数理解析研究所講究録 1214 巻 2001 年 83-106

相対射影性とコホモロジー環

愛媛大学理学部 佐々木 洋城 (Sasaki, Hiroki)

はじめに

「20 世紀の総括と展望」! 何とすばらしいシンポジウムの題名だろう. 数理研のホームページでこのシンポジウムの計画を知ったときの感想です. 同時に, ここで講演する人たちの顔触れを想像して, とても楽しみに思ったのでした. ところが, 秋の学会で代表者の吉荒氏から, 講演をせよとの依頼を聞いて, びっくり仰天でした. シンポジウムまであと 2ヶ月あまり, 総括と展望などということはとてもお話できるわけありません. (もっとも, それは期間がいくらあってもできるわけはありませんが) 20 世紀から 21 世紀への橋渡のためには, この 10 年ほどの, Benson, Carlson, そして, Rickard らによる無限生成加群がからむ理論をとりあげないわけにはいきません. その話をするには, 私にはとても力が足りません.

しかし, せっかくのお話ですし, 90 年に筑波大学で行われた多元環の表現論国際シンポジウムにおいて Carlson が提出した加群の index に関する問題に奥山さんとの共同で前進がみられ, その仕事の中で, 私が関わってきたコホモロジー環の計算で重要だった相対射影性も若干関係があるので, 報告させていただきたいという気持もありました. そこで, 吉荒さんのご希望からはずれるけれども, 講演をお願いした次第です. その機会を与えてくださったことを改めて心から感謝いたします.

以下, k は標数 $p>0$ の体を表わし, G は位数が p で割れる有限群とする. 以下の議論ではいくつかの事実は無限次元の kG- 加群にもあてはまるし, この講演で紹介した Carlson–Peng–Wheeler [13] では, 実際, 有限次元に限定していないのであるが, ここでは, やはり, 考える kG- 加群は特に断らない限り, 有限生成であると仮定する. 有限生成右 kG- 加群のなす category を $\mathrm{mod}(kG)$ で表わす. また, kG- 加群 M, N に対して

$$(M,N) = \mathrm{Hom}_k(M,N)$$
$$(M,N)_G = \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$$

とおく. stable catgory を $\underline{\mathrm{mod}}(kG)$ と表わし, kG- 加群 M, N に対して $\underline{\mathrm{mod}}(kG)$ における射集合を $\underline{(M,N)}_G$ と表わす.

1 コホモロジー環

定義 1.1 射影的 kG- 加群の完全系列

$$\mathbf{P}: \cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0$$

が $P_0/\mathrm{im}\,\varphi_1 \simeq M$ をみたすとき

$$\mathbf{P} \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

を M の射影分解という. 特に各 n に対して

$$0 \longrightarrow \ker\varphi_n \longrightarrow P_n \longrightarrow \mathrm{im}\,\varphi_n \longrightarrow 0$$

が射影被覆であるとき, $\mathbf{P} \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$ を M の極小射影分解という. これは複体の同型を除いて一意的である.

定義 1.2 M の射影分解

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

に $(-, N)_G$ を施して cochain 複体

$$0 \longrightarrow (M, N)_G \xrightarrow{\varphi_0^*} (P_0, N)_G \xrightarrow{\varphi_1^*} (P_1, N)_G \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow (P_{n-1}, N)_G \xrightarrow{\varphi_n^*} (P_n, N)_G \xrightarrow{\varphi_{n+1}^*} (P_{n+1}, N)_G \longrightarrow \cdots$$

が得られる．この cohomology 群を Ext 群という：

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N) = \ker \varphi_{n+1}^* / \mathrm{im}\, \varphi_n^*.$$

$n = 0$ に対しては

$$\mathrm{Ext}_{kG}^0(M, N) = (M, N)_G$$

である．$\mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N)$ は M の射影分解のとり方によらずに一意的に定まる．M が射影的ならば $\mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N) = 0,\ \ n \geq 1.$

$$\mathrm{Ext}_{kG}^*(M, N) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N)$$

とおく．

M の射影分解において $K_{n+1} = \ker \varphi_n$ とおけば

補題 1.1 kG- 加群 M は射影的でないとする．$n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N) \simeq \underline{(K_n, N)}_G \simeq \underline{(\Omega^n M, N)}_G.$$

$\alpha \in \mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N)$ を表わす cocycle を $\widehat{\alpha} : \Omega^n M \longrightarrow N$ で表わす．

定義 1.3 kG- 加群 M に対して

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(k, M) = H^n(G, M),$$

$$H^*(G, M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G, M)$$

を G の M を係数加群とする cohomology 群とよぶ．

定義 1.4 (Yoneda 結合積) L, M, N を kG- 加群とする．積

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{kG}^n(M, N) \otimes \mathrm{Ext}_{kG}^m(L, M) &\longrightarrow \mathrm{Ext}_{kG}^{m+n}(L, N) \\ \beta \otimes \alpha \qquad &\longmapsto \ \ \beta\alpha = [\widehat{\beta} \circ \Omega^n \widehat{\alpha} : \Omega^{m+n} L \longrightarrow N] \end{aligned}$$

を Yoneda の結合積とよぶ．結合積は bilinear, associative である．特に $\mathrm{Ext}_{kG}^*(L, L)$ は graded algebra になり，$\mathrm{Ext}_{kG}^*(L, M)$ は $\mathrm{Ext}_{kG}^*(M, M)$-$\mathrm{Ext}_{kG}^*(L, L)$ 両側加群である．

定理 1.2 (i) $\mathrm{Ext}_{kG}^*(k, k) (= H^*(G, k))$ は Neotherian である．
(ii) Krull-dim $H^*(G, k) = G$ の p-rank.
(iii) kG- 加群 M, N に対して $\mathrm{Ext}_{kG}^*(M, N)$ は有限生成な $H^*(G, k)$- 加群である．

以下，体 k は代数的閉体であると仮定する．

$$H(G)=\begin{cases}\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G,k) & p=2\\ \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{2n}(G,k) & p>2\end{cases}$$

とおく. M を kG- 加群とする. 写像

$$\Phi_M : H(G,k) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M),$$
$$\zeta=[\widehat{\zeta}] \longmapsto [\widehat{\zeta}\otimes 1_M]$$

の核 $\mathfrak{a}_G M=\ker \Phi_M$ は homogeneous イデアルである. さらに

$$X_G(M)=\{\mathfrak{m}\subset H(G)\mid \mathfrak{m}\text{ は }\mathfrak{a}_G M\text{ を含む極大イデアル}\}$$

とおく. 特に

$$X_G(k)=X_G=\{\mathfrak{m}\subset H(G)\mid \mathfrak{m}\text{ は極大イデアル}\}$$

である.

定理 1.3 (i) M が射影的であるためには $X_G(M)=\{H^+(G)\}$ であることが必要十分である. ここで $H^+(G)$ は正の斉次元の和のなすイデアルで, variety $X_G(k)$ の中では 0 で表される)
(ii) M が周期的であるためには $\dim X_G(M)=1$ であることが必要十分である.

定理 1.4 kG- 加群 M, N について

$$X_G(M\otimes N)=X_G(M)\cap X_G(N).$$

定義 1.6 M, N を kG- 加群とする. 元 $\rho\in \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)$ をとる. $\rho\neq 0$ ならば, ρ は準同型 $\widehat{\rho}$: $\Omega^r M \longrightarrow N$ で表される. このとき, ある射影的 kG- 加群 P, Q および kG- 加群 L, L' を適当にとって, 完全系列

$$0\longrightarrow \Omega^r M \xrightarrow{\widehat{\rho}''} N\oplus Q \xrightarrow{\beta} L' \longrightarrow 0,\quad 0\longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} \Omega^r M\oplus P \xrightarrow{\widehat{\rho}'} N \longrightarrow 0$$

で

$$\mathrm{pr}_N\circ\widehat{\rho}'' \equiv \widehat{\rho}'|_{\Omega^r M} \equiv \widehat{\rho}\quad (\mathrm{mod}\ \text{射影的準同型})$$
$$L\simeq \Omega L'\oplus (\text{射影的加群})$$

を満たすものを構成できる. しかも, このような準同型 α, β および kG- 加群 L, L' は射影的準同型および射影的加群を法として一意的である. そこで, 上のように, 射影的 kG- 加群 P および kG- 加群 L を選び, $\Omega^0 L=\Omega L'$ を L_ρ と定義する. 加群 L_ρ は $\rho\in\mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)$ により一意的に定められる. L の射影的直和因子を完全系列から取り除けば, (記号をつけ直して) 完全系列

$$0\longrightarrow \Omega^r M \xrightarrow{\widehat{\rho}''} N\oplus Q \longrightarrow \Omega^{-1}L_\rho \longrightarrow 0,$$
$$0\longrightarrow L_\rho \longrightarrow \Omega^r M\oplus P \xrightarrow{\widehat{\rho}'} N \longrightarrow 0,$$
$$\Omega^0 L_\rho = L_\rho,\quad \mathrm{pr}_N\circ\widehat{\rho}'' \equiv \widehat{\rho}'|_{\Omega^r M} \equiv \widehat{\rho}\quad (\mathrm{mod}\ \text{射影的準同型})$$

が得られる.

stable category の言葉を使えば, stable category における射 ρ : $\Omega^r M \longrightarrow N$ は distinguished triangle

$$\Omega^r M \xrightarrow{\ \rho\ } N \xrightarrow{\ \beta\ } L' \xrightarrow{\Omega^{-1}\alpha} \Omega^{r-1}M$$

に埋め込まれる. $\Omega L'$ が L_ρ である.

