，G の部分群束 $\mathrm{Sub}(G)$ から $\mathbf{Z}$ への類関数のなす環とも見なせる．

Burnside 環の基本定理: 次は加群の完全系列である：

$$0 \longrightarrow \Omega(G) \xrightarrow{\varphi} \tilde{\Omega}(G) \xrightarrow{\psi} \prod_{(S)\in C(G)} (\mathbf{Z}/|WS|\mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

ここで，$WS := N_G(S)/S$ であり，さらに

$$\psi : \chi \longmapsto \left(\sum_{gS\in WS} \chi(\langle g\rangle) \bmod |WS|\right)_S$$

である．したがって，$\mathbf{Q}\otimes\Omega(G)$ は直積環 $\mathbf{Q}^{C(G)}$ に環同型である．

基本定理から得られる結果として，ベキ等元公式を紹介しよう．

ベキ等元公式: $H \leq G, Q = O^p(G) \leq G$ とし，

$$\begin{aligned} e_H &:= \frac{1}{|NH|}\sum_{D\leq H} |D|\mu(D,H)[G/D], \\ e_Q^{(p)} &:= {\sum_{O^p(H)=Q}}' e_H = \frac{1}{|NQ|}\sum_{D\leq NQ} |D|\lambda(D,Q)[G/D], \\ &\quad \lambda(D,Q) := \sum_{O^p(S)=Q} \mu(D,S) \end{aligned}$$

とおく．ここで，μ は部分群束 $\mathrm{Sub}(G)$ の Möbius 関数，2番目の和 $\sum'$ は $O^p(H) = Q$ を満たす $H \leq G$ の共約類 (H) についての和，最後の和は $O^p(S) = Q$ を満たす部分群 $S \leq G$ についての和である．このとき，$\mathbf{Q}\otimes\Omega(G)$ の原始ベキ等元は $e_H, (H) \in C(G)$ の形をしており，$\mathbf{Z}_{(p)} \otimes \Omega(G)$ の原始ベキ等元は $e_Q^{(p)}$ の形をしている．

ホモロジー論的 Sylow の定理 (Brown 1972) : 自明でない p-部分群のなす順序集合のオイラー標数について,

$$\chi\,(p\text{-部分群} \neq 1) \equiv 1 \bmod |G|_p.$$

この合同式は, ベキ等元 $e_1^{(p)}$ における $[G/1]$ の係数

$$|G|^{-1}\lambda(1,1) = |G|^{-1}\sum_{P}\mu(1,P) \in \mathbf{Z}_{(p)}$$

からただちに得られる. ここで P は G のすべての p-部分群全体を動く.

やや面倒だが, Sylow の定理や, Frobenius の定理

$$\sharp\{x \in G \mid x^n = 1\} \equiv 0 \bmod \gcd(n, |G|)$$

とそれらの拡張も Burnside 環の応用として得られる ([Yo96]).

さて, Burniside 環の理論のカテゴリー化には, いくつかの障害がある. たとえば, 基本定理に出てくる, 部分群・固定点集合 X^S・部分群の位数・正規化群・巡回群 $\langle g\rangle$・部分群束とその Möbius 関数といった概念は, カテゴリー化したときどうなるのだろう. 幸いなことに, これらの障害はすべてクリアできる.

ステップ1 : Burniside 環の理論に現れる有限群 G のところを, 可移 G-集合のカテゴリーの言葉で書き換える.
ステップ2 : 基本定理の主張と証明に必要なカテゴリーの性質を取り出す.
ステップ3 : 最後にその性質を持つカテゴリーについて, 抽象 Burnside 環の理論を組み立てる.

途中の過程は省略して完成した抽象 Burnside 環の理論を紹介する.

3 抽象 Burnside 環

以下では, Γ は以下の条件 (F), (S), (E), (C) を満たすカテゴリーとする.

(F) Γ は有限カテゴリーである.
(S) Γ は骨格的である.
(E) Γ におけるすべての射は epi である.
(C) 任意の対象 i とその自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(i)$ に対し, 恒等射 1 と σ は余等化 $\pi_\sigma : i \longrightarrow i/\sigma$ を持つ.

ここで, カテゴリー Γ が**有限**であるとは, 対象の類 $\mathrm{Ob}(\Gamma)$ が有限集合で, 各 hom-set $\Gamma(x,y) := \mathrm{hom}_\Gamma(x,y)$ も有限集合になっていることを意味する. したがって, Γ における射全体が有限集合をなす.

カテゴリー Γ が**骨格的**であるとは, $i \cong j \implies i = j$ を意味する.

