数理解析研究所講究録 1216 巻 2001 年 128-132

Global Attractivity for Nonlinear Delay Differential Equations with Impulses

大阪府立大・工　松永 秀章 (Hideaki Matsunaga)

1. Introduction

時間遅れとインパルスをもつ非線形微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = -p(t)f(x(t-\tau)), & t \geq 0,\ t \neq t_k \\ x(t_k^+) = b_k x(t_k), & k \in \{1, 2, \ldots\} \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ここで $\tau > 0$ かつ $p: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は連続関数で $xf(x) > 0$ if $x \neq 0$ を満たすとする. インパルスに関しては, $b_k > 0$ かつ

$$0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots; \quad \lim_{k \to \infty} t_k = \infty$$

であると仮定する. また $x'(t)$ は $x(t)$ の左側微分を表す. この 10 年間で (1) に類するような時間遅れとインパルスをもつ微分方程式の研究が数多くなされている (例えば [1–8, 11–15] を見よ). 本研究では, (1) の零解の大域的吸収性を考察する.

さて, $x(t) = x(t, \phi)$ が初期条件

$$x(t) = \phi(t) \quad \text{for} \ -\tau \leq t \leq 0$$

を満たす (1) の解であるとは

(i) $x(t)$ は $[-\tau, \infty)$ 上で区分的に連続 かつ 各区間 (t_k, t_{k+1}) で連続微分可能である;
(ii) 各 $t_k \geq 0$ に対して $x(t_k^+)$ と $x(t_k^-)$ が存在し, $x(t_k^-) = x(t_k)$ を満たす;
(iii) $x(t)$ は $^\forall t \geq 0$ に対して (1) を満たす

が成り立つときに言う. ステップ法により, (1) の解 $x(t, \phi)$ は $[-\tau, \infty)$ 上で一意的に存在する ([4]).

最近, Yu & Zhang [14] が (1) の零解の局所的な漸近安定性に関する結果を報告した (実際はインパルスの条件が非線形で与えられている).

Theorem A. $0 < b_k \leq 1$ かつ $t_{k+1} - t_k > \tau$ とし, 次の条件を仮定する:

$$^\exists\delta > 0; \qquad |f(x)| \leq |x| \quad \text{for } |x| \leq \delta, \tag{2}$$

$$0 < {}^\exists\beta \leq b_k; \quad \limsup_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds < \beta + \frac{\beta^2}{2}, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty p(s)ds = \infty.$$

このとき (1) の零解は一様安定かつ吸収的である.

本研究では,

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$$

の下で (1) の全ての解が 0 に漸近するための十分条件を与えることを目標とする. そのため $f(x)$ に関する条件 (2) を全区間 $\mathbf{R}$ で考える：

$$|f(x)| \le |x| \quad \text{for } x \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

以下が今回得られた主結果である.

Theorem 1. 条件 (4) かつ次の条件を仮定する：

$$0 < \prod_{k=1}^{\infty} b_k < \infty, \tag{5}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s) \prod_{s-\tau \le t_k < s} b_k^{-1}\, ds < \frac{3}{2}, \tag{6}$$

$$\int_0^{\infty} p(s)ds = \infty. \tag{7}$$

このとき (1) の全ての解 $x(t)$ は $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

なお, 方程式 (1) でインパルスがないとき, 即ち $b_k \equiv 1$ のとき, 条件 (3) および 条件 (6) はともに

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds < \frac{3}{2}$$

となり, 時間遅れをもつ微分方程式論でよく知られた $\frac{3}{2}$-stability condition ([9,10]) に一致する.

2. Proof of Theorem 1

まず, インパルスをもつ微分方程式の解と, インパルスをもたない微分方程式の解の同値性に関する Lemma を準備する.

次の方程式 (1) に対応するインパルスをもたない方程式

$$y'(t) = -p(t) \prod_{0\le t_k < t} b_k^{-1} f\Big(\prod_{0 \le t_k < t-\tau} b_k\, y(t-\tau)\Big) \tag{8}$$

を考える. ここで τ, $p(t)$, $f(x)$, t_k, b_k は (1) で与えられたものとする.

Lemma 1.

(i) $y(t,\phi)$ が (8) の解ならば, $x(t,\phi) = \prod_{0\le t_k<t} b_k\, y(t,\phi)$ は (1) の解である.