$\rho = 0$ のとき, stable category における射 $0 : \Omega^r M \longrightarrow N$ は triangle

$$\Omega^r M \xrightarrow{0} N \xrightarrow{\beta} L' \xrightarrow{\Omega^{-1}\alpha} \Omega^{r-1} M$$

に埋め込まれる. この triangle を translate して, triangle

$$N \xrightarrow{\beta} L' \xrightarrow{\Omega^{-1}\alpha} \Omega^{r-1} M \xrightarrow{0} \Omega^{-1} N$$

を得る. Carlson [11] Corollary 5.9 により,

$$N \oplus \Omega^{r-1} M \simeq L' \oplus (\text{射影加群})$$

である. よって, $\Omega L' \simeq \Omega N \oplus \Omega^r M$ を L_ρ と定義する.

このように定義すると, 部分群 H について

$$L_{\rho|H} \simeq L_{\mathrm{res}_H \rho} \oplus (\text{射影加群})$$

が成り立つ.

加群 L_ρ を $\rho \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N)$ の Carlson 加群とよぶ.

M の射影分解を

$$\cdots \longrightarrow P_r M \longrightarrow P_{r-1} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

とおく. 準同型 $\widehat{\rho}' : \Omega^r M \oplus P \longrightarrow N$ と $0 \longrightarrow \Omega^r M \oplus P \longrightarrow P_{r-1} M \oplus P$ との pushout

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L_\rho \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_\rho \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^r M \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\rho}'"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & P_{r-1} M \oplus P \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{r-1} M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1} L_\rho \oplus P' \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{r-1} M \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

をつくれば, 拡大

$$\mathrm{E}_\rho : 0 \longrightarrow N \longrightarrow \Omega^{-1} L_\rho \oplus P' \longrightarrow \Omega^{r-1} M \longrightarrow 0$$

が得られる. この拡大は $\widehat{\rho} : \Omega^r M \longrightarrow N$ と入射包絡 $0 \longrightarrow \Omega^r M \longrightarrow P_{r-1} M$ との pushout

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^r M \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\rho}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & P_{r-1} M \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{r-1} M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X \arrow[r] & \Omega^{r-1} M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

から作られる拡大

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow \Omega^{r-1} M \longrightarrow 0$$

と同値である. 特に, $\rho \in H^r(G,k)$ に対しては拡大

$$\mathrm{E}_\rho : 0 \longrightarrow k \longrightarrow \Omega^{-1}L_\rho \longrightarrow \Omega^{r-1}k \longrightarrow 0$$

が得られる. $\rho \in H^r(G,k)$ の Carlson 加群 L_ρ の重要性のひとつは次の定理にある.

定理 1.5 $\rho \in H^r(G,k)$ に対して $\sqrt{\mathfrak{a}_G L_\rho} = \sqrt{\rho}$, すなわち, $X_G(L_\rho) = X_G(\rho)$ が成り立つ.

2 parameter 系

定義 2.1 $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ を cohomology 環 $H^*(G,k)$ の homegeneous な元の集合とする. $H^*(G,k)$ が $k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]$ 上有限生成であるとき, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ を $H^*(G,k)$ の parameter 系という. これは tensor 積 $L_{\zeta_1} \otimes \cdots \otimes L_{\zeta_r}$ が射影的であることと同値である.

定理 2.1 (Carlson [8] Theorem A, 1985) S を G の Sylow$p$- 部分群とする.

$$J = \sum_{H<G,\, p \mid |G:H|} \mathrm{tr}_H^G(H^*(H,k))$$

とおくと

$$\sqrt{J} = \sqrt{\ker[\mathrm{res}_{Z(S)} : H^*(G,k) \longrightarrow H^*(Z(S),k)]}.$$

Benson [6], 1992, は, ここでは述べないが, 上の定理を精密にした. さらに, Carlson は Benson の議論を用いて, ある条件をみたす parameter 系が存在することを示した. 定理を述べるために記号を用意する. G の p-rank は r であるとする. $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$\mathscr{A}_i(G) = \{E < G \mid E \text{ は rank } i \text{ の基本可換 } p\text{- 群}\}$$

とおき.

$$\mathscr{H}_i(G) = \{C_G(E) \mid E \in \mathscr{A}_i(G)\}$$

とおく. このとき

定理 2.2 (Carlson [10] Proposition 2.4, 1993) G の p-rank は r であるとき, $H^*(G,k)$ の homogeneous な parameter 系 $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ で次の条件をみたすものが存在する: 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$\zeta_i \in \sum_{H \in \mathscr{H}_i(G)} \mathrm{tr}_H^G(H^*(H,k)).$$

命題 2.3 (Okuyama–Sasaki [18] Corollary 3.2, 1998) $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ が上の条件をみたす homogeneous な parameter 系のとき, tensor 積 $L_{\zeta_1} \otimes \cdots \otimes L_{\zeta_{r-1}}$ は $\mathscr{H}_r(G)$ 射影的である.

これは次の事実から得られる.

補題 2.4 (Okuyama–Sasaki [18] Lemma 2.2) $\mathscr{H}$ を G の部分群の集合とし, M を kG- 加群とする. homogeneous な $\zeta \in H^*(G,k)$ がイデアル $\sum_{H \in \mathscr{H}} \mathrm{tr}_H^G(H^*(H,k))$ に属し, $X_G(M) \cap X_G(\zeta) = \{0\}$ (これは M と ζ の Carlson 加群 L_ζ の tensor 積 $M \otimes L_\zeta$ が射影的であることと同値) ならば, M は $\mathscr{H}$- 射影的である.

注意 2.1 (i) 命題 2.3 は特に $r = 2$ のとき, L_{ζ_1} の直和分解に関するよい情報を与えてくれる. これが [18] における考察の基礎である.

(ii) 補題 2.4 は第 4 節で述べるように, Carlson–Peng–Wheeler [13] で一般化されていたが, 我々は知らなかった.

3 相対射影性

有限群の表現論において部分群に関する相対射影性は基礎を構成する重要な理論である. Knörr [15] はさらに, 部分群に関する相対射影被覆の概念を定義した. これは長いあいだあまり使われてこなかったが, 淺井氏はこの理論を極めて有効に用いて, Sylow 2- 部分群が 2 面体群である有限群の mod 2 コホモロジー群の次元公式を得た. 論文 Asai [1] (received 1990) の序文の最初の部分を引用しよう:

> It has long been known that modules over modular group algebras have relatively projective covers [7]. However only in rare instances has this fact been used effectively. In this paper the relatively projective covers are used to obtain a formula for the dimensions of cohomology groups.

この論文は相対射影性とコホモロジー論とを強く結び付けた最初の論文として, 記念碑的な意味を持つと思う. 淺井氏と筆者は [2] (received 1992) で, さらに考察を進めて, Sylow 2- 部分群が 2 面体群である有限群の mod 2 コホモロジー環の構造を決定した.

奥山氏は毎年草津で行われている「楽しい有限群の集い」(「有限群サマーセミナー」とも呼ばれている) の第 2 回 (1990) において, 加群に関する相対射影性の概念を提出した ([16]). 置換加群 k_H^G, ここで, G は有限群, H は G の部分群, に関する相対射影性は部分群 H に関する相対射影性と一致する. そこでは準 2 面体群の mod 2 コホモロジー環において, 今日, Carlson らによって productive と名付けられた性質をもつ元が存在することを指摘している. 筆者はその元を用いて, Sylow 2- 部分群が準 2 面体群である有限群の mod 2 コホモロジー環の構造を決定した ([21], received 1993). 筆者がこの原稿を Carlson に送ったことから Carlson らの加群に関する相対射影性の理論の研究が始まった (Carlson–Peng [12], received 1995). 奥山氏と筆者はさらに, Sylow 2- 部分群が wreathed 2- 群である有限群の mod 2 コホモロジー環の研究に取り組み, その構造を決定できたが, それとともにそれまでの相対射影性の理論を整理して, 論文 Okuyama–Sasaki [18] (received 1998) にまとめた.