射 $f : x \longrightarrow y$ が epi であるとは，$u \circ f = v \circ f \implies u = v$ を意味する．

また i/σ が**余等化**であるとは，$\pi_\sigma \circ \sigma = \pi_\sigma$ であり，$f \circ \sigma = f$ を満たす任意の射 $f : i \longrightarrow x$ に対し，ただ一つの射 $\tilde{f} : i/\sigma \longrightarrow x$ が存在して $f = \tilde{f} \circ \pi_\sigma$ を満たすことを意味する：

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, shift right, "\sigma"'] & i \arrow[r, "\pi_\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & i/\sigma \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & & x. \end{tikzcd}$$

このことは

$$\Gamma(i,x)^{\langle\sigma\rangle} \longleftrightarrow \Gamma(i/\sigma, x); f = f \circ \sigma \longleftrightarrow \tilde{f}$$

という一対一対応の存在を意味する．$\Gamma(i,x)^{\langle\sigma\rangle}$ は，$\sigma \in \mathrm{Aut}(i)$ の $\Gamma(i,x)$ への作用 $f \longmapsto f \circ \sigma$ に関する固定点集合である．

注: (1) Γ が有限骨格的であるという条件 (F), (S) は本質的でない．Γ が有限カテゴリーに同値，つまり同型類 (の完全代表系) のカテゴリー $\Gamma/\cong$ が有限，であればよい．
(2) 条件 (E) は弱めることができる．すなわち Γ の任意の射についての一意的 epi-mono 分解性を持つだけでよい．したがって条件 (C) を満たす一意的 epi-mono 分解カテゴリーから，射として epi だけを取れば，(E) と (C) を満たすカテゴリーが得られる．
(3) 有理数係数の抽象 Burnside 環を考えるなら，条件 (C) は不要である．有理数体と p-局所整数環を係数とする抽象 Burnside 環を考えるなら，条件 (C) の条件は，$\mathrm{Aut}(i)$ の p-元に対して成り立てばよい．その場合，$\sigma \in (\mathrm{Aut}(i))_p$ は位数 p であるとしてよい．

例 1： 可移 G-集合の同型類のカテゴリー $\mathrm{Trans}(G)/\cong$ は上の条件を満たす．有限性は明らか，骨格性も同型類を取っているので成り立つ．可移 G-集合の間の G-写像は写像として全射であり，したがって epi である．可移 G-集合は G/H $(H \leq G)$ の形のものに同型であり，$\mathrm{Aut}(G/H) \cong WH$ $(f \longleftrightarrow f(H))$ であることに注意する．$gH \in WH$ に対応する自己同型 $\sigma : xH \longmapsto xgH$ と恒等写像 1 との余等化は $G/\langle g\rangle H$ によって与えられる．

例 2： 有限集合 $(\neq \emptyset)$ と全射のなすカテゴリー $E_n := \{[1],[2],\ldots,[n]\} \subseteq \mathbf{Set}_f$，ここで $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ など，は条件を満たす．$[i]$ の自己同型群は対称群 $\mathrm{Sym}(i)$ である．その元 $\sigma \in \mathrm{Sym}(i)$ に対し，余等化 $\pi_\sigma : [n] \longrightarrow [n]/\sigma$ は，σ-軌道の集合 $[n]/\sigma$ への自然な全射から得られる．

例 3： 有限集合 $[0] = \emptyset, [1], [2], \ldots, [n]$ と単射のカテゴリー M_n の双対は条件を満たす．余等化 $[i]/\sigma$ は，M_n における固定点集合 $[i]^{\langle\sigma\rangle}$ に対応する．

記号: 以下 Γ は上の条件を満たすカテゴリーとし，次の記号を使う：

$\mathbf{Z}\Gamma$, $\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$: Γ の対象を基底とする自由加群
$\mathbf{Z}^{\Gamma}, {\mathbf{Z}_{(p)}}^{\Gamma}$: Γ の対象全体上の $\mathbf{Z}$ または $\mathbf{Z}_{(p)}$-値関数の環

$$\mathrm{Obs}(\Gamma) := \prod_{i\in\Gamma}(\mathbf{Z}/|\mathrm{Aut}(i)|\mathbf{Z}),\quad \mathbf{Z}_{(p)}\mathrm{Obs}(\Gamma) := \prod_{i\in\Gamma}(\mathbf{Z}/|\mathrm{Aut}(i)|_p\mathbf{Z})$$

$\varphi : \mathbf{Z}\Gamma \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Gamma}; x(\in\Gamma) \longmapsto (|\Gamma(i,x)|)_i$: Burnside 準同型
$\varphi^{(p)} := 1\otimes\varphi : \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma \longrightarrow {\mathbf{Z}_{(p)}}^{\Gamma}$

$$\psi : \mathbf{Z}^{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{Obs}(\Gamma); \chi \longmapsto \left(\sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)}\chi(i/\sigma) \bmod |\mathrm{Aut}(i)|\right)_i$$

$$\psi^{(p)} : {\mathbf{Z}_{(p)}}^{\Gamma} \longrightarrow \mathbf{Z}_{(p)}\mathrm{Obs}(\Gamma); \chi \longmapsto \left(\sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)_p}\chi(i/\sigma) \bmod |\mathrm{Aut}(i)|_p\right)_i$$

抽象 Burnside 環の基本定理: 次の系列は完全である．

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}\Gamma \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbf{Z}^{\Gamma} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma \xrightarrow{\ \varphi^{(p)}\ } {\mathbf{Z}_{(p)}}^{\Gamma} \xrightarrow{\ \psi^{(p)}\ } \mathbf{Z}_{(p)}\mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

