数理解析研究所講究録 1216 巻 2001 年 157-161

2階準線形常微分方程式の正値解の漸近挙動について

加茂 憲一　広島大学理学部
宇佐美 広介　広島大学総合科学部

2階準線形常微分方程式

(E) $$(p(t)|u'|^{\alpha-1}u')' = q(t)|u|^{\lambda-1}u$$

を考える. ここで α, λ は正定数で $\alpha < \lambda$ とし p, q は区間 $[t_0, \infty)$ 上の正値連続関数とする. 更に関数 p が

$$\int^{\infty} p(t)^{-1/\alpha}\, dt < \infty$$

をみたす場合のみを考える. 今後, この条件を「積分収束条件」と呼ぶ.

もしこの積分収束条件をみたさない場合, すなわち

$$\int^{\infty} p(t)^{-1/\alpha}\, dt = \infty$$

(今後「積分発散条件」と呼ぶ) の場合は変数変換

$$\tau = \int_{t_0}^{t} p(s)^{-1/\alpha}\, ds$$

により方程式 (E) は

(E') $$(|v_\tau|^{\alpha-1}v_\tau)_\tau = r(\tau)|v|^{\lambda-1}v$$

の形に帰着されることが知られている. 方程式 (E') は, 微分の項の中の係数関数が恒等的に 1 であるので, 方程式 (E) より幾分取り扱い易くなっている. 従って積分発散条件の下では, 方程式 (E) を一旦 (E') の形に帰着させておき, (E') 自身を解析する, という方法がとられている.

今回は積分収束条件の下で考えるが, 便宜上, 関数 $\pi(t)$ を次のように定義しておく:

$$\pi(t) = \int_{t}^{\infty} p(\tau)^{-1/\alpha}\, d\tau.$$

積分収束条件の下では過去の研究により方程式 (E) の正値解はその漸近挙動により大雑把に次の 4 つに分類されることが知られている：

$$\text{(RD)} \quad \textit{(rapidly decaying solution)} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{\pi(t)} = 0;$$

$$\text{(SD)} \quad \textit{(slowly decaying solution)} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{\pi(t)} \in (0,\infty);$$

$$\text{(AC)} \quad \textit{(asymptotically constant solution)} \qquad \lim_{t\to\infty} u(t) \in (0,\infty);$$

$$\text{(U)} \quad \textit{(unbounded solution)} \qquad \lim_{t\to\infty} u(t) = +\infty.$$

また各々のタイプの解が存在するための必要 and/or 十分条件も知られており，その結果については文献 [3] を参考されたい．

ここでは漸近的主要項の判らない (RD), (U) の 2 つのタイプの正値解について考える．まず (RD) タイプの解に関して次の結果が得られた．

補題 1 （(RD) 解に関する比較定理）． 次の 2 つの方程式

$$(p(t)|x'|^{\alpha-1}x')' = q_1(t)|x|^{\lambda-1}x \tag{1}$$

$$(p(t)|y'|^{\alpha-1}y')' = q_2(t)|y|^{\lambda-1}y \tag{2}$$

を考える．ここで α, λ は正定数で 関数 p, q_1, q_2 は $[t_0,\infty)$ で定義された正値連続関数で p は積分収束条件をみたすとする．更に $q_1 \le q_2$ on $[t_0,\infty)$ とする．方程式 (1) と (2) の (RD) タイプの解 x, y が $x(t_0) \ge y(t_0)$ をみたすならば $x(t) \ge y(t)$ on $[t_0,\infty)$ である．

この補題を用いて次の定理を得ることが出来る．

定理 1 （(RD) 解に関する漸近同値性）． 2 つの方程式 (1), (2) を考える．ここで α, λ は正定数で $0 < \alpha < \lambda$ をみたし，p, q_1, q_2 は正値連続関数で p は積分収束条件をみたすとする．更に $q_1 \sim q_2$ ならば (1) と (2) の (RD) タイプの解 x, y は $x \sim y$ をみたす．ここで $f(t) \sim g(t)$ とは $\lim_{t\to\infty} f(t)/g(t) = 1$ のことである．

一方 (E) の (U) タイプの解に関しては定理 1 のような漸近同値性定理は得られないが p, q の漸近的主要項を限定することによって，次の様な結果が得られた．

定理 2 ((U) 解に関する漸近同値性). 方程式 (E) において $p(t)=(1+\varepsilon_1(t))t^\beta$, $q(t)=c(1+\varepsilon_2(t))t^\sigma$ (但し $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ as $t\to\infty$) を C^2 級の関数とし $\beta-\sigma-\alpha-1>0$ とする. 更に次の条件をみたすとする:

$(pq^\alpha)'$ が定符号;

$$\lim_{t\to\infty} t\varepsilon_1'(t)=\lim_{t\to\infty} t\varepsilon_2'(t)=0;$$

$$\int^\infty t^2\varepsilon_1'(t)^2\,dt<\infty \text{ 又は } \int^\infty t|(\varepsilon_1'(t)-t\varepsilon_1''(t))(1+\varepsilon_1(t))-t\varepsilon_1'(t)|\,dt<\infty.$$

このとき方程式 (E) の解 u で (U) をみたすものの漸近挙動は

$$u\sim \hat{c}_1 t^k \quad \text{但し } k=\frac{\beta-\sigma-\alpha-1}{\lambda-\alpha}\ (>0),\quad \hat{c}_1{}^{\lambda-\alpha}=\frac{k^\alpha(\beta+\alpha(k-1))}{c}$$

である.