Carlson–Peng–Wheeler [13] (received 1997) はコホモロジー群における部分群からの transfer 写像を一般化して, 加群によって定義される transfer 写像を定義した. 置換加群 k_H^G によって定義される transfer 写像の像は部分群 H からの transfer 写像の像に一致する.

以下では, Carlson–Peng–Wheeler [13] に基本的には基づきながら, 加群に関する相対射影性と transfer 写像の基本的事項を整理したいと思う. Carlson–Peng–Wheeler を C–P–W と略記する.

3.1 Tensor 積と dulality

kG- 加群 W, V に対して (W, V) と tensor 積 $W^* \otimes V$ は次によって kG- 加群として同型である:

$$\begin{aligned} W^* \otimes V &\longrightarrow (W, V) \\ \xi \otimes v &\longmapsto f : w \longmapsto \xi(w)v. \end{aligned}$$

この逆写像は次のように与えられる. W の基底をひとつとり, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ とおく. その双対基底を $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} (W, V) &\longrightarrow W^* \otimes V \\ f &\longmapsto \sum_i w_i^* \otimes f(w_i). \end{aligned}$$

定義 3.1 (C–P–W [13]) kG- 加群 $M, N,$ および W に対して上の同型によって

$$\begin{aligned}(M \otimes W, N) &\simeq (M \otimes W)^* \otimes N \\ &\simeq (M^* \otimes W^*) \otimes N \\ &\simeq M^* \otimes (W^* \otimes N) \\ &\simeq (M, W^* \otimes N)\end{aligned}$$

を得る. これを

$$\theta_W : (M \otimes W, N)_G \longrightarrow (M, N \otimes W^*)_G$$

と定義する. 具体的に書き下す. W の基底をひとつとり, それを $\{w_1, \ldots, w_n\}$ とする. その双対基底を $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ とおく. 線型写像 $f : M \otimes W \longrightarrow N$ に対し

$$\begin{aligned}\theta_W f : M &\longrightarrow N \otimes W^* \\ a &\longmapsto \sum_{i=1}^n f(a \otimes w_i) \otimes w_i^*, \ a \in M.\end{aligned}$$

線型写像 $g : M \longrightarrow N \otimes W^*$ の θ_W による逆像

$$\theta_W^{-1} g : M \otimes W \longrightarrow N$$

は $a \in M$ の g の像を

$$g(a) = \sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i^*, \ b_i \in N$$

とおけば

$$\theta_W^{-1} g(a \otimes w) = \sum_{i=1}^n w_i^*(w) b_i$$

で与えられる.

補題 3.1 (C–P–W [13]) L, M, N, U および W を kG- 加群とし, $f : L \longrightarrow M, g : N \longrightarrow U$ を kG- 準同型とする. 次は可換である:

(i)

$$\begin{tikzcd}(M \otimes W, N)_G \arrow[r, "(f\otimes 1_W)^*"] \arrow[d, "\theta_W"'] & (L \otimes W, N)_G \arrow[d, "\theta_W"] \\ (M, N \otimes W^*)_G \arrow[r, "f^*"'] & (L, N \otimes W^*)\end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd}(M \otimes W, N)_G \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\theta_W"'] & (M \otimes W, U)_G \arrow[d, "\theta_W"] \\ (M, N \otimes W^*)_G \arrow[r, "(g\otimes 1_{W^*})_*"'] & (M, U \otimes W^*)_G\end{tikzcd}$$

以下で transfer 写像を定義するのであるが, その性質の多くは上の naturality に基づいている.

3.2 Transfer 写像と restriction 写像

定義 3.2 W を kG- 加群とする. evaluation 写像 α_W を

$$\alpha_W : W^* \otimes W \longrightarrow k; \xi \otimes w \longmapsto \xi(w)$$

と定義する. また, 単射 $k \longrightarrow (W, W); \lambda \longmapsto \lambda 1_W$ と同型 $(W, W) \simeq W \otimes W^*$ との合成を σ_W と定義する. W の基底をひとつとり, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ とおく. その双対基底を $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ とおく. このとき,

$$\sigma_W : k \longrightarrow W \otimes W^*; 1 \longrightarrow \sum_i w_i \otimes w_i^*.$$

これらはいずれも kG- 準同型である.

注意 3.1 $\sigma_W : k \longrightarrow W \otimes W^*$ は写像 α_W の双対

$$\alpha_W{}^* : k \longrightarrow (W^* \otimes W)^* \simeq W \otimes W^*$$

と一致する.

定義 3.3 (C–P–W [13]) M, N および W を kG- 加群とする. 次は可換である:

$$\begin{CD}
(M \otimes W, N \otimes W)_G @>{\theta_W}>> (M, N \otimes W \otimes W^*)_G \\
@V{\theta_{W^*}^{-1}}VV @VV{(1_N \otimes \alpha_W)_*}V \\
(M \otimes W \otimes W^*, N)_G @>>{(1_M \otimes \sigma_W)^*}> (M, N)_G
\end{CD}$$

同型 $\theta_W : (M \otimes W, N \otimes W)_G \longrightarrow (M, N \otimes W \otimes W^*)_G$ と $(1_N \otimes \alpha_W)_* : (M, N \otimes W \otimes W^*)_G \longrightarrow (M, N)_G$ との合成を Tr^W と定義する:

$$\mathrm{Tr}^W : (M \otimes W, N \otimes W)_G \longrightarrow (M, N)_G; f \longmapsto (1_N \otimes \alpha_W) \circ \theta_W f.$$

具体的に書き下す. $\{w_1, \ldots, w_n\}$ を W の基底とし, その双対基底を $\{w_1^*, \ldots, w_n^*\}$ とおく. このとき, $f : M \otimes W \longrightarrow N \otimes W$ に対して $a \otimes w_j$ の f による像を

$$f(a \otimes w_j) = \sum_i b_{ij} \otimes w_i,\ a \in M, b_{ij} \in N$$

と表せば

$$\mathrm{Tr}^W f : a \longrightarrow \sum_i b_{ii}.$$

写像 Tr^W は射影的写像を射影的写像にうつし, cohomology 群の準同型をひきおこす:

$$\mathrm{Tr}^W : \mathrm{Ext}_{kG}^r(M \otimes W, N \otimes W) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{kG}^r(M, N).$$

写像 Tr^W を transfer 写像とよぶ.

補題 3.2 $W = W_1 \oplus W_2$ を kG- 加群の直和とする. kG- 加群 M, N に対して

$$\begin{tikzcd}
M \otimes W_j \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\iota_j"'] & & M \otimes W_j \\
& M \otimes W \arrow[ur, "\pi_j"'] &
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
N \otimes W_j \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\iota'_j"'] & & N \otimes W_j \\
& N \otimes W \arrow[ur, "\pi'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

とおく. このとき

$$\mathrm{Ext}^n_{kG}(M \otimes W, N \otimes W) \simeq \bigoplus_{l,j=1}^{2} \mathrm{Ext}^n_{kG}(M \otimes W_l, N \otimes W_j)$$

$$\alpha \leftrightarrow (\alpha_{lj}),\ \alpha_{lj} = \pi'_{l*}\iota^*_j(\alpha) \in \mathrm{Ext}^n_{kG}(M \otimes W_j, M \otimes W_l).$$

この対応のもとで

$$\mathrm{Tr}^W(\alpha) = \mathrm{Tr}^{W_1}(\alpha_{11}) + \mathrm{Tr}^{W_2}(\alpha_{22}).$$

補題 3.3 $f : L \longrightarrow M, g : N \longrightarrow U$ を kG- 加群の準同型とする. 次は可換である:

(i)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(L, N) \\
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, N \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{Tr}^W"] \arrow[r, "(f\otimes 1_W)^*"'] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(L \otimes W, N \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{Tr}^W"']
\end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M, U) \\
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, N \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{Tr}^W"] \arrow[r, "(g\otimes 1_W)_*"'] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, U \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{Tr}^W"']
\end{tikzcd}$$

定義 3.4 $M,\ N$ および W を kG- 加群とする. kG- 準同型 $f : M \longrightarrow N$ に対し $f \otimes 1_W : M \otimes W \longrightarrow N \otimes W$ を対応させる写像を Res_W と表す:

$$\mathrm{Res}_W : (M, N)_G \longrightarrow (M \otimes W, N \otimes W);$$
$$f \longmapsto f \otimes 1_W.$$

写像 Res_W は射影的写像を射影的写像にうつし, cohomology 群の準同型をひきおこす:

$$\mathrm{Res}_W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, N \otimes W).$$

Res_W を restriction 写像とよぶ.

注意 3.2 上の写像を restriction 写像と呼ぶのは筆者だけかも知れない. また, transfer 写像 Tr^W は C–P–W では "Tr_W" と記されている. 筆者が上の写像を restriction 写像と呼び, transfer 写像を Tr^W と記す理由は補題 3.6, 補題 3.7, および, 補題 3.16 である.