(証明) 各自己同型半群 $\Gamma(i,i)$ は，左簡約律を満たすので，群になることに注意しておく．関係 $i \gg j$ を，$\Gamma(i,j)\neq\emptyset$ のときとすることにより，Γ 上の順序関係が得られる．したがって，Γ の対象の順序をうまく取ると，線形写像 φ に対応する行列 $H := (|\Gamma(i,j)|)_{i,j}$ が下三角行列になる．その対角成分は $|\mathrm{Aut}(i)|$ なので，$\det(H) = \prod_i |\mathrm{Aut}(i)| = |\mathrm{Obs}(\Gamma)| \neq 0$ となる．したがって，φ は単射である．またその余核は $\mathrm{Obs}(\Gamma)$ に同型である．

$$\tilde{\psi} := \left(\tilde{\psi}_i : \chi \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)}\chi(i/\sigma)\right)_i$$

とすれば，$\tilde{\psi} : \mathbf{Z}^{\Gamma} \longrightarrow \mathbf{Z}^{\Gamma}$ に対応する行列は $(\sharp\{\sigma\in\mathrm{Aut}(i) \mid i/\sigma \cong j\})_{i,j}$ である．この行列は対角成分が 1 の下三角行列に共約なので，$\tilde{\psi}$ は全射である．したがって，ψ も全射になる．最後に $x\in\Gamma$ に対し，

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_i\varphi(x) &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)}\varphi_{i/\sigma}(x) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)}|\Gamma(i/\sigma,x)| = \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)}|\Gamma(i,x)^{\langle\sigma\rangle}| \\ &= |\mathrm{Aut}(i)|\cdot|\Gamma(i,x)/\mathrm{Aut}(i)| \equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|}.\end{aligned}$$

ここで最後の等式は，Cauchy-Frobenius の補題 (以前は Burnside の補題と呼んでいた) を使った．これより，$\psi\circ\varphi = 0$ となる．簡単なダイヤグラムの追跡により，系列の完全性が証明される．p-local の場合も同様である．

環構造の存在定理: $\mathbf{Z}\Gamma$ 上のただ一つの単位的環の構造が存在して，φ は環準同型になる．この環を**抽象 Burnside 環**という．Hom-set 行列を $H := (|\Gamma(i,j)|)_{i,j}$ とすれば，$x \in \Gamma$ と $y \in \Gamma$ の積と単位元は

$$x \cdot y = \sum_{z\in\Gamma}\left(\sum_{i\in\Gamma} H_{zi}^{-1} H_{ix} H_{iy}\right) z, \quad 1 = \sum_{x\in\Gamma}\left(\sum_{i\in\Gamma} H_{xi}^{-1}\right) x$$

によって与えられる．

(証明) まず $\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ は $\mathrm{Im}\,\varphi$ に含まれることを示す．

$$\begin{aligned}
\psi_i(\varphi(x)\varphi(y)) &= \sum_{\sigma\in \mathrm{Aut}(i)} |\Gamma(i/\sigma, x)| \cdot |\Gamma(i/\sigma, y)| \\
&= \sum_{\sigma\in \mathrm{Aut}(i)} |\Gamma(i,x)^{\langle\sigma\rangle}| \cdot |\Gamma(i,y)^{\langle\sigma\rangle}| \\
&= \sum_{\sigma\in \mathrm{Aut}(i)} |(\Gamma(i,x)\times\Gamma(i,y))^{\langle\sigma\rangle}| \\
&= |\mathrm{Aut}(i)| \cdot |(\Gamma(i,x)\times\Gamma(i,y))/\langle\sigma\rangle| \\
&\equiv 0 \bmod |\mathrm{Aut}(i)|
\end{aligned}$$

なので，基本定理より，$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x\cdot y)$ となる元 $x\cdot y \in \mathbf{Z}\Gamma$ が存在する．作り方から，$x\cdot y$ は上のような和で書ける．単位元についても同様である．

系: $\sum_{i\in\Gamma} H_{zi}^{-1} H_{ix} H_{iy}$, $\sum_{i\in\Gamma} H_{xi}^{-1}$ はどちらも整数である．

4 抽象 Burnside 環の有理ベキ等元公式

$\mathbf{Q}^{\Gamma}$ の原始ベキ等元は特性関数 $\epsilon_i : x \longmapsto \delta_{ix}$ で与えられる．$1\otimes\varphi : \mathbf{Q}\Gamma \longrightarrow \mathbf{Q}^{\Gamma}$ は環の同型写像なので，$\mathbf{Q}\Gamma$ の原始ベキ等元は

$$e_i := (1\otimes\varphi)^{-1}(\epsilon_i) = \sum_{x\in\Gamma} H_{xi}^{-1} x$$

の形をしている．また $\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ の原始ベキ等元は，いくつかの e_i の和である．したがって，問題はふたつある．ひとつは有理数係数の Burnside 環 $\mathbf{Q}\Omega(G)$ の原始ベキ等元公式に相当する公式であり，もうひとつは e_i たちが $\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ の中でどのように link しているかを決定することである．

最初の問題を解決するために，まず部分群束に対応する順序集合を作る．$\Delta \subseteq \mathrm{Ob}(\Gamma)$ で，条件

$$(\forall x\in\Gamma)(\exists d\in\Delta)\ \Gamma(d,x)\neq\emptyset$$

を満たすもの (**生成集合**) を取る．たとえば Γ の対象全体はこの条件を満たす．実際には，Δ はできるだけ小さい集合の方が良い．カテゴリー $\widetilde{\Gamma}$ を次の

ように構成する.

$$\mathrm{Ob}(\widetilde{\Gamma}) := \{(d,\alpha,i) \mid d \in \Delta, i \in \Gamma, \alpha \in \Gamma(d,i)\}$$

$$\widetilde{\Gamma}((d,\alpha,i),(e,\beta,j)) := \begin{cases} \{f \in \Gamma(i,j) \mid f \circ \alpha = \beta\} & \text{if } d = e \\ \emptyset & \text{else} \end{cases}$$

合成は, Γ における合成による.