定理 2 の証明には次の補題が用いられる：

補題 2 ((U) に関する比較定理). 次の 2 つの方程式

$$(p_1(t)|x'|^{\alpha-1}x')'=q_1(t)|x|^{\lambda-1}x \tag{3}$$

$$(p_2(t)|y'|^{\alpha-1}y')'=q_2(t)|y|^{\lambda-1}y \tag{4}$$

を考える. ここで $0<p_2(t)\le p_1(t)$ かつ $0\le q_1(t)\le q_2(t)$, $t\ge t_0$ とする. また x と y を各々 (3) と (4) の (U) タイプの解とし

$$x(t_0)\le y(t_0),\qquad x'(t_0)<y'(t_0),\qquad p_1(t_0)p_2(t)x'(t_0)\le p_1(t)p_2(t_0)y'(t_0)$$

をみたすものとする. このとき $x(t)\le y(t)$ on $t\ge t_0$ である.

定理 1 の系として次が得られる.

系 1. 方程式 (E) の典型的な場合である次の方程式を考える.

$$(t^\beta|u'|^{\alpha-1}u')'=q(t)|u|^{\lambda-1}u. \tag{5}$$

但し α,β,λ は正定数で $\alpha<\lambda, \alpha<\beta$ をみたすとする. 更に q は正の連続関数で $q(t)\sim ct^\sigma$

をみたすとする. もし $\beta\lambda - \alpha\sigma - \alpha\lambda - \alpha < 0$ ならば, この方程式の (RD) タイプの解の漸近挙動は

$$u \sim \hat{c}_2 t^{-l} \qquad \text{但し} \quad l = \frac{\sigma + \alpha + 1 - \beta}{\lambda - \alpha} \; (> 0), \quad \hat{c}_2{}^{\lambda-\alpha} = \frac{l^\alpha(\alpha(l+1) - \beta)}{c}$$

である.

この結果は (5) と

$$(t^\beta |u'|^{\alpha-1} u')' = ct^\sigma |u|^{\lambda-1} u$$

を比較して定理 1 を適用すると得られる結果である.

以上の結果を応用してある種の楕円型境界値問題の解の存在性がいえる. 外部境界値問題

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}\,(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) = f(x)|u|^{\lambda-1}u & \text{in } \Omega = R^N \setminus \bar{\Omega}_0, \\ u = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega, \quad g > 0 \end{cases}$$

に関して次の結果が得られる. 但し Ω_0 は有界領域, $f(x) \sim C|x|^{\sigma_1}$ $(C > 0,\ \sigma_1 \in R)$ とし, $m - 1 < \lambda$ かつ $m < N$ とする.

(RD) に関する応用. $N\lambda - mN - m\sigma_1 + N + \sigma_1 - m\lambda < 0$ ならば境界値問題 (P) は解 $u \in W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ で

$$u(x) \sim a|x|^{-\mu}$$

なるものを持つ. 但し

$$\mu = \frac{m + \sigma_1}{\lambda - m + 1} \; (> 0),$$

$$a^{\lambda-m+1} = \frac{(Nm + m\lambda + m\sigma_1 - N\lambda - N - \sigma_1)(m + \sigma_1)^{m-1}}{C(\lambda - m + 1)}$$

である.

同様に定理 2 を適用すると次のことがいえる:

(U) に関する応用. $\sigma_1 + N < 0$ かつ

$$(r^{2(N-1)}f_*(r))' \text{ が定符号},$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rf_*'(r) - \sigma_1 f_*(r)}{r^{\sigma_1}} = 0$$

をみたすとする. 但し $f_*(r) = \min_{|x|=r} f(x)$ とする. このとき境界値問題 (P) は解 $u \in W^{1,m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ で

$$0 < \liminf_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{|x|^\nu} \le \limsup_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{|x|^\nu} \le b$$

なるものを持つ. 但し

$$\nu = -\frac{m+\sigma_1}{\lambda - m + 1}\ (>0),$$

$$b^{\lambda-m+1} = \frac{(Nm + m\lambda + m\sigma_1 - N\lambda - N - \sigma_1)(m+\sigma_1)^{m-1}}{C(\lambda - m + 1)}.$$

である.

参考文献

[1] K. Kamo, *Asymptotic equivalence for positive decaying solutions of quasilinear ordinary differential equations and its application to elliptic problems,* (preprint).

[2] T. Kura, *The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear elliptic equations,* Hiroshima Math. J. 19 (1989), 1-36.

[3] T. Tanigawa, *Existence and asymptotic behavior of positive solutions of second order quasilinear differential equations,* Adv. Math. Sci. Appl. 9 (1999), 907-938.