(ii) $x(t,\phi)$ が (1) の解ならば, $y(t,\phi) = \prod_{0\le t_k<t} b_k^{-1}\, x(t,\phi)$ は (8) の解である.

Proof. $x(t) = x(t,\phi)$, $y(t) = y(t,\phi)$ とおく.

(i) $y(t)$ を (8) の解とすると, $x(t)=\prod_{0\le t_k<t} b_k\, y(t)$ は $[-\tau,\infty)$ 上で定義され, 各区間 $(t_k, t_{k+1}]$ で連続である. このとき, $t\neq t_k\,(k=1,2,\dots)$ に対して

$$x'(t)=\prod_{0\le t_k<t} b_k\, y'(t)=\prod_{0\le t_k<t} b_k\Big\{-p(t)\prod_{0\le t_k<t} b_k^{-1} f\Big(\prod_{0\le t_k<t-\tau} b_k\, y(t-\tau)\Big)\Big\}$$
$$=-p(t)f(x(t-\tau)).$$

また, $t_k\,(k=1,2,\dots)$ に対して

$$x(t_k^+)=\lim_{t\to t_k^+}\prod_{0\le t_j<t} b_j\, y(t)=\prod_{0\le t_j\le t_k} b_j\, y(t_k),$$
$$x(t_k)=\prod_{0\le t_j<t_k} b_j\, y(t_k).$$

よって

$$x(t_k^+)=b_k x(t_k)\qquad \text{for } k=1,2,\dots. \tag{9}$$

したがって, $x(t)$ は $^\forall t\ge 0$ に対して (1) を満たすので, (1) の解である.

(ii) $x(t)$ を (1) の解とすると, $y(t)=\prod_{0\le t_k<t} b_k^{-1}\, x(t)$ は $[-\tau,\infty)$ 上で定義され, 各区間 $(t_k, t_{k+1}]$ で連続である. ここで, (9) に注意すると, $t_k\,(k=1,2,\dots)$ に対して

$$y(t_k^+)=\prod_{0\le t_j\le t_k} b_j^{-1}\, x(t_k^+)=\prod_{0\le t_j<t_k} b_j^{-1}\, x(t_k)=y(t_k),$$
$$y(t_k^-)=\prod_{0\le t_j<t_k} b_j^{-1}\, x(t_k^-)=y(t_k).$$

よって, $y(t)$ は $[0,\infty)$ 上で連続である. また, $y(t)$ は $^\forall t\ge 0$ に対して (8) を満たすことも直ちに確かめられるので, (8) の解である. □

Remark 1. Lemma 1 は b_k に関する大前提を $b_k>0$ の代わりに $b_k\neq 0$ としてもそのまま成り立つ.

Remark 2. Lemma 1 は線形方程式に対する Yan & Zhao の結果 [11, Theorem 1.1] を拡張したものであるが, ごく最近, Luo によってこれと同様な結果 [7, Theorem 1] が報告されている.

Proof of Theorem 1. $x(t)=x(t,\phi)$ を (1) の解とする.

$$y(t)=\prod_{0\le t_k<t} b_k^{-1}\, x(t)\quad \text{for } t\ge 0$$

とおくと, Lemma 1 より $y(t)$ は $[0,\infty)$ 上で連続 かつ (8) を満たしている. したがって, 条件 (5) に注意すると, (8) の全ての解 $y(t)$ が

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=0 \tag{10}$$

となることを示せばよい.

<u>$y(t)$ が非振動解の場合</u>.

$$^\exists T_1 > \tau : \text{十分大}; \quad y(t) \geq 0 \text{ or } y(t) \leq 0 \quad \text{for } t \geq T_1 - \tau.$$

$y(t) \geq 0$ for $t \geq T_1 - \tau$ の場合を考える ($y(t) \leq 0$ の場合も同様). (8) より

$$y'(t) \leq 0 \quad \text{for } t \geq T_1$$

なので $^\exists \alpha \geq 0$; $\lim_{t\to\infty} y(t) = \alpha$. もし, $\alpha > 0$ とすると

$$^\exists T_2 \geq T_1 + \tau; \quad \frac{\alpha}{2} \leq y(t) \leq \frac{3}{2}\alpha \quad \text{for } t \geq T_2.$$