このとき, Γ における射がすべて epi であることから, $\widetilde{\Gamma}((d,\alpha,i),(e,\beta,j))$ は高々 1 個の元からなる. したがって $\widetilde{\Gamma}$ の対象の同型類全体 $\Pi(\Gamma) := \widetilde{\Gamma}/\cong$ は半順序集合と見なせる. $(d,\alpha,i) \in \widetilde{\Gamma}$ に対応する同型類を $[d,\alpha,i]$ で表す. このとき

$$[d,\alpha,i] \le [e,\beta,j] \iff d = e, \exists f \in \Gamma(i,j) \text{ s.t. } f \circ \alpha = \beta$$

である. とくに

$$\begin{aligned} [d,\alpha,i] = [d,\beta,i] &\implies \exists \sigma \in \mathrm{Aut}(i) \text{ s.t. } \sigma \circ \alpha = \beta \\ &\iff \alpha = \beta \text{ in } \mathrm{Aut}(i) \backslash \Gamma(d,i) \end{aligned}$$

である. これで部分群束に相当する順序集合 $\Pi(\Gamma) := \widetilde{\Gamma}/\cong$ ができた. この順序集合は, Δ の対象の商対象のなす順序集合である. 自然な関手

$$\pi : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma; (d,\alpha,i) \longmapsto i, f \longmapsto f$$

がある. これは, 部分群 $H \le G$ に可移 G-集合の同型類 $[G/H]$ を対応させる関手に当たる.

Γ の hom-set matrix を $H := (|\Gamma(i,j)|)_{i,j}$, 順序集合 $\Pi(\Gamma) = \widetilde{\Gamma}/\cong$ の hom-set matrix を $\widetilde{H} := (|\widetilde{\Gamma}((d,\alpha,i),(e,\beta,j))|)_{[d,\alpha,i],[e,\beta,j]}$ とする. 対角行列 $D := (|\mathrm{Aut}(i)|\delta_{i,j})$ を取る. このとき $HD^{-1} = (|\Gamma(i,j)|/|\mathrm{Aut}(j)|)_{i,j}$ は整数行列となる. すべての射が epi なので, $\mathrm{Aut}(j)$ が $\Gamma(i,j)$ に正則に作用しているからである. さらに関手 $\widetilde{\Gamma}$ に対応する行列を $P := (\delta_{i,j})_{(d,\alpha,i),j}$ とする. このとき,

$$\widetilde{H}P = PHD^{-1}, \quad \text{したがって}\, PDH^{-1} = \widetilde{H}^{-1}P$$

である. 実際

$$\begin{aligned} (\widetilde{H}P)_{[d,\alpha,i],j} &= \sum_{[d,\beta,j]} \sharp\{f \in \Gamma(i,j) \mid f \circ \alpha = \beta\} \\ &= \frac{1}{|\mathrm{Aut}(j)|} \sum_{\beta \in \Gamma(d,j)} \sharp\{f \in \Gamma(i,j) \mid f \circ \alpha = \beta\} \\ &= \frac{|\Gamma(i,j)|}{|\mathrm{Aut}(j)|} = (PHD^{-1})_{[d,\alpha,i],j} \end{aligned}$$

また, $\Pi(\Gamma)$ の Möbius 関数を μ とすれば

$$\widetilde{H}^{-1}_{[d,\alpha,i],[e,\beta,j]} = \mu([d,\alpha,i],[e,\beta,j])$$

である．任意の $i \in \Gamma$ に対し，$\alpha : d(\in \Delta) \longrightarrow i$ が存在するので $PDH^{-1} = \widetilde{H}^{-1}P$ の $([d,\alpha,i],j)$ 成分を計算すると

$$H_{i,j}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(i)|} \sum_{[d,\beta,j]} \mu([d,\alpha,i],[d,\beta,j])$$

が得られる．この形だと，右辺が d,α に依存しているように見える．そこで，d,α についての平均を取った次の公式も得られる：

$$H_{i,j}^{-1} = \frac{1}{|\Delta/i|} \sum_{[\dot{d},\dot{\alpha},i]} \sum_{d,\dot{\beta},j]} \mu([d,\alpha,i],[d,\beta,j]).$$

ここで，記号の下に付けた点は，その記号について和を取ることを意味する．また，$\Delta/i := \{(d,\alpha) \mid d\Delta, \alpha \in \Gamma(d,i)\}$ である．$|\Delta/i|/|\mathrm{Aut}(i)|$ はランク i の $\Pi(\Gamma)$ の元の個数に等しい（$[d,\alpha,i]$ をランク i の元という）．