補題 3.4 $f : L \longrightarrow M, g : N \longrightarrow U$ を kG- 加群の準同型とする. 次は可換である:

(i)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_W"'] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(L, N) \arrow[d, "\mathrm{Res}_W"] \\
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, N \otimes W) \arrow[r, "(f\otimes 1_W)^*"'] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(L \otimes W, N \otimes W)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) & \xrightarrow{g_*} & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,U) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_W} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_W} \\ \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W) & \xrightarrow[(g\otimes 1_W)_*]{} & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, U\otimes W) \end{array}$$

補題 3.5 (推移律) M, N, W および X を kG- 加群とする.

(i) **(C–P–W [13] Proposition 3.3)** transfer 写像 $\mathrm{Tr}^X : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W\otimes X, N\otimes W\otimes X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W)$ および $\mathrm{Tr}^W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)$ について

$$\mathrm{Tr}^W \circ \mathrm{Tr}^X = \mathrm{Tr}^{W\otimes X}.$$

(ii) restriction 写像 $\mathrm{Res}_W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W)$ および $\mathrm{Res}_X : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W\otimes X, N\otimes W\otimes X)$ について

$$\mathrm{Res}_W \circ \mathrm{Res}_X = \mathrm{Res}_{W\otimes X}.$$

(iii) transfer 写像 $\mathrm{Tr}^W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)$ および restriction 写像 $\mathrm{Res}_W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W)$ について

$$\mathrm{Tr}^W \circ \mathrm{Res}_W = \dim W \cdot 1_{\mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)}.$$

補題 3.6 (Frobenius の相互律) L, M, N, U および W を kG- 加群とする. $\eta \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(L,M)$, $\zeta \in \mathrm{Ext}^s_{kG}(M\otimes W, N\otimes W)$, $\xi \in \mathrm{Ext}^t_{kG}(N,U)$ に対して

$$\mathrm{Tr}^W(\zeta\, \mathrm{Res}_W\, \eta) = \mathrm{Tr}^W \zeta\cdot\eta,$$
$$\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Res}_W\, \xi\cdot\zeta) = \xi\, \mathrm{Tr}^W \zeta.$$

補題 3.7 (Mackey 公式) kG- 加群 M, N, W および X に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}^W} & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_X} \\ \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W\otimes X, N\otimes W\otimes X) & \xrightarrow[\mathrm{Tr}^W]{} & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes X, N\otimes X) \end{array}$$

系 3.8 L, M, N, W および X を kG- 加群とする. $\zeta \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W, N\otimes W)$ および $\eta \in \mathrm{Ext}^s_{kG}(L\otimes X, M\otimes X)$ に対して

$$\mathrm{Tr}^{W\otimes X}(\mathrm{Res}_X\, \zeta\cdot \mathrm{Res}_W\, \eta) = \mathrm{Tr}^W \zeta\cdot \mathrm{Tr}^X \eta.$$

系 3.9 (C–P–W [13] Proposition 3.4) W および X を kG- 加群とする. $\zeta \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(W,W)$ および $\eta \in \mathrm{Ext}^s_{kG}(X,X)$ に対して

$$\mathrm{Tr}^{W\otimes X}(\zeta \cup \eta) = \mathrm{Tr}^W \zeta\cdot \mathrm{Tr}^X \eta.$$

注意 3.3 $\mathrm{Tr}^W \zeta$ を ζ^W, $\mathrm{Res}_W\, \eta$ を η_W などと表せば, 例えば Frobenius の相互律は次のように表される:

$$(\zeta\cdot\eta_W)^W = \zeta^W\cdot\eta,$$
$$(\xi_W\cdot\zeta)^W = \xi\cdot\zeta^W.$$

補題 3.6（Frobenius の相互律）により

命題 3.10 (C–P–W [13] Proposition 4.1) kG- 加群 M, N および W について

$$\mathfrak{a}_G W \cdot \mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}^*_{kG}(M \otimes W, N \otimes W)) = 0.$$

定義 3.5 $\rho \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ について

$$\rho \in \mathfrak{a}_G(L_\rho)$$

のとき, ρ は productive であるという.

$\rho \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ が productive ならば, 命題 3.10により, ρ は $\mathrm{Tr}^{L_\rho}(\mathrm{Ext}^*_{kG}(M \otimes L_\rho, N \otimes L_\rho))$ を零化する:

$$\rho \cdot \mathrm{Tr}^{L_\rho}(\mathrm{Ext}^*_{kG}(M \otimes L_\rho, N \otimes L_\rho)) = 0.$$

補題 3.11 (i) $p > 2$ ならば任意の $\rho \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ は productive である.
(ii) 任意の $\rho \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ について $\rho^2 \in \mathfrak{a}_G(L_\rho)$.

また, 命題 3.10 により, $\rho \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ が regular ならば

$$\mathrm{Tr}^{L_\rho}(\mathrm{Ext}^*_{kG}(L_\rho, L_\rho)) = 0$$

であるが, 実はこの逆も成り立つ.

補題 3.12 $\rho \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$ が regular であるためには

$$\mathrm{Tr}^{L_\rho}(\mathrm{Ext}^*_{kG}(L_\rho, L_\rho)) = 0$$

であることが必要十分である.

これが成り立つのは次の定理による.

定理 3.13 (Sasaki [22]) $M, N,$ および U を kG- 加群とする. $\rho \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)$ と $\varphi \in \mathrm{Ext}^n_{kG}(N,U)$ について, $\varphi\rho = 0$ ($r = n = 0$ のときは $\varphi\rho =$ 射影的) ならば,

$$\varphi \in \mathrm{im}\,[\mathrm{Tr}^{L_\rho} : \mathrm{Ext}^n_{kG}(N \otimes L_\rho, U \otimes L_\rho) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{kG}(N,U)];$$
$$\rho \in \mathrm{im}\,[\mathrm{Tr}^{L_\varphi} : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes L_\varphi, N \otimes L_\varphi) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)].$$

系 3.14 M, N を kG- 加群とする. $\rho \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(k,k)$ と $\varphi \in \mathrm{Ext}^n_{kG}(M,N)$ について, $\varphi\rho = 0$ ならば, φ は $\mathrm{Tr}^{L_\rho} : \mathrm{Ext}^n_{kG}(M \otimes L_\rho, N \otimes L_\rho) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{kG}(M,N)$ の像である.

系 3.15 M, N を kG- 加群とする. $\varphi \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N)$ が斉次元 $\rho_1, \ldots, \rho_t \in \mathrm{Ext}^+_{kG}(k,k)$ で零化されれば, $L = L_{\rho_1} \otimes \cdots \otimes L_{\rho_t}$ とおくと, φ^t は $\mathrm{Tr}^L : \mathrm{Ext}^{rt}_{kG}(M \otimes L, N \otimes L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{rt}_{kG}(M,N)$ の像である.

3.3 部分群と transfer 写像, restriction 写像

ここでは, 加群によって定義される transfer 写像や restriction 写像と通常の部分群からの transfer 写像や部分群への restriction 写像との関係を述べる. H を G の部分群とする. $\{t_1 = 1, t_2, \ldots, t_n\}$ を $H\backslash G = \{ Hg \mid g \in G \}$ の完全代表系とする.

V を kG- 加群, W を kH- 加群とする. $(V, W^G)_G$ と $(V_H, W)_H$ は次によって同型である:

$$(V, W^G)_G \longrightarrow (V_H, W)_H$$
$$f \longmapsto f' : a \longmapsto w_1,\ a \in V$$

ここで, $f(a)=\sum_i w_i \otimes t_i$. この逆写像は次によって与えられる:

$$\begin{aligned}(V_H, W)_H &\longrightarrow (V, W^G)_G \\ g &\longmapsto \widehat{g} : a \longmapsto \sum_i g(at_i^{-1}) \otimes t_i,\ a \in V.\end{aligned}$$

さて, M, N を kH- 加群として, 上の同型を $V = M \otimes k_H^G$, $W = N$ とし, 同型

$$N^G \simeq N \otimes k_H^G ; a \otimes t_i \longmapsto at_i \otimes 1 \otimes t_i$$

を用いて書き表してみる.

$$\begin{aligned}\Psi : (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G &\longrightarrow (M \otimes k_H^G{}_H, N)_H \\ f &\longmapsto f' : \sum_i a_i \otimes 1 \otimes t_i \longmapsto b_{11},\ a \in M\end{aligned}$$

ここで,

$$f(a_i \otimes 1 \otimes t_i) = \sum_l b_{li} \otimes 1 \otimes t_l.$$

$$\begin{aligned}\Phi : (M \otimes k_H^G{}_H, N)_H &\longrightarrow (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G \\ g &\longmapsto [\widehat{g} : a \otimes 1 \otimes t_j \longmapsto \sum_i g((a \otimes 1 \otimes t_j)t_i^{-1})t_i \otimes 1 \otimes t_i,\ a \in M].\end{aligned}$$