このとき, 条件 (5) より $0 < {}^\exists \mu \leq \prod_{0\leq t_k<t} b_k \leq {}^\exists \lambda < \infty$ for $t \geq 0$ であるから, $m = \min_{\frac{1}{2}\alpha\mu\leq y\leq\frac{3}{2}\alpha\lambda} f(y) > 0$ とおくと

$$y'(t) \leq -p(t)\frac{m}{\lambda} \quad \text{for } t \geq T_2$$

が成り立つ. この両辺を T_2 から t まで積分すると, 条件 (7) より

$$y(t) - y(T_2) \leq -\frac{m}{\lambda}\int_{T_2}^{t} p(s)ds \to -\infty \quad \text{as } t \to \infty$$

となり, 左辺が $t \to \infty$ のとき有限値であることに矛盾する. したがって $\alpha = 0$ であり, (10) が成り立つ.

<u>$y(t)$ が振動解の場合</u>. 条件 (4) を用いると

$$\begin{aligned} |y'(t)| &\leq p(t)\prod_{0\leq t_k<t} b_k^{-1}\left|f\Big(\prod_{0\leq t_k<t-\tau} b_k\, y(t-\tau)\Big)\right| \\ &\leq p(t)\prod_{t-\tau\leq t_k<t} b_k^{-1}\,|y(t-\tau)|. \end{aligned} \tag{11}$$

よって, $a(t) = p(t)\prod_{t-\tau\leq t_k<t} b_k^{-1}$ とおくと $a(t)$ は区分的に連続で, (11) は

$$|y'(t)| \leq a(t)|y(t-\tau)|$$

と表せる. ここで, 条件 (6) は

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} a(s)ds < \frac{3}{2}$$

となるので, 以下 [9, 10] と同様な証明方法で (10) を示すことができる. □

Remark 3. 条件 (4) かつ

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k = 0 \tag{12}$$

の場合,

$$\text{条件 (6)} \quad \Longrightarrow \quad \text{(1) の全ての解 } x(t) \text{ は } \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

と予想している (証明は未完了).

References

[1] D. D. Bainov and P. S. Simeonov,"Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications," Longman, Harlow, 1993.

[2] L. Berezansky and E. Braverman, Explicit conditions of exponential stability for a linear impulsive delay differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **214** (1997), 439–458.

[3] L. Berezansky and E. Braverman, Oscillation of a linear delay impulsive differential equation, *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* **3** (1996), 61–77.

[4] M. P. Chen, J. S. Yu and J. H. Shen, The persistence of nonoscillatory solutions of delay differential equations under impulsive perturbations, *Comput. Math. Appl.* **27** (1994), 1–6.

[5] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, "Theory of Impulsive Differential Equations," World Scientific, Singapore, 1989.

[6] X. Liu and J. H. Shen, Asymptotic behavior of solutions of impulsive neutral differential equations, *Appl. Math. Lett.* **12** (1999), 51–58.

[7] J. W. Luo, Oscillation for nonlinear delay differential equations with impulses, *J. Math. Anal. Appl.* **250** (2000), 290–298.

[8] J. W. Luo and J. H. Shen, Asymptotic behavior of forced nonlinear delay differential equations with impulses, *Acta Math. Sinica (English Ed.)* **16** (2000), 565–572.

[9] H. Matsunaga, R. Miyazaki and T. Hara, Global attractivity results for nonlinear delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **234**, 77–90, (1999).

[10] J. W. -H. So, J. S. Yu and M. P. Chen, Asymptotic stability for scalar delay differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **39** (1996), 1–17.

[11] J. Yan and A. Zhao, Oscillation and stability of linear impulsive delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **227** (1998), 187–194.

[12] J. Yu and J. Yan, Positive solutions and asymptotic bahavior of delay differential equations with nonlinear impulses, *J. Math. Anal. Appl.* **207** (1997), 388–396.

[13] J. S. Yu, Stability caused by impulses for delay differential equations, *Acta Math. Sinica (N.S.)* **13** (1997), 193-198.

[14] J. S. Yu and B. G. Zhang, Stability theorem for delay differential equations with impulses, *J. Math. Anal. Appl.* **199** (1996), 162–175.

[15] A. Zhao and J. Yan, Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, *J. Math. Anal. Appl.* **210** (1997), 667–678.