有理ベキ等元公式: 有理数係数の抽象 Burnside 環 $\mathbf{Q}\Gamma$ の原始ベキ等元は

$$e_j := \sum_{[\dot{d},\dot{\beta},j]} \sum_{[d,\dot{\alpha},i]} \frac{\mu([d,\alpha,i],[d,\beta,j])}{|\Delta/i|} i$$

の形をしている．

例: $C(G)$ で，部分群の共約類の完全代表系を表す．有限 G-集合のカテゴリー $\mathbf{Set}_f^G$ の充満部分カテゴリー $\Gamma := \{G/H \mid H \in C(G)\}$ を考える．部分集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ として，$\{G/1\}$ を取る．このとき，カテゴリー $\widetilde{\Gamma}$ の対象 $(G/1,\alpha,G/H)$ は $\alpha(1) \in G/H$ によって定まる．すなわち，$\mathrm{Ob}(\widetilde{\Gamma}) = \{xH \in G/H \mid x \in G, H \leq G\}$ と見なせる．こう考えたとき，射 $f : xH \longrightarrow yK$ は，剰余類 $x^{-1}yK$ が条件 ${}^{x}H \subseteq {}^{y}K$ を満たすときに限りただ一つ存在する．xH と yK が $\widetilde{\Gamma}$ において同型であるための条件は ${}^{x}H = {}^{y}K$ となることである．したがって $\widetilde{\Gamma}$ は G の部分群全体の集合と一対一に対応する（H などは部分群の共約類の完全代表系から取ったことに注意）．順序集合としては部分群束 $\mathrm{Sub}(G)$ に同型である．順序集合 $\Pi(\Gamma)$ の結合行列 $\widetilde{H}$ は $\mathrm{Sub}(G)$ の結合行列である．また行列 P の (H,K)-成分 $(H \in \mathrm{Sub}(G), K \in C(G))$ は H と K が共約なとき 1 で，それ以外の成分は 0 である．抽象 Burnside 環の有理ベキ等元公式は，Burnside 環 $\mathbf{Q} \otimes \Omega(G)$ のベキ等元公式を与える．

5 局所ベキ等元公式とその応用

次に $\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ のベキ等元を求める．前節と同様に，$\epsilon_j \in \mathbf{Q}^{\Gamma}$ を $j \in \Gamma$ の特性関数とする．$e_j := (1 \otimes \varphi)^{-1}(\epsilon_j) \in \mathbf{Q}\Gamma$ とおく．$\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ は $\mathbf{Q}\Gamma$ の部分環なので，$\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ の原始ベキ等元はいくつかの e_j の和である．$\mathrm{Ob}(\Gamma)$ の任意の部分集合 J に対し，

$$\epsilon_J := \sum_{j \in J} \epsilon_j \in \mathbf{Q}^{\Gamma},\ e_J := \sum_{j \in J} e_j \in \mathbf{Q}\Gamma$$

任意の対象 $i, j \in \Gamma$ に対し,

$$i \ll_p j \iff \exists \sigma \in \mathrm{Aut}(j)_p \text{ s.t. } i = j/\sigma$$

として関係 $\ll_p$ を定義する．この関係 $\ll_p$ で生成される同値関係を $\approx_p$ とする．

定理: $\mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ の原始ベキ等元は，e_J $(J \in \Gamma/\approx_p)$ の形をしている．

(証明) $\widetilde{\psi}_i^{(p)} : \mathbf{Z}_{(p)}{}^{\Gamma} \longrightarrow \mathbf{Z}_{(p)}$ を

$$\widetilde{\psi}_i^{(p)}(\chi) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(i)_p} \chi(i/\sigma)$$

で定義する．基本定理により,

$$\chi \in \mathrm{Im}(\varphi^{(p)}) \iff \widetilde{\psi}_i^{(p)}(\chi) \equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p} \quad \forall i$$

である．さて $J \subseteq \mathrm{Ob}(\Gamma)$ としたとき

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_i^{(p)}(\epsilon_J) &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Aut}(i)} \epsilon_J(i/\sigma) \\ &= \sharp\{\sigma \in \mathrm{Aut}(i)_p \mid i/\sigma \in J\} \\ &\leq |\mathrm{Aut}(i)|_p. \end{aligned}$$

である．したがって，J が Γ のいくつかの $\approx_p$-同値類の和集合なら，上の不等式からすべての i に対し $\widetilde{\psi}_i^{(p)}(\epsilon_J)$ は 0 または $|\mathrm{Aut}(i)|_p$ に等しい．とくに $\widetilde{\psi}_i^{(p)}(\epsilon_J) \equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p}$ となって，$\epsilon_j \in \mathrm{Im}(\varphi^{(p)})$ である．したがって $e_J = (1 \otimes \varphi)^{-1}(\epsilon_J) \in \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ である．逆に $e_J = (1 \otimes \varphi)^{-1}(\epsilon_J) \in \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ とすれば，$\widetilde{\psi}_i^{(p)}(\epsilon_J) \equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p}$ である．上で計算した $0 \leq \widetilde{\psi}_i^{(p)}(\epsilon_J) \leq |\mathrm{Aut}(i)|_p$ と合わせると，$\widetilde{\psi}_i^{(p)}(\epsilon_J)$ の値は，0 か $|\mathrm{Aut}(i)|_p$ に等しい．したがって，任意の $i \in \Gamma, \sigma \in \mathrm{Aut}(i)_p$ に対し,

$$i \in J \iff i/\sigma \in J$$

となる．これは，J がいくつかの $\approx_p$-同値類の和集合であることを意味する．(証明終)