定義 3.6 (C–P–W [13]) 上の記号の下で, M と $M \otimes k_H^G$ との間の kH- 加群としての射影と入射

$$\pi_M : M \otimes k_H^G \longrightarrow M; \sum_i a_i \otimes 1 \otimes t_i \longmapsto a_1,\ a_i \in M$$

$$\iota_M : M \longrightarrow M \otimes k_H^G ; a \longmapsto a \otimes 1 \otimes 1,\ a \in M$$

を考える. これらの引き起こす線型写像 $\pi_M{}^* : (M, N)_H \longrightarrow (M \otimes k_H^G, N)_H ; f \longmapsto f \circ \pi$ および $\iota_M{}^* : (M \otimes k_H^G, N)_H \longrightarrow (M, N)_H ; g \longmapsto g \circ \iota$ と上の Φ および Ψ との合成をそれぞれ ϕ, ψ と定義する.

$$\begin{tikzcd}
(M, N)_H \arrow[d, "\pi_M{}^*"'] \arrow[dr, "\phi"] & & \\
(M \otimes k_H^G, N)_H \arrow[r, "\Phi"'] & (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & (M \otimes k_H^G, N)_H \arrow[d, "\iota_M{}^*"] \\
& & (M, N)_H
\end{tikzcd}$$

具体的には次の通り:

$$\begin{aligned}\phi : (M, N)_H &\longrightarrow (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G \\ g &\longmapsto [\widehat{g} : a \otimes 1 \otimes t_i \longmapsto g(at_i^{-1})t_i \otimes 1 \otimes t_i], \\ \psi : (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G &\longrightarrow (M, N)_H \\ f &\longmapsto [f' : a \longmapsto b_{11},\ f(a \otimes 1 \otimes t_1) = \sum_i b_{i1} \otimes 1 \otimes t_i].\end{aligned}$$

明らかに

$$\psi \circ \phi = \text{identity on } (M, N)_H .$$

注意 3.4 同型 $(W^G, V)_G \simeq (W, V_H)_H$ を用いて, 同様に写像

$$(M,N)_H \longrightarrow (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G, \quad (M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G)_G \longrightarrow (M,N)_H$$

が定義できるが, これらは上の ϕ, ψ と一致する.

補題 3.16 kG- 加群 M, N, および部分群 $H \leq G$ に対して次は可換である:

(i) **(C–P–W [13] Proposition 3.1)**

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \arrow[rr, equal] & & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \\
& \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G) \arrow[ul, "\mathrm{Tr}^{k_H^G}"'] \arrow[ur, "\mathrm{Tr}^{k_H^G}"] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N) \arrow[uu, "\mathrm{tr}_H^G"] \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr, equal] & & \mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N) \arrow[uu, "\mathrm{tr}_H^G"']
\end{tikzcd}$$

特に, $\mathrm{im}\,\mathrm{Tr}^{k_H^G} = \mathrm{im}\,\mathrm{tr}_H^G$.

(ii)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \arrow[rr, equal] \arrow[dd, "\mathrm{res}_H^G"'] \arrow[dr, "\mathrm{Res}_{k_H^G}"] & & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M,N) \arrow[dd, "\mathrm{res}_H^G"] \arrow[dl, "\mathrm{Res}_{k_H^G}"'] \\
& \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G) \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N) \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rr, equal] & & \mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N)
\end{tikzcd}$$

補題 3.17 kG- 加群 M, N, W, および部分群 $H \leq G$ に対して次は可換である:

(i)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W \otimes k_H^G, N \otimes W \otimes k_H^G) \arrow[r, "\mathrm{Tr}^W"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{Ext}^r_{kH}(M \otimes W, N \otimes W) \arrow[r, "\mathrm{Tr}^W"'] & \mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W \otimes k_H^G, N \otimes W \otimes k_H^G) \arrow[r, "\mathrm{Tr}^W"] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G) \\
\mathrm{Ext}^r_{kH}(M \otimes W, N \otimes W) \arrow[r, "\mathrm{Tr}^W"'] \arrow[u, "\phi"] & \mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N) \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes k_H^G, N \otimes k_H^G) \arrow[r, "\mathrm{Res}_W"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W \otimes k_H^G, N \otimes W \otimes k_H^G) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Res}_W"'] & \mathrm{Ext}^r_{kH}(M \otimes W, N \otimes W)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes k^G_H, N\otimes k^G_H) & \xrightarrow{\mathrm{Res}_W} & \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes W\otimes k^G_H, N\otimes W\otimes k^G_H) \\
\phi\uparrow & & \uparrow\phi \\
\mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N) & \xrightarrow[\mathrm{Res}_W]{} & \mathrm{Ext}^r_{kH}(M\otimes W, N\otimes W)
\end{array}$$

補題 3.18 L, M, N を kG- 加群とし, H を G の部分群とする. $\zeta \in \mathrm{Ext}^r_{kH}(M,N)$, $\eta \in \mathrm{Ext}^s_{kH}(L,M)$ に対して

$$\phi_H(\zeta)\phi_H(\eta) = \phi_H(\zeta\eta).$$

注意 3.5 上と双対的な次の主張は成立しない:
$\alpha \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(M\otimes k^G_H, N\otimes k^G_H)$, $\beta \in \mathrm{Ext}^s_{kG}(L\otimes k^G_H, M\otimes k^G_H)$ に対して

$$\psi_H(\alpha)\psi_H(\beta) = \psi_H(\alpha\beta).$$

注意 3.6 補題 3.6, 補題 3.7 と以上の補題から通常の Frobenius 相互律, Mackey 公式が得られる. これが補題 3.6, 補題 3.7 をそれぞれ Frobenius 相互律, Mackey 公式と呼んだ理由である.

3.4 相対射影加群

定義 3.7 W を kG- 加群とする.

(i) kG- 加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

について, これと W との tensor 積

$$0 \longrightarrow L\otimes W \longrightarrow M\otimes W \longrightarrow N\otimes W \longrightarrow 0$$

が分裂するとき, 上の短完全系列は W- 分裂であるという.

(ii) 単型 $f : L \longrightarrow M$ は短完全系列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \longrightarrow \mathrm{coker}\, f \longrightarrow 0$$

が W- 分裂であるとき, W- 分裂であるという.

(iii) 全型 $g : M \longrightarrow N$ は短完全系列

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

が W- 分裂であるとき, W- 分裂であるという.

定義 3.8 W, U, V を kG- 加群とする.

(i) 任意の W- 分裂な全型 $f : M \longrightarrow N$ と任意の kG- 準同型 $g : U \longrightarrow N$ に対して kG- 準同型 $h : U \longrightarrow M$ で $fh = g$ を満たすものが存在するとき, kG- 加群 U を W- 射影的という:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (W\text{- 分裂})$$

(ii) 任意の W- 分裂な単型 $f : M \longrightarrow N$ と任意の kG- 準同型 $g : M \longrightarrow V$ に対して kG- 準同型 $h : N \longrightarrow V$ で $hf = g$ を満たすものが存在するとき, kG- 加群 V を W- 入射的という:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dotted, "\exists h"] & (W\text{- 分裂}) \\ & V & & \end{tikzcd}$$

補題 3.19 (Auslander–Carlson [3] Proposition 4.8) W を kG- 加群とする.

(i) evaluation 写像 $\alpha_W : W \otimes W^* \longrightarrow k$ は W- 分裂である.
(ii) 写像 $\sigma_W : k \longrightarrow W \otimes W^*$ は W- 分裂である.

系 3.20 W と M を kG- 加群とする.

(i) $\alpha_W \otimes 1_M : W \otimes W^* \otimes M \longrightarrow M$ は W- 分裂な全型である.
(ii) $\sigma_W \otimes 1_M : M \longrightarrow W \otimes W^* \otimes M$ は W- 分裂な単型である.

補題 3.21 kG- 加群の短完全系列 $\mathrm{E} : 0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ が W- 分裂ならば, W の任意の直和因子 X に対して, E は X- 分裂である.

命題 3.22 W を kG- 加群とする. 単型, 全型, 短完全系列が W- 分裂であることと W^*- 分裂であることとは同値である.

kG- 加群 U が W- 射影的であるとき, $\alpha_W \otimes 1_U : W \otimes W^* \otimes U \longrightarrow U$ は分裂する:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, equal] & & \\ W \otimes W^* \otimes U \arrow[r, "\alpha_W \otimes 1_U"'] & U \arrow[r] & 0 & (W\text{- 分裂}) \end{tikzcd}$$

準同型 $\gamma : U \otimes W \longrightarrow U \otimes W$ を同型 $\theta_W : (U \otimes W, U \otimes W)_G \xrightarrow{\sim} (U, W^* \otimes W \otimes U)_G$ を用いて

$$\gamma = \theta_W{}^{-1} h$$

によって定義すれば, transfer 写像の定義により

$$\mathrm{Tr}^W \gamma = 1_U$$

を得る. さらに

命題 3.23 (C–P–W [13]) W と U を kG- 加群とする. 次は同値である.