系: $J \subseteq \Gamma$ を，いくつかの $\approx_p$-同値類の和集合とする．$\widetilde{\Gamma}$ における射 (d, α, i) を取る．このとき次が成立する：

(1) $\displaystyle\sum_{j \in J} H_{ij}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(i)|} \sum_{j \in J} \sum_{[d,\beta,j]} \mu([d,\alpha,i],[d,\beta,j]) \in \mathbf{Z}_{(p)}, \quad \forall i \in \Gamma.$

(2) $\displaystyle\sum_{j \in J} \sum_{[d,\beta,j]} \mu([d,\alpha,i],[d,\beta,j]) \equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p}.$

(証明) ベキ等元 $e_J \in \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ の $i \in \Gamma$ での係数は

$$\sum_{j\in J} H_{i,j}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)}.$$

である．また，前節の有理ベキ等元公式の記号を使うと

$$\sum_{j\in J} H_{i,j}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}(i)|}\sum_{j\in J}\sum_{[d,\beta,j]} \mu([d,\alpha,i],[d,\beta,j])$$

である．これからただちに (1), (2) がしたがう．(証明終)

Δ や $\Pi(\Gamma), \approx_p$ などは前節で定義したものとする．また $g \in \Delta$ と $\approx_p$-同値類 J を固定しておく．$\Pi(\Gamma)$ の部分順序集合 $\mathcal{S}_p(\Gamma, J)$ を

$$\mathcal{S}_p(\Gamma, J) := \{[g,\beta,j] \neq [g,1,g] \mid \beta \in \Gamma(g,j), j \in J\} \subseteq \Pi(\Gamma)$$

で定義する．この順序集合のオイラー標数を使えば，上の系は次のように表せる：

定理 (ホモロジー論的 Sylow の定理): $\chi(\mathcal{S}_p(\Gamma, J)) \equiv 1 \pmod{|\mathrm{Aut}(g)|_p}$.

Burnside 環を使った Sylow の定理や Frobenius の定理の証明には，巡回群の Burnside 環が λ-環の構造を持つことと，環準同型写像 $\omega : \Omega(C_{|G|}) \longrightarrow \Omega(G)$ が存在することが本質的に使われている．残念ながら，抽象 Burnside 環について ω に相当する準同型写像は存在しない．したがって Sylow や Frobenius の定理に相当する結果を出すには，次の問題の解を見いだす必要がある：

問題: 抽象 Burnside 環 $\mathbf{Z}\Lambda$ が λ-環構造を持つのはいつか．そのような λ-環 $\mathbf{Z}\Lambda$ から抽象 Burnside 環 $\mathbf{Z}\Gamma$ への標準的準同型写像 ω はいつ存在するか．

しかし弱い形の Frobenius の定理はある：

定理 (弱い Frobenius の定理) $J \subseteq \mathrm{Ob}(\Gamma)$ を $\approx_p$-同値類とする．このとき任意の $i \in \mathrm{Ob}(\Gamma)$ に対し，

$$\sharp\{\sigma \in \mathrm{Aut}(i) \mid i/\sigma \in J\} \equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p}.$$

(証明) J に対応する p-局所ベキ等元 $e_J^{(p)} \in \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma$ を考える．ある p'-数 n が存在して $f := ne_J^{(p)} \in \mathbf{Z}\Gamma$ である．$\varphi(e_J) = \epsilon_J$ ($J \subseteq \Gamma$ の特性関数) なので，

$$\varphi_i(f) = \begin{cases} n & \text{if } i \in J \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} \psi_i(\varphi(f)) &= \sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)} \varphi_{i/\sigma}(f) \\ &= n\sharp\{\sigma \in \mathrm{Aut}(i) \mid i/\sigma \in J\} \\ &\equiv 0 \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p} \end{aligned}$$

となる．基本定理により，求める合同式が得られる．(証明終)

この定理を，$\Gamma = \mathrm{Trans}(G)/\cong$ (可移 G-集合のカテゴリー)，$i = G/1$，J として $G/1$ を含む $\approx_p$-同値類に適用すると次が得られる：

$$(G \text{ の位数 } p \text{ ベキの元の個数}) \equiv 0 \pmod{|G|_p}.$$

これは Frobenius の定理のごく特別の場合である．

弱い Frobenius の定理の証明に使った論法の本質は次のことにある．整数係数抽象 Burnside 環の基本定理に $\mathbf{Z}_{(p)}$ をテンソルして次の系列の完全性が得られる：

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma \xrightarrow{1\otimes\varphi} \mathbf{Z}_{(p)}^{\Gamma} \xrightarrow{1\otimes\psi} \mathbf{Z}_{(p)}\mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0$$

実はこの完全系列は p-局所抽象 Burnside 環の基本定理の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{(p)}\Gamma \xrightarrow{\varphi^{(p)}} \mathbf{Z}_{(p)}^{\Gamma} \xrightarrow{\psi^{(p)}} \mathbf{Z}_{(p)}\mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0$$

とは異なっているのである．$\varphi^{(p)} = 1 \otimes \varphi$ だが，

$$\begin{aligned} 1\otimes\psi \;&:\; \chi \longmapsto \left(\sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)} \chi(i/\sigma)\right) \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p}, \\ \psi^{(p)} \;&:\; \chi \longmapsto \left(\sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)_p} \chi(i/\sigma)\right) \pmod{|\mathrm{Aut}(i)|_p} \end{aligned}$$

となって，一般には $1\otimes\psi \neq \psi^{(p)}$ だからである．しかしこの両方が完全系列であるということは，

$$\exists\xi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_{(p)}\mathrm{Obs}(\Gamma)) \quad \text{s.t. } \psi^{(p)} = \xi\circ(1\otimes\psi)$$

であることを意味する．この ξ の具体的構成は分からない．

6 いくつかの例

特別のカテゴリーについて，これまでホモロジー論的 Sylow の定理 (HS) と，弱い Frobenius の定理 (WF) がどのような形を取るかを見てみよう．

例 1： 可移 G-集合の同型類のカテゴリー $\mathrm{Trans}(G)/\cong$ については，すでに見たように，通常の Burnside 環が得られ，ベキ等元公式，ホモロジー論的 Sylow の定理，弱い Frobenius の定理が得られる．

例 2： 高々 n 元集合と全射のなすカテゴリー $E_n := \{[1],[2],\ldots,[n]\}$ を考える．このとき $H_{i,j} := |E_n([i],[j])| = S(i,j)j!$ (ここで $S(i,j)$ は第２種のス

ターリング数) と表せる．この例の行列 H の逆行列は，Möbius 関数を用いなくとも，第１種スターリング数によって表すことができる：

$$H^{-1}_{i,j} = s(i,j)/i!$$

スターリング数は次を満たす：

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)k!\binom{x}{k}, \\ n!\binom{x}{n} &= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \end{aligned}$$

$n<k$ のときは，$S(n,k)=s(n,k)=0$ とする．

・積 $[x]\cdot[y] := \sum_{z=1}^{n} \frac{x!\,y!}{z!}\left(\sum_{i=1}^{n} s(z,i)S(i,x)S(i,y)\right)[z]$.
・単位元 $[1]$.
・ベキ等元 $e_j := \sum_{i=1}^{n} H^{-1}_{ij}[i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{s(i,j)}{i!}[i]$.
・同値関係 $[i]\approx_p [j] \iff i\equiv j \pmod{p-1}$.
・p 局所ベキ等元 $e^{(p)}_j := \sum_{k\equiv j\ (p-1)} e_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(\sum_{k\equiv j\ (p-1)} s(i,k)\right)[i]$.
・(HS) $\sum_{k\equiv j\ (p-1)} s(i,k) \equiv 0 \pmod{(i!)_p}$.
・(WF) $\sharp\{\sigma\in \mathrm{Sym}(i) \mid r(\sigma)\equiv j \pmod{p-1}\} \equiv 0 \pmod{(i!)_p}$.
ここで $r(\sigma)$ は σ におけるサイクルの個数．

順序集合 $\Pi(E_n)$ を作るために，生成集合 Δ として $\{[n]\}$ を取る．このとき，カテゴリー $\Pi(E_n)$ の対象は $([n],\alpha,[i])$ の形をしている．$[n]=\{1,\ldots,n\}$ の分割のなす束を Π_n とする (細分された分割の方がもとの分割より小さいとする)．このとき，同型類のなす順序集合 $\Pi(E_n)/\cong$ は Π_n の双対である．

Π_n の Möbius 関数を μ とする．$\iota\in\Pi_n$ を i 個のブロックへの任意の分割とする．$\mathrm{Sym}(\iota)$ は，ι に対応する Young 部分群とする．このとき

$$H^{-1}_{i,j} = \frac{1}{|\mathrm{Sym}(\iota)|}\sum_{|\pi|=j}\mu(\pi,\iota)$$

である．ここで $|\pi|$ は，分割 π に含まれるブロックの個数とする．

ホモロジー論的 Sylow の定理は次のように表せる．

・(HS') $\chi\{\pi\in\Pi_n \mid \pi\neq 1^n, |\pi|\equiv j \pmod{p-1}\} \equiv 1 \pmod{(n!)_p}$.

例3: 高々 n 元集合 $[0]=\emptyset,[1],[2],\ldots,[n]$ と単射のなすカテゴリー M_n を考える．その双対 $\Gamma=(M_n)^{\mathrm{op}}$ は条件 (F), (S), (E), (C) を満たす．このとき hom-set 行列とその逆行列，ホモロジー論的 Sylow の定理，弱い Frobenius の定理などは次で与えられる (積の公式は若干の計算を要する)：

・$H_{i,j} = |M_n([j],[i])| = \binom{i}{j} j!$, $H_{i,j}^{-1} = \dfrac{(-1)^{i-j}}{i!}\binom{i}{j}$.