(i) U は W- 射影的である;
(ii) $U \mid W \otimes W^* \otimes U$;
(iii) ある kG- 加群 N に対して $U \mid W \otimes N$.
(iv) U は W- 入射的である;
(v) ある kG- 準同型 $\gamma : U \otimes W \longrightarrow U \otimes W$ に対して $1_U = \mathrm{Tr}^W \gamma$.

定義 3.9 kG- 加群 W について, W- 射影的な kG- 加群のなす full subcategory を $\mathscr{P}(W)$ で表す.

補題 3.24 U, V, および W を kG- 加群とする.

(i) $V \in \mathscr{P}(W) \Longrightarrow \mathscr{P}(V) \subset \mathscr{P}(W)$.
(ii) $V \in \mathscr{P}(W) \Longleftrightarrow V^* \in \mathscr{P}(W)$, 特に, $\mathscr{P}(W) = \mathscr{P}(W^*)$.
(iii) $U \in \mathscr{P}(W)$ かつ $V \in \mathscr{P}(W) \Longleftrightarrow U \oplus V \in \mathscr{P}(W)$.

(iv) $U \in \mathscr{P}(W) \Longrightarrow U \otimes V \in \mathscr{P}(W)$.
(v) $V \in \mathscr{P}(W) \Longleftrightarrow \Omega V \in \mathscr{P}(W)$, 特に, 任意の $n \in \mathbf{Z}$ について $\mathscr{P}(\Omega^n W) = \mathscr{P}(W)$.
(vi) $p \nmid \dim W \Longrightarrow \mathscr{P}(W) = \mathrm{mod}(kG)$.
(vii) 任意の射影的 kG- 加群は W- 射影的である. もし W が射影的ならば W- 射影的加群は射影的加群である.
(viii) $U \in \mathscr{P}(V)$ かつ $U \in \mathscr{P}(W) \Longleftrightarrow U \in \mathscr{P}(V \otimes W)$.

上の (vi) は補題 3.5 (iii) による.

補題 3.25 W を kG- 加群とする. kG- 加群の拡大

$$\mathrm{E}: 0 \longrightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

について次は同値である:

(i) E は W- 分裂である;
(ii) 任意の W- 射影的加群 U について拡大 E は U- 分裂である;
(iii) 任意の W- 射影的加群 U からの任意の kG- 準同型 $\alpha : U \longrightarrow N$ に対して kG- 準同型 $\beta : U \longrightarrow M$ で $f\beta = \alpha$ を満たすものが存在する;

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"'] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(iv) L からの任意の W- 射影加群 V への任意の kG- 準同型 $\sigma : L \longrightarrow V$ に対して kG- 準同型 $\tau : M \longrightarrow V$ で $\tau g = \sigma$ を満たすものが存在する;

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"'] & M \arrow[dl, dotted, "\exists\tau"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

補題 3.26 水平列はともに完全である可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

において, 上の水平列が W- 分裂ならば, 下の水平列も W- 分裂である.

定義 3.10 W と M を kG- 加群とする.

(i) W- 射影加群 U から M への W- 分裂な全型 $\pi : U \longrightarrow M$ のつくる短完全系列

$$0 \longrightarrow \ker\pi \longrightarrow U \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

を M の W- 射影分解とよぶ.

(ii) M から W- 射影加群 V への W- 分裂な単型 $\iota : M \longrightarrow U$ のつくる短完全系列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} V \longrightarrow \mathrm{coker}\,\iota \longrightarrow 0$$

を M の W- 入射分解とよぶ.

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\iota} U \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

を M の W- 射影分解とする.

$$K = K_0 \oplus R,\ K_0 \text{ は } W\text{- 射影的な直和因子を含まない},\ R \text{ は } W\text{- 射影的}$$

と直和分解する.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "i"'] & & R \\
& K \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

とすると,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "j"] & U \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "\exists f"] & M \arrow[r] & 0 \\
R \arrow[ur, "i"] \arrow[r, equal] & R & & &
\end{tikzcd}$$

よって, $U = R \oplus \ker f$ と直和分解し, $\ker f = U_0$ とおけば, M の W- 射影分解

$$0 \longrightarrow K_0 \longrightarrow U_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が得られる.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow V \longrightarrow M^* \longrightarrow 0$$

を M^* の W- 射影分解で, L は W- 射影的な直和因子を含まないものとすれば, この双対

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow V^* \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

は M の W- 入射分解で, L^* は W- 射影的な直和因子を含まない.

定義 3.11 (i) M の W- 射影分解

$$0 \longrightarrow \ker \pi \longrightarrow U \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

において, $\ker \pi$ が W- 射影的な直和因子を含まないとき, 上の W- 射影分解を M の W- 射影被覆とよぶ.

(ii) M の W- 入射分解

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} V \longrightarrow \operatorname{coker} \iota \longrightarrow 0$$

において, $\operatorname{coker} \iota$ が W- 射影的な直和因子を含まないとき, 上の W- 入射分解を M の W- 入射包絡とよぶ.

命題 3.27 M を kG- 加群とする.

$$U \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

を M の W- 射影分解とする. このとき, 次は同値である:

(i) M の任意の W- 射影分解 $V \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ に対して

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\exists \gamma"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
V \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(ii) M の任意の W- 射影分解 $V \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ に対してある W- 射影加群 R が存在して，拡大 $0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow V \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ は拡大 $0 \longrightarrow \ker\pi \oplus R \longrightarrow U \oplus R \longrightarrow M \longrightarrow 0$ と同値である．

(iii) $\ker\pi$ は W- 射影的な直和因子をもたない．

(iv) $U \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$ は M の W- 射影分解のなかで，次元 $\dim U$ が最小である．

命題 3.28 M を kG- 加群とする．

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} U$$

を M の W- 入射分解とする．このとき，次は同値である:

(i) M の任意の W- 入射分解 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} V$ に対して

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & U \\
 & & \| & & \vdots\,\exists\gamma \\
 & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow[f]{} & V
\end{array}$$

(ii) M の任意の W- 射影分解 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} V$ に対してある W- 射影加群 R が存在して，拡大 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} V \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$ は拡大 $0 \longrightarrow M \longrightarrow U \oplus R \longrightarrow \operatorname{coker}\iota \oplus R \longrightarrow 0$ と同値である．

(iii) $\operatorname{coker}\iota$ は W- 射影的な直和因子をもたない．

(iv) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} U$ は M の W- 入射分解のなかで，次元 $\dim U$ が最小である．

定理 3.29 W を kG- 加群とする．任意の kG- 加群 M は W- 射影被覆および W- 入射包絡を持ち，列の同型を除いて一意的である．

定義 3.12 W を kG- 加群とする．kG- 加群 M の W- 射影被覆 $\pi : P \longrightarrow M$ の核を $\Omega_W M$ とかく:

$$0 \longrightarrow \Omega_W M \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

P を $P_W M$ ともかく．M の W- 入射包絡 $\iota : M \longrightarrow I$ の余核を $\Omega_W^{-1} M$ とかく:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow \Omega_W^{-1} M \longrightarrow 0.$$

I を $I_W M$ ともかく．

$\Omega_W^{-1}\Omega_W M \simeq \Omega_W \Omega_W^{-1} M$ であり，これを $\Omega_W^0 M$ と定義する．すなわち，

$$M = \Omega_W^0 M \oplus X,$$

$\Omega_W^0 M$ は W- 射影的でない直和因子の直和，X は W- 射影的と直和分解する．

mod(kG) の full subcategory $\mathscr{C}$ が有限直和と直和因子をとるという操作で閉じていると仮定する．任意の kG- 加群 M に対して $\mathscr{C}$ に属する kG- 加群 U と準同型 $f : U \longrightarrow M$ で条件「$\mathscr{C}$ に属する任意の kG- 加群 W からの任意の準同型 $g : W \longrightarrow M$ はある $h : W \longrightarrow U$ により $g = f \circ h$ と分解する」を満たすとき，contravariantly finite であるという．$f : U \longrightarrow M$ を M の右 $\mathscr{C}$-approximation と呼ぶ．M は常に極小右 $\mathscr{C}$-approximation (M の他のどの右 $\mathscr{C}$-approximation についても，その直和因子であるもの) を持つことが知られている．covariantly finite な subcategory は双対的に定義される．covariant に，かつ contravariant に finite である subcategory は functorially finite であるといわれる．W- 射影的加群のなす category $\mathscr{P}(W)$ は系 3.20 により functorially finite である．逆に，相対射影性は functorially finite 性を特徴づける．