・積：$[x]\cdot[y] = \displaystyle\sum_{z=0}^{n} \frac{x!\,y!}{(z-x)!\,(z-y)!\,(x+y-z)!}[z]$.

・(HS) $\displaystyle\sum_{k\equiv j \pmod p} (-1)^{i-k}\binom{i}{k} \equiv 0 \pmod{(i!)_p}$.

・(WF) $\sharp\{\sigma \in \mathrm{Sym}(i) \mid f(\sigma) \equiv j \pmod p\} \equiv 0 \pmod{(i!)_p}$.

ここで $f(\sigma)$ は σ の固定点の個数.

・順序集合 $\Pi((E_n)^{\mathrm{op}}) = B([n])^{\mathrm{op}}$ (Boole 代数).

・(HS') $\chi\{A \subseteq [n] \mid A \neq \emptyset, |A| \equiv j \pmod p\} \equiv 1 \pmod{(n!)_p}$.

Boole 代数の Möbius 関数を使って最後の合同式を書いてみると，上の (HS) と同じものが得られる．これらの合同式の初等的証明がほしい.

例4：$\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Sub}(G)$ を，共約で閉じた部分群の族とする．任意の $H \in \mathfrak{X}$ と $g \in NH$ に対し，$XC_H(g) := \langle K \leq C_H(g) \mid K \in \mathfrak{X}\rangle \in \mathfrak{X}$ と仮定する．μ を順序集合 $\mathfrak{X}$ の Möbius 関数とする．$H \leq G$ に対し，$CH := C_G(H), A_GH := NH/CH$ とおく．カテゴリー Γ を，

$\mathrm{Ob}(\Gamma) := \mathfrak{X}/\underset{G}{\sim}$,
$\Gamma(K,H) := \{[H,x,K] \mid x \in G,\ H^x \subseteq K\}$,
ただし $[H,x,K] = [H,x',K] \iff C_G(H)x = C_G(H)x'$,
$[H,x,K]\circ[K,y,L] := [H,xy,L]$

で定義する．こうすれば Γ は，条件 (F), (S), (E), (C) を満たす．$[H,1,H]$ と $[H,g,H]$ の余等化は $[XC_H(g),1,H] : H \longrightarrow XC_H(g)$ である．このとき次が成り立つ：

・$H^{-1}_{(H),(K)} = \dfrac{1}{|A_GK|}\displaystyle\sum_{D\sim H}\mu(D,K)$．和は H に G-共約な $\mathfrak{X}$ の元を動く.

・有理原始ベキ等元 $e_H := \dfrac{1}{|NH|}\displaystyle\sum_{K\in\mathfrak{X}}|CK|\mu(H,K)\,(K)$

・$\approx_p$ は，$H \gg_p XC_H(g)$ $(gC_G(H) \in A_G(H)_p)$ で生成された同値関係.

・(HS) $\displaystyle\sum_{D\approx_p H}\mu(D,K) \equiv 0 \pmod{|A_G(K)|_p}$.

・(WF) $\sharp\{gC_G(K) \in A_GK \mid XC_K(g) \approx_p H\} \equiv 0 \pmod{|A_GK|_p}$

この場合の (HS) と (WF) の群論的意味はよく分からない.

例5：P を有限半順序集合とする．P はカテゴリーと見なす．このとき抽象 Burnside 環 $\mathbf{Z}P$ は，L.Solomon によって定義された Möbius 環である.

この他にも，有限体上のベクトル空間のカテゴリー，有限全順序集合のカテゴリー，有限群のカテゴリー，crossed G-sets のカテゴリー，tree のカテゴリーなどにも抽象 Burnside 環の理論が適用できる．ここでは述べなかったが，有理ベキ等元公式の応用として，数値計算法で使われる各種補間公式や

数値積分公式がある．また，抽象 Burnside 環のアイデアを，Mackey functor や Hecke 環，多項式環の抽象化に適用することも可能であり，多くの興味深い理論が得られる．これについては別の機会に述べたい．

参考文献

[OY 00] F.Oda–T.Yoshida, On crossed G-sets and the crossed Burnside ring of a finite group (I), *Journal of Algebra*, to appear.

[Ta 93] D.Tambara, On multiplicative transfer, *Comm. Algebra,* **21** (1993), 1393–1420.

[Yo 83] T.Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, *J. Algebra,* **80** (1983), 90–105.

[Yo 87] T.Yoshida, Fisher's inequality for block desings with finite group action, *Journal of the Faculty of Science, Tokyo Univ.*, Sec. IA, **34** (1987), 513–544.

[Yo 90b] T.Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math.J.*, **19** (1990), 509–574.

[Yos 93] T.Yoshida, MacWilliams identities for linear codes with group action, *Kumamoto J.Math.* **6** (1993), 29–45.

[Yos 96] T.Yoshida, Classical problems in group theory (I): Enumerating subgroups and homomorphisms, *Sugaku Expositions* **9** (1996),169–184.

[Yo 00a] T.Yoshida, Categorical aspects of generating functions (I): Exponential formulas and Krull-Schmidt categories, *Journal of Algebra*, to appear.

[Yo 00b] T.Yoshida, Categorical aspects of generating functions (II): Operations on categories and functors, *Journal of Algebra*, to appear.