定理 3.30 (C–P–W Proposition 2.7) mod(kG) の full subcategory $\mathscr{C}$ が contravariantly finite であり，さらに，$M \in \mathscr{C}$ と任意の $N \in$ mod(kG) との tensor 積 $M \otimes N$ も $\mathscr{C}$ に属すると仮定する．$f : W \longrightarrow k$ を k の極小右 $\mathscr{C}$-approximation とすると，category $\mathscr{C}$ は W- 射影的加群のなす category $\mathscr{P}(W)$ である．特に，$\mathscr{C}$ は functorially finite である．

補題 3.31 M, N, W を kG- 加群とする．M または N の一方は W- 射影的であると仮定する．

(i) $\mathrm{Res}_W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, N \otimes W)$ は分裂する単型である;
(ii) $\mathrm{Tr}^W : \mathrm{Ext}^r_{kG}(M \otimes W, N \otimes W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^r_{kG}(M, N)$ は分裂する全型である．

定義 3.13 kG- 加群の準同型 $f : M \longrightarrow N$ が W- 射影的加群を通過するとき，これを W- 射影的準同型という．

kG- 加群の準同型 $f : M \longrightarrow N$ が W- 射影的ならばある W- 射影的加群 U と $g : M \longrightarrow U$, $h : U \longrightarrow N$ によって $f = hg$ と分解する．W- 射影的加群 V から N への W- 分裂な全型 $\pi : V \longrightarrow N$ (例えば，$\alpha_W \otimes 1_N : W \otimes W^* \otimes N \longrightarrow N$) について，$U$ は W- 射影的であるから，$h : U \longrightarrow N$ に対して kG- 準同型 $s : U \longrightarrow V$ によって $h = \pi \circ s$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "h"] & V \arrow[d, two heads, "\pi"] & (W\text{-分裂}) \\ M \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & N & \end{tikzcd}$$

よって，$s \circ g : M \longrightarrow V$ をあらためて g とおけば

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "\pi"] & \\ M \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

さらに，V の恒等変換を $1_V = \mathrm{Tr}^W \gamma, \gamma : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$, と表せば

$$f = \pi \circ g = \pi \circ \mathrm{Tr}^W \gamma \circ g = \mathrm{Tr}(\pi_W \circ \gamma \circ g_W).$$

補題 3.32 (C–P–W [13] Proposition 3.2) kG- 加群の準同型 $f : M \longrightarrow N$ について次は同値である:

(i) f は W- 射影的である;
(ii) W- 射影的加群 V から N への W- 分裂な全型 $\pi : V \longrightarrow N$ に対して

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, two heads, "\pi"] & (W\text{-分裂}) \\ M \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & N & \end{tikzcd}$$

(iii) M から W- 射影的加群 X への W- 分裂な単型 $\iota : M \longrightarrow X$ に対してある kG- 準同型 $h : X \longrightarrow N$ によって

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "\iota"'] & N \\ (W\text{-分裂}) & X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

(iv) ある kG- 準同型 $\gamma : M \otimes W \longrightarrow N \otimes W$ によって

$$f = \mathrm{Tr}^W \gamma.$$

補題 3.33 (C–P–W [13] Corollary 3.6) W, X を kG- 加群とする. kG- 加群の準同型 $f : L \longrightarrow M$ が W- 射影的であり, kG- 加群の準同型 $g : M \longrightarrow N$ が X- 射影的であるならば, 合成 $g \circ f : L \longrightarrow N$ は $W \otimes X$- 射影的である.

系 3.34 (C–P–W [13] Proposition 3.5) kG- 加群の準同型 $f : M \longrightarrow N$ は $M \otimes N$- 射影的である.

定義 3.14 $\rho \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(k, k), r > 0$, に対して

$$\mathscr{A}(\rho) = \{ M \text{ は } kG\text{- 加群} \mid \rho \cdot 1_M = 0 \}$$

とおく. さらに, 斉次元 $\rho_1, \ldots, \rho_t \in \mathrm{Ext}^*_{kG}(k, k)$ に対して

$$\mathscr{A}(\rho_1, \ldots, \rho_t) = \bigcap_{i=1}^{t} \mathscr{A}(\rho_i)$$

とおく.

補題 3.35 $\rho \in \mathrm{Ext}^r_{kG}(k, k)$ が productive のとき

$$\mathscr{P}(L_\rho) \subset \mathscr{A}(\rho).$$

命題 3.36 (Carlson–Peng [12] Proposition 4.7 (ii)) 斉次元 $\rho_1, \ldots, \rho_t \in \mathrm{Ext}^+_{kG}(k, k)$ について

$$\mathscr{A}(\rho_1, \ldots, \rho_t) \subset \mathscr{P}(L_{\rho_1} \otimes \cdots \otimes L_{\rho_t}).$$

特に, $\rho_1, \ldots, \rho_t$ がいずれも productive ならば

$$\mathscr{A}(\rho_1, \ldots, \rho_t) = \mathscr{P}(L_{\rho_1} \otimes \cdots \otimes L_{\rho_t}).$$

4 Variety と transfer 写像

kG- 加群 W によって定義される transfer 写像 Tr^W がいつ 0 写像であるかは興味がある.

命題 4.1 (C–P–W [13] Proposition 4.2) P を G の Sylow p- 部分群とし, W を kG- 加群とする.

$$\mathrm{res}^*_{Z(P)}(X_{Z(P)}(k)) \not\subset X_G(W)$$

ならば $\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}^*_{kG}(W, W)) = 0$ である.

注意 4.1 kG- 加群 M と部分群 $H \leq G$ について

$$\mathrm{res}^*_H(X_H(k)) \subset X_G(M) \Longleftrightarrow X_H(M_H) = X_H(k).$$

U を任意の kG- 加群とする. kG- 加群 M の射影分解および U- 射影分解をそれぞれ

$$0 \longrightarrow \Omega^n M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \Omega^n_U M \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

とする. このとき M の恒等写像を持ち上げて, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^n M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^n_U M \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

補題 4.2 (Sasaki [22]) W を kG- 加群とする．ある kG- 加群 U について $X_G(W)\cap X_G(U)=\{0\}$ であると仮定する．このとき，任意の kG- 加群 M と任意の W- 射影的加群 R に対して

$$\gamma_n^*:(\Omega_U^n M, R)_G/(\text{射影的準同型})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}_{kG}^n(M,R)$$

である．

この補題を用いて

定理 4.3 (Sasaki [22]) W を kG- 加群とする．P を G の Sylow p- 部分群とする．H を P の正規部分群か $Z(P)$ の位数 p の元からつくられる巡回 shifted 部分群とする．kG- 加群 W が kH 上射影的ならば，$\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^*(W,W))=0$ である．

この定理を利用して，よく知られた次の定理の別証明を得ることができる．

系 4.4 $\rho\in\mathrm{Ext}_{kG}^r(k,k)$ が G のある Sylow p- 部分群の中心に制限してべき零でなければ，ρ は正則元である．

また，命題 4.1 (C–P–W [13] Proposition 4.2) は定理 4.3 からも導かれる．

命題 4.5 (C–P–W [13] Proposition 4.4) W, M を kG- 加群とする．$\zeta\in\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^n(W,W))$ について，

$$X_G(M)\cap X_G(\zeta)=0$$

ならば M は W- 射影的である．

注意 4.2 $\mathscr{H}$ を G の部分群の集合とする．$W=\bigoplus_{H\in\mathscr{H}}k_H^G$ とすれば，上の命題と補題 3.2 により，補題 2.4 が得られる．

系 4.6 (C–P–W [13] Corollary 4.5) W, M を kG- 加群とする．M が周期的であり

$$X_G(M)\cap X_G(\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^*(W,W)))=0$$

ならば M は W- 射影的である．

5 virtual 相対射影性

系 4.6 の仮定から M が周期的であることを除くと

定理 5.1

$$X_G(M)\cap X_G(\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^*(W,W)))=\{0\}$$

ならば，任意の kG- 加群 N に対して，十分大きな n をとれば

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(M,N)=\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^n(M\otimes W, N\otimes W)).$$

定義 5.1 (C–P–W) kG- 加群 M は十分大きな n に対して

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(M,M)=\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^n(M\otimes W, M\otimes W))$$

であるとき，virtually W- 射影的であるといわれる．

補題 5.2 次は同値である．

(i) M は virtually W- 射影的である．
(ii) 任意の kG- 加群 N に対して，十分大きな n をとれば

$$\mathrm{Ext}_{kG}^n(M,N)=\mathrm{Tr}^W(\mathrm{Ext}_{kG}^n(M\otimes W, N\otimes W)).$$

(iii) 任意の kG- 加群 N に対して, 十分大きな n をとれば

$$\mathrm{Ext}_{kG}^{n}(N, M) = \mathrm{Tr}^{W}(\mathrm{Ext}_{kG}^{n}(N \otimes W, M \otimes W)).$$

例 5.1 コホモロジー環 $H^*(G, k)$ の homogeneous な parameter 系 $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ を定理 2.2 のようにとれば, $i = 1, \ldots, r-2$ に対して tensor 積 $L_{\zeta_1} \otimes \cdots L_{\zeta_i}$ は virtually $\mathscr{H}_{i+1}$- 射影的である. 一方, tensor 積 $L_{\zeta_1} \otimes \cdots L_{\zeta_{r-1}}$ は $\mathscr{H}_r$- 射影的であった（命題 2.3）.

実は, Benson [6] の議論を使えばさらに, 次がわかる.

定理 5.3 (Okuyama–Sasaki [19]) $H^*(G, k)$ の homogeneous な parameter 系 $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_r\}$ で次の条件を満たすものがとれる:

(i) 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$\zeta_i \in \sum_{H \in \mathscr{H}_i(G)} \mathrm{tr}_H^G(H^*(H, k));$$

(ii) 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して任意の $E \in \mathscr{A}_i(G)$ への $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_i\}$ の制限 $\{\mathrm{res}_E\, \zeta_1, \ldots, \mathrm{res}_E\, \zeta_i\}$ は $H^*(E, k)$ の parameter 系である.

このような parameter 系を用いて

定理 5.4 (Okuyama–Sasaki [19]) G の p-rank が 3 以下ならば自明な kG- 加群 k の index は 0 である.

が示される. 加群の index は Carlson が 1990 年に筑波大学で行われた多元環の表現論国際シンポジウムにおいて発表した概念である（Carlson [9]）.

6 Relatively stable category

定義 6.1 kG- 加群 M から N への W- 射影的 kG- 準同型のなす空間を $\mathscr{P}_W(M, N)_G$ と表す. W-stable category とは対象は mod(kG) と同じであるが, M から N への射の集合は

$$\underline{(M, N)}_G^W = (M, N)_G / \mathscr{P}_W(M, N)_G$$

として定義されるものである. W-stable category を $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ と表す.

$f : M \longrightarrow N$ が kG- 準同型のとき, $\iota_M : M \longrightarrow I_W M$ を M の W- 入射包絡とすると, mod(kG) における可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\iota_M} & I_W M & \longrightarrow & \Omega_W^{-1} M & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[g]{} & L & \xrightarrow[h]{} & \Omega_W^{-1} M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. f の $\underline{(M, N)}_G^W$ における像を $\underline{f}$ と表して, W-stable category $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ における系列

$$M \xrightarrow{\underline{f}} N \xrightarrow{\underline{g}} L \xrightarrow{\underline{h}} \Omega_W^{-1} M$$

を得る. これを standard triangle とよぶ.

定理 6.1 W-stable category $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ は triangulated category である.

命題 6.2 W- 分裂な短完全系列

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

に対して, $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ における triangle

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{h} \Omega_W^{-1}M'$$

が存在する. さらに, $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ におけるどの triangle も W- 分裂な短完全系列からこのようにして得られる triangle に同型である.

triangulated category $\mathscr{C}$ の subcategory $\mathscr{C}$ はそれが trianglulated であり, 直和因子をとるという操作で閉じているとき, thick であるといわれる.

定理 6.3 virtually W- 射影的な kG- 加群のなす category は W-stable category $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ の thick subcategory である.

Mod(kG) ですべての右 kG- 加群のなす category を表す. Rickard [20] により, $\underline{\mathrm{mod}}(kG)$ の thick subcategory $\mathscr{C}$ に対して Mod(kG) から Mod(kG) への idempotent 関手 $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}$, $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}$ が存在する. これらは加群 $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}(k)$, $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}(k)$ による tensor 積で与えられる. 加群 $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}(k)$, $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}(k)$ は射影加群を法として自分自身の tensor 積と同型 ($\mathscr{E}_{\mathscr{C}}(k) \otimes \mathscr{E}_{\mathscr{C}}(k) \simeq \mathscr{E}_{\mathscr{C}}(k)$, $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}(k) \otimes \mathscr{F}_{\mathscr{C}}(k) \simeq \mathscr{F}_{\mathscr{C}}(k)$ in Mod(kG)) であり, idempotent 加群と呼ばれる.

Carlson–Peng–Wheeler [13] は Rickard [20] の議論に修正は必要であるが, その Sections 4, 5 における理論は W-stable category に一般化されると述べ, W-stable category $\underline{\mathrm{mod}}^W(kG)$ の任意の thick subcategory $\mathscr{C}$ に対して $\underline{\mathrm{Mod}}^W(kG)$ から $\underline{\mathrm{Mod}}^W(kG)$ への idempotent 関手 $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}^W$, $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}^W$ が存在するという (C–P–W Proposition 6.5). ここで, $\underline{\mathrm{Mod}}^W(kG)$ はすべての右 kG- 加群のつくる W-stable category である. しかし, この命題に続けて

> In the case of Proposition 6.5 it is not clear whether the functors $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}$ and $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}$ are always given by tensoring with a kG-module. This may be the subject of further investigation.

であるという. なお, 上の $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}$ and $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}$ は $\mathscr{E}_{\mathscr{C}}^W$ and $\mathscr{F}_{\mathscr{C}}^W$ のことであると思う.

Benson–Carlson–Robinson [4] は「有限群 G の主 block に属するどの有限生成 kG- 加群 M についても $H^*(G, M) \neq 0$」であるということと「G のどの p- 元 x についても $C_G(x)$ が正規 p- 補群をもつ」ということは同値であると予想た. この予想は Benson [7] によって解決された. そこでは idempotent 加群が使われた.

参考文献

[1] T. Asai, A dimension formula for the cohomology rings of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, Comm. Algebra **19** (1991), 3173–3190.

[2] T. Asai and H. Sasaki, The mod 2 cohomology algebras of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, Comm. Algebra **21** (1993), 2771–2790.

[3] M. Auslander and J. F. Carlson, Almost-split sequences and group rings, J. Algebra **103** (1986), 122–140.

[4] D. J. Benson, J. F. Carlson, and G. R. Robinson, On the vanishing of group cohomology, J. Algebra **131** (1990), 40–73.

[5] D. J. Benson, Representations and cohomology II: Cohomology of groups and modules, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[6] ———, The image of the transfer map, Arch. Math. (Basel) **61** (1993), 7–11.

[7] ———, Cohomology of modules in the principal block of a finite group, New York J. Math. **1** (1994/95), 196–205.

[8] J. F. Carlson, Varieties and transfers, J. Pure Appl. Alg. **44** (1987), 99–105.

[9] ———, Projective resolutions and degree shifting for cohomology and group rings, Representations of Algebras and Related Topics (Tsukuba 1990) (H. Tachikawa and S. Brenner, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 168, Cambridge University Press, 1992, pp. 80–126.

[10] ———, Depth and transfer maps in the cohomology of groups, Math. Z. **218** (1995), 461–468.

[11] ———, Modules and group algebras, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1996.

[12] J. F. Carlson and C. Peng, Relative projectivity and ideals in cohomology rings, J. Algebra **183** (1996), 929–948.

[13] J. F. Carlson, C. Peng, and W. W. Wheeler, Transfer maps and virtual projectivity, J. Algebra **204** (1998), 286–311.

[14] L. Evens, The cohomology of groups, Oxford Mathematics Monograph, Oxford University Press, New York, 1991.

[15] R. Knörr, Relative projective covers, Proc. Symp. Modular Representations of Finite Groups, Various Publication Series, vol. 29, Aarhus University, 1978, pp. 28–32.

[16] 奥山 哲郎, 群環の Auslader-Reiten 列. その後, 第 2 回 「楽しい有限群の集い」 報告集, 1990, pp. 1–6.

[17] T. Okuyama, A generalization of projective covers of modules over group algebras, unpublished manuscript.

[18] T. Okuyama and H. Sasaki, Relative projectivity of modules and cohomology theory of finite groups, Algebras and Representation Theory, to appear.

[19] ———, Homogeneous systems of paramters in cohomology algebras of finite groups, preprint.

[20] J. Rickard, Idempotent modules in the stable category, J. London Math. Soc. (2) **56** (1997), 149–170.

[21] H. Sasaki, The mod 2 cohomology algebras of finite groups with semidihedral Sylow 2-subgroups, Comm. Algebra **22** (1994), 4123–4156.

[22] ———, Transfers and regular elements in cohomology algebra, manuscript.

[23] J. Thévenaz, Relative projective covers and almost split sequences, Comm. Algebra **13** (1985), 1535–